

SINTEZE LYCEUM

C. IONESCU-ȚIU
LIVIU PÎRȘAN

CALCUL DIFERENȚIAL ȘI INTEGRAL PENTRU ADMITERE ÎN FACULTATE

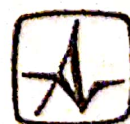
EDITURA ALBATROS 



SINTEZE LYCEUM

C. IONESCU-ȚIU
LIVIU PÎRȘAN

CALCUL DIFERENȚIAL ȘI INTEGRAL PENTRU ADMITERE ÎN FACULTATE



EDITURA ALBATROS

CUPRINS

CUVÎNT ÎNAINTE

Calculul diferențial și integral — sau „calculul sublim", cum se numea în trecut această disciplină matematică, apărută în secolul al XVII-lea sub impulsul lui Newton *(1643—1727) și* Leibniz *(1646—1716) — s-a dezvoltat cu multă impetuozitate grație descoperirilor lui* Iacob Bernoulli *(1654—1705),* Ioan Bernoulli *(1667—1748),* G. de l'Hospital *(1661—1704),* Brook Taylor *(1685—1731),* Colin Mac-Laurin *(1698—1746),* Leonhard Euler *(1707—1783),* Jean Le Rond d'Alembert *(1717—1783),* Joseph-Louis Lagrange *(1736—1813),* Augustin Louis Cauchy *(1789—1857) și a multor altor matematicieni și mecanicieni din secolele XVIII, XIX. El constituie un instrument de lucru de o deosebită eficiență pentru studiul lumii materiale, oferind posibilitatea de a cerceta orice formă de evoluție a materiei (mișcarea mecanică, fizică, chimică sau biologică) în fazele ei de desfășurare continuă dintre perioadele de salt, din moment ce această cercetare, depășind etapele inițiale de observație, trece la experimentare, la măsurare de efecte, luînd astfel un aspect cantitativ.*

Calculul diferențial și integral, sub forma calculului fluxional, a fost inițiat de Newton plecînd de la considerații și probleme de mecanică, și el i-a permis marelui om de știință să descopere nemuritoarele sale legi: principiile mecanicii. Simultan, dar independent de el,

Leibniz a fondat aceeași disciplină matematică, condus fiind în special de legile de dezvoltare internă a matematicii.

Prin calculul diferențial și integral, un vast orizont s-a deschis în dezvoltarea matematicii, care, în secolele următoare, a avansat în paralel cu mecanica, știință fundamentată a naturii; nu este de aceea deloc de mirare faptul că marii matematicieni ai epocii, amintiți mai înainte, sînt în același timp și marii creatori în domeniul mecanicii. Încă în anul 1736, Leonhard Euler, prin tratatul său Mechanica, sive motus scientia analytice exposita, *a dat, primul, exemplul utilizării consecvente a calculului diferențial și integral pentru expunerea fundamentelor mecanicii și rezolvarea problemelor puse de ea. Același mare savant, prin tratatele sale:* Introductio in Analysin infinitorum *(1748) și* Institutiones Calculi differentialis, Institutiones Calculi integralis *(1768), a pus bazele învățămîntului modern al acestei importante părți a analizei matematice. Fizica, chimia și, mai recent, biologia au ținut seamă de sugestivul exemplu al mecanicii și au urmat sau sînt în curs să dezvolte un proces de matematizare analog.*

Dezvoltarea vertiginoasă a matematicii în secolele XVIII și XIX, legată în special de perspectivele mărețe ale colaborării cu mecanica și cu celelalte științe ale naturii, pe atunci în fază incipientă, au dus, spre sfîrșitul secolului al XIX-lea, la o criză de creștere. În graba descoperirilor pasionante pe care le făceau, matematicienii au neglijat uneori consolidarea impozantului lor edificiu. Spiritul de rigoare, absent uneori la Newton și chiar la Euler, este introdus de Cauchy, și el este astăzi dezvoltat în mod consecvent. Noi notații au fost introduse pentru a preciza mai bine noțiunile fundamentale și a da o mai mare claritate expunerii, deschizînd astfel accesul spre

matematică cercului tot mai larg al celor ce vor să se inițieze în tainele ei.

Pentru un tînăr care dorește să-și însușească principiile de bază ale calculului diferențial și integral, volumul prezentat de profesorii C. Ionescu-Țiu și Liviu Pîrșan, ambii redactori la Gazeta matematică, se va dovedi de un deosebit folos. Continuînd volumul anterior, Algebra și analiza matematică (Ed. Albatros, 1974) al acelorași autori și concepută în același mod, lucrarea prezentă aduce un număr impresionant de exerciții și probleme alese metodic, gradat, de o dificultate crescîndă, după ce în partea introductivă a fiecărui capitol se dă o prezentare de ansamblu, sumară, dar foarte precisă și modernă, a noțiunilor fundamentale și a elementelor necesare pentru rezolvarea problemelor conținute în acel capitol. Unele dintre problemele propuse la sfîrșitul capitolului sînt mai grele și ele reclamă o adevărată virtuozitate matematică, pe care volumul caută să o transmită cititorului.

Materia tratată acoperă chestiunile prevăzute în programa analitică de liceu, ca: limite de șiruri, limite de funcții, continuitate și discontinuitate, derivabilitate, rezolvări de ecuații funcționale în clasa funcțiilor continue plecînd de la celebra ecuație a lui Cauchy, studiul „adevăratei valori" a unei funcții a cărei expresie se prezintă sub o formă nedeterminată pentru un punct de acumulare al mulțimii de definiție, dar care nu-i aparține, integrarea și căutarea funcțiilor primitive, aplicații practice ale calculului diferențial și integral, ecuații diferențiale. Uneori această programă este depășită, autorii ținînd seamă și de specificul problemelor de admitere din facultățile științifice și tehnice.

Lucrarea se dovedește foarte utilă și ea va aduce reale servicii cauzei învățămîntului matematicii în licee, punînd

la dispoziția profesorilor și elevilor acest bogat material. Elevii care se îndreaptă spre facultăți au posibilitatea rezolvării unor probleme variate de calcul diferențial și integral, dezvoltîndu-și astfel deprinderile și punînd la contribuție perspicacitatea lor, obținînd o pregătire matematică serioasă pentru a face față problemelor din ce în ce mai dificile, de nivelul acelora date la admiterea în facultățile cele mai exigente.

Se cuvine să exprimăm calde cuvinte de mulțumire atît autorilor, care și-au pus bogata lor experiență în serviciul cauzei ridicării nivelului pregătirii matematice a elevilor, cît și Editurii Albatros, pentru publicarea acestui nou volum în cele mai bune condițiuni.

București, 14 noiembrie 1974

Acad. *CAIUS IACOB*

Capitolul I

LIMITE DE ŞIRURI

Mulţimea formată din toate numerele reale împreună cu $+\infty$ şi $-\infty$ se numeşte *dreapta încheiată* şi se notează cu $\bar{R}$. Semidreptele de forma $(a, +\infty)$ se numesc *vecinătăţi ale lui* $+\infty$, iar semidreptele de forma $(-\infty, b)$ se numesc *vecinătăţi ale lui* $-\infty$.

Definiţie. Vom spune că un şir $\{a_n\}_{n\in N}$ are limita $+\infty$ dacă orice vecinătate a lui $+\infty$ conţine toţi termenii şirului, exceptînd eventual un număr finit dintre ei.

Se scrie $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ sau $a_n \to +\infty$.

Teoremă. Şirul $a_n \to +\infty$ dacă şi numai dacă pentru fiecare număr $\varepsilon > 0$ (oricît de mare) se poate găsi un rang n_ε, astfel încît, dacă $n \geqslant n_\varepsilon$, să avem:

$$a_n > \varepsilon.$$

Criteriu. Dacă $a_n \geqslant b_n$ pentru orice n şi $b_n \to \infty$, atunci $a_n \to \infty$.

Definiţie. Vom spune că un şir $\{a_n\}_{n\in N}$ are limita $-\infty$ dacă orice vecinătate a lui $-\infty$ conţine toţi termenii şirului, exceptînd eventual un număr finit dintre ei.

Teoremă. Şirul $a_n \to -\infty$ dacă şi numai dacă pentru fiecare număr $\varepsilon > 0$ (oricît de mare) se poate găsi un rang n_ε, astfel încît, dacă $n \geqslant n_\varepsilon$, să avem:

$$a_n < -\varepsilon.$$

Operaţii cu şiruri care au limită

Teorema 1. Dacă (a_n) şi (b_n) sînt două şiruri convergente, atunci şirul sumă $(a_n + b_n)$ este convergent şi

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Teorema rămîne adevărată și în cazul cînd unul sau ambele șiruri au limita infinită. Putem scrie:

1°. Dacă $a_n \to +\infty$, $b_n \to +\infty$, atunci $a_n + b_n \to +\infty$.

2°. Dacă $a_n \to a$, $b_n \to +\infty$, atunci $a_n + b_n \to +\infty$.

3°. Dacă $a_n \to a$, $b_n \to -\infty$, atunci $a_n + b_n \to -\infty$.

4°. Dacă $a_n \to -\infty$, $b_n \to -\infty$, atunci $a_n + b_n \to -\infty$.

În cazul în care $a_n \to +\infty$ și $b_n \to -\infty$, despre șirul $(a_n + b_n)$ nu se poate afirma nimic. *Operația* $+\infty - \infty$ *e lipsită de sens.*

Teorema 2. Dacă (a_n) și (b_n) sînt două șiruri convergente, atunci șirul produs $(a_n \cdot b_n)$ este convergent și

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n.$$

În cazul cînd unul sau ambele șiruri au limita infinită, avem:

1°. Dacă $a_n \to +\infty$ și $b_n \to +\infty$, atunci $a_n \cdot b_n \to +\infty$.

2°. Dacă $a_n \to -\infty$ și $b_n \to +\infty$, atunci $a_n \cdot b_n \to -\infty$.

3°. Dacă $a_n \to -\infty$ și $b_n \to -\infty$, atunci $a_n \cdot b_n \to +\infty$.

4°. Dacă $a_n \to a$ și $b_n \to +\infty$, atunci $a_n \cdot b_n \to (\operatorname{sign} a)(+\infty)$.

5°. Dacă $a_n \to a$ și $b_n \to -\infty$, atunci $a_n \cdot b_n \to (\operatorname{sign} a)(-\infty)$.

Dacă $a_n \to 0$ și $b_n \to +\infty$ (sau $-\infty$), nu putem afirma nimic despre șirul produs $a_n \cdot b_n$. *Operația* $0 \cdot \infty$ *este fără sens.*

Teorema 3. Dacă (a_n) și (b_n) sînt două șiruri convergente și $b_n \neq 0$ pentru orice n, iar $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$, atunci șirul cît $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ este de asemenea convergent și

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}.$$

Teorema 3 rămîne adevărată și în cazul limitelor infinite, astfel:

1°. Dacă $a_n \to +\infty$ sau $a_n \to -\infty$, atunci $\frac{1}{a_n} \to 0$.

2°. Dacă $a_n \to a$ și $b_n \to +\infty$ sau $b_n \to -\infty$, atunci $\frac{a_n}{b_n} \to 0$.

3°. Dacă $a_n \to a$ și $b_n \to 0$, atunci $\left|\frac{a_n}{b_n}\right| \to +\infty$.

Dacă șirurile (a_n) și (b_n) au amîndouă limite infinite, despre șirul cît $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ nu putem afirma nimic. Formele:

$$\frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{-\infty}{\infty}, \quad \frac{-\infty}{-\infty}; \quad \frac{\infty}{-\infty}$$ *sînt lipsite de sens.*

Teorema 4. Dacă $a_n \to a (a_n > 0,\ a > 0)$ și $b_n \to b$, atunci $a_n^{b_n}$ este convergent către a^b, adică:

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = (\lim_{n\to\infty} a_n)^{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}.$$

Teorema 4 rămîne adevărată și în cazul limitelor infinite, astfel:

1°. Dacă $a_n \to +\infty$, $b_n \to +\infty$, atunci $a_n^{b_n} \to +\infty$.

2°. Dacă $a_n \to a > 1$, $b_n \to +\infty$, atunci $a_n^{b_n} \to +\infty$.

3°. Dacă $a_n \to a$, $0 \leqslant a < 1$ și $b_n \to +\infty$, atunci $a_n^{b_n} \to 0$.

4°. Dacă $a_n \to +\infty$, $b_n \to -\infty$, atunci $a_n^{b_n} \to 0$.

5°. Dacă $a_n \to a$, unde $a \in (0,1)$, $b_n \to -\infty$, atunci $a_n^{b_n} \to +\infty$.

6°. Dacă $a_n \to a > 1$, $b_n \to -\infty$, atunci $a_n^{b_n} \to 0$.

7°. Dacă $a_n \to +\infty$, $b_n \to b > 0$, atunci $a_n^{b_n} \to \infty$.

8°. Dacă $a_n \to +\infty$, $b_n \to b < 0$, atunci $a_n^{b_n} \to 0$.

Operațiile 1^∞, $1^{-\infty}$, ∞^0, 0^0 *sînt forme fără sens.*

Şiruri care au ca limită numărul e.

Avem următoarele rezultate:

1°. Dacă $x_n \to \infty$, atunci $\left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} \to e$.

2°. Dacă $x_n \to -\infty$, atunci $\left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} \to e$.

3°. Dacă $x_n \to 0$, $x_n > 0$, atunci $(1 + x_n)^{\frac{1}{x_n}} \to e$.

4°. Dacă $x_n \to 0$, $x_n < 0$, atunci $(1 + x_n)^{\frac{1}{x_n}} \to e$, dacă $x_n \neq 0$ şi $\lim\limits_{x \to \infty} x_n = 0$.

Teorema lui Stolz-Cesaro

Fie $\{a_n\}_{n \in N}$ şi $\{b_n\}_{n \in N}$ două şiruri. Dacă şirul $\{b_n\}_{n \in N}$ este strict monoton şi nemărginit şi $\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} \to l$, unde l este finit sau infinit, atunci $\frac{a_n}{b_n} \to l$.

Alte rezultate folosite în rezolvarea exerciţiilor:

1°. Dacă $a_n \to l$ (finit), atunci $\sin a_n \to \sin l$.

2°. Dacă $a_n \to l$ (finit), atunci $\cos a_n \to \cos l$.

3°. Dacă $a_n \to 0$, $a_n \neq 0$ pentru orice $n \in N$, atunci $\frac{\sin a_n}{a_n} \to 1$.

4°. Dacă considerăm şirul dat de termenul general:

$$a_n = \frac{A_0 n^p + A_1 n^{p-1} + \dots + A_{p-1} n + A_p}{B_0 n^q + B_1 n^{q-1} + \dots + B_{q-1} n + B_q}$$

unde $p, q \in (0, +\infty)$, $A_0, B_0 \neq 0$ şi $B_0 n^q + B_1 n^{q-1} + \dots + B_q \neq 0$ limita acestui şir este:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \begin{cases} \frac{A_0}{B_0} \text{ dacă } p = q; \\ +\infty \text{ sau } -\infty \left(\text{după cum } \frac{A_0}{B_0} > 0 \text{ sau } \frac{A_0}{B_0} < 0\right) \text{ dacă } p > q; \\ 0 \text{ dacă } p < q. \end{cases}$$

5° Pentru orice $a, b \in [0, +\infty)$ și $p \in N$ avem:

$$a - b = (\sqrt[p]{a} - \sqrt[p]{b})\,(\sqrt[p]{a^{p-1}} + \sqrt[p]{a^{p-2}b} + \ldots + \sqrt[p]{b^{p-1}}).$$

Dacă p este număr natural impar, identitatea are loc oricare ar fi $a, b \in R$.

6° Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ există, atunci vom nota valoarea acestei limite cu $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$.

Tabloul operațiilor fără sens

Pentru adunare: $\infty - \infty$.

Pentru înmulțire: $0 \cdot \infty$ și $0 \cdot (-\infty)$.

Pentru împărțire: $\frac{a}{0}\left(\text{sau } \frac{0}{0}\right), \frac{\infty}{\infty}, \frac{\infty}{-\infty}, \frac{-\infty}{\infty}, \frac{-\infty}{-\infty}$.

Pentru puteri: 1^∞, 0^0, ∞^0.

Definiție. Un șir $\{a_n\}_{n\in N}$ se numește șir fundamental sau șir Cauchy, dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un număr $N(\varepsilon)$, astfel încît oricare ar fi $m \geqslant N(\varepsilon)$ și $n \geqslant N(\varepsilon)$ să avem

$$|a_m - a_n| < \varepsilon.$$

Criteriul lui Cauchy. Un șir $\{a_n\}_{n\in N}$ este convergent dacă și numai dacă este șir fundamental.

PROBLEME

1.1. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty}[(\sqrt{2})^n + (\sqrt{3})^n + (\sqrt{5})^n + (\sqrt{7})^n].$$

1.2. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{5n^2-3n}+2}{4n+1}.$$

1.3. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{3n^2+5n+4}{n+1}\right)^{\frac{2n+4}{3n}}\right].$$

1.4. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{2n^2+5n+4}{3n^2+2}\right)^{\frac{-8n}{3n+1}}\right].$$

1.5. Să se calculeze:

$$L = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+2}{3n+5}\right)^n.$$

1.6. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+\sqrt{n}+1}{n+\sqrt[3]{n}+2}\right)^n.$$

1.7. Să se calculeze:

$$L = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3n+5}{4n^2+8n+2}\right)^n.$$

1.8. Să se calculeze:

$$L = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\cdot\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{3n+1}\right].$$

1.9. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n^k},$$

unde $k \in R$.

1.10. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{an+b}{an+c}\right)^{n^k}$$

unde $a, b, c \in R$, $a \neq 0$ și $k \in N$.

1.11. Să se calculeze:

$$L = \lim_{n\to\infty} 3^n \cdot \sin\frac{\pi}{3^n}.$$

1.12. Să se calculeze:

$$L = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^{\frac{1}{2}}+1}{n^{\frac{1}{4}}+3} - \frac{n^{\frac{1}{5}}+1}{n^{\frac{1}{10}}+1}\right).$$

1.13. Dacă $a > 0$ să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty} a^n.$$

1.14. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2a^n+b^n}{3a^n+4b^n},$$

știind că $a > 0$, $b > 0$.

(*L. Pîrșan*, Concurs elevi, 1974)

1.15. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty}(a^n - b^n)$$

știind că $a, b \in N$.

1.16. Să se calculeze:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{A \cdot a^n + B \cdot b^n + C \cdot c^n}{A_1 \cdot a^n + B_1 \cdot b^n + C_1 \cdot c^n}$$

ştiind că $A, B, C, A_1, B_1, C_1, a, b, c \in (0, +\infty)$.

1.17. Să se calculeze:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^3 - 1}{\left(3 + \frac{1}{n}\right)^2 - 9}.$$

1.18. Să se calculeze:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{(1^3 + 2^3 + \ldots + n^3)n}{(n+2)^5}.$$

1.19. Să se calculeze:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{an^3 + n^2 + 3}{bn^3 + n + 6},$$

ştiind că $a, b \in R$.

1.20. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} (1^2 + 2^2 + \ldots + k^2)}{n^4}.$$

1.21. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 + \ldots + n(n+3)}{C_{n+3}^n}.$$

1.22. Să se calculeze:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{1^2 + 2^2 + \ldots + n^2}{2n^3 + n + 5}.$$

1.23. Să se calculeze:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{1^k + 2^k + \dots + n^k}{n^m},$$

știind că $k, m \in N$.

1.24. Să se calculeze:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^k - 1},$$

știind că $k \in N$.

1.25. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{5^n}.$$

1.26. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty} (3^n - n^4).$$

1.27. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n + \dots + n^n}.$$

1.28. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{n!}.$$

1.29. Se consideră șirul $\{a_n\}_{n\in N}$ dat de termenul general

$$a_n = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k}.$$

Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

1.30. Să se calculeze:

$$L = \lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n+2} + \sqrt{n+3}).$$

1.31. Se consideră șirul dat de termenul general:

$$a_n = \sqrt{n^4 + n^2 + 1} - \sqrt{n^4 - n^2 + 1}$$

Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

1.32. Să se calculeze limitele șirurilor $\{a_n\}_{n\in N}$; $\{b_n\}_{n\in N}$; $\{c_n\}_{n\in N}$ date respectiv de termenii generali:

$$a_n = \sqrt{n^2 + 4n + 5} - \sqrt{n^2 - 4n + 20},$$

$$b_n = \sqrt{n^2 + 4n + 20} - \sqrt{n^2 - 4n + 5},$$

$$c_n = \sqrt{n^2 + 5n - 4\sqrt{n} + 8} - \sqrt{n^2 - 3n + 2\sqrt{n} + 5}.$$

(*C. Ionescu-Țiu*, G.M.B., 1974)

1.33. Să se afle limitele șirurilor date respectiv de termenii generali:

$$a_n = \sqrt{n + 2\sqrt{n+1}} - \sqrt{n + 4\sqrt{n+1}},$$

$$b_n = \sqrt{n + 11 + 8\sqrt{n+5}} - \sqrt{n + 4 + 2\sqrt{n+5}},$$

$$c_n = \sqrt{n + \sqrt{n^2 - 1}} - \sqrt{n - \sqrt{n^2 - 1}}.$$

(*C. Ionescu-Țiu*, G.M.B., 1974)

1.34. Să se calculeze limita șirului dat de termenul general:

$$a_n = \left(\frac{\lambda n + \sqrt{4n^2 + 3n + 1}}{\sqrt{n^2 + 3n + 4}}\right)^{\frac{n}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}}$$

unde $\lambda \in R$.

(*M. Haivas*, R.M.T., 255, 1972)

1.35. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[p]{n}\left(\sqrt{n^p + 1} - \sqrt{n+1}\right)$$

unde $p \in N$.

1.36. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty} n^k\left(\sqrt{\frac{n+2}{n+5}}-1\right)$$

unde $k \in N$.

1.37. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt[3]{n^2+n+1}-an)$$

unde $a \in R$.

1.38. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt[5]{n+1}-\sqrt[5]{2n+1}).$$

1.39. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt[k]{n^k+n^{k-1}+\ldots+1}-n)$$

unde $k \in N$, $k \geqslant 2$.

1.40. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[k]{n+\sqrt[k]{n+\sqrt[k]{n}}}-\sqrt[k]{n}\right)$$

unde $k \in N$, $k \geqslant 2$.

1.41. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[k]{n+\sqrt[k]{n^{k-1}+\sqrt[k]{n}}}-\sqrt[k]{n}\right)$$

unde $k \in N$, $k \geqslant 2$.

1.42. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt[p]{a_0n^p+a_1n^{p-1}+\ldots+a_p}-\sqrt[q]{b_0n^q+b_1n^{q-1}+\ldots+b_q})$$

știind că $a_0, a_1, \ldots, a_p, b_0, b_1, \ldots, b_q \in (0, +\infty)$ și $p, q \in N$, $p, q \geqslant 2$.

1.43. Să se calculeze:

$$L = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[5]{n^{\frac{5}{4}} + n + 1} - \sqrt[5]{n^{\frac{5}{4}} - n + 1}\right).$$

1.44. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty} n^k\left(\sqrt[3]{\frac{n+1}{n+2}} - \sqrt{\frac{n+3}{n+4}}\right)$$

unde $k \in R$.

1.45. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty} n^k\left(\sqrt[4]{n+a} - \sqrt[4]{n+b}\right),$$

ştiind că $a, b \in (0, +\infty)$ iar $k \in R$.

1.46. Se consideră șirul $\{a_n\}_{n\in N}$ dat de termenul general:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{kn}\right)\left(1 + \frac{2}{kn}\right)\dots\left(1 + \frac{kn}{kn}\right)$$

unde k este un număr natural dat.

Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} \text{ și } \lim_{n\to\infty} a_n.$$

(*L. Pîrşan*, G.M.B., 1974)

1.47. Se dă șirul cu termenul general:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)\left(1 + \frac{2}{2n}\right)\dots\left(1 + \frac{2n}{2n}\right).$$

1°. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$.

2°. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

1.48. Să se arate că:

$$\sum_{s=2}^{\infty}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^s} = 1. \qquad (n, s \in N).$$

(Matematika v skole, 1968)

1.49. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{(1\cdot 3)^2}+\frac{2}{(3\cdot 5)^2}+\ldots+\frac{n}{[(2n-1)(2n+1)]^2}\right].$$

1.50. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{3k^2+3k+1}{k^3(k+1)^3}.$$

1.51. Să se calculeze:

$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=0}^{n}(k+1)(k+2)\ldots(k+p)}{n^{p+1}}$$

unde $p \in N$.

1.52. Să se calculeze limita șirului dat de termenul general:

$$A_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k\cdot a_{k+1}}$$

unde $a_k = a_1 + (k-1)r$ pentru orice $k \in \{2, 3, \ldots$ $\ldots, n+1\}$ iar $a_1, r \in (0, +\infty)$.

1.53. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{p=0}^{n-1}\frac{p!}{(p+k)!}$$

unde $k \in N, k \geqslant 2$.

1.54. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1.\ 3.\ 5.\ \ldots\ (2k-1)}{2.\ 4.\ 6.\ \ldots\ (2k+2)}.$$

1.55. Să se calculeze limita șirului cu termenul general:

$$a_n=\frac{[(n^2+1)(n^2-n+1)(n^2-2n+1)]^n}{(n^2+n)^{3n}}.$$

(*L. Mănescu*, G.M.B., 7893, 1966)

1.56. Să se calculeze limita şirului cu termenul general

$$a_n = \prod_{i=1}^{p} \left(\frac{n^2 + a_i n + b_i}{n^2 + \alpha_i n + \beta_i}\right)^n$$

unde $n \in N$, a_i, α_i, b_i, $\beta_i \in R$ şi $p \in N$.

(*L. Pîrşan*, G.M.B., 9150, 1968)

1.57. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1 + \sin \frac{\pi}{n}}{1 + \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}}\right)^n.$$

(*M.I. Focşeneanu*, G.M.B., 7570, 1966)

1.58. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{\sqrt[n]{n^{2n+1}}}{n!}\right)^{\frac{n!}{e^n}}.$$

(R.M.T., 1453, 1973)

1.59. Să se calculeze:

$$L = \lim_{n\to\infty} (n^2 + 5n + 6)^{\frac{1}{n^2 + 6n + 7}}.$$

1.60. Să se calculeze:

1°. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$.

2°. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2 + 4n + 7}$.

1.61. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

1.62. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n^2]{a_1^n + a_2^n + \ldots + a_k^n},$$

ştiind că $a_1, a_2, \ldots, a_k \in N$.

1.63. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^k + a_1 n^{k-1} + a_2 n^{k-2} + \ldots + a_k}$$

unde $a_1, a_2, \ldots, a_k \in (0, +\infty)$ şi $k \in N$.

1.64. 1°. Să se arate că dacă $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $a \in \bar{R}$, atunci

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = a.$$

2°. Este adevărat şi reciproc: dacă

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = a \text{ atunci } \lim_{n\to\infty} a_n = a?$$

1.65. 1°. Fie $\{a_n\}_{n\in N}$ un şir de numere strict pozitive. Să se arate că dacă

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \text{ atunci } \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \ldots a_n} = a.$$

2°. Este adevărată şi reciproca: dacă

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \ldots a_n} = a$ şi $a_n > 0$, $(\forall) n \in N$, atunci

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a?$$

1.66. 1°. Fie $\{a_n\}_{n\in N}$ un şir de numere strict pozitive. Să se arate că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = a.$$

2°. Reciproca este adevărată?

1.67. Să se demonstreze că dacă $\{a_n\}_{n\in N}$ este un şir strict monoton, nemărginit şi

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l,\ l\in R,\ \text{atunci}\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{a_n}=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{l}{l-1}\ \text{dacă}\ l\neq 1\\ +\infty\ \text{dacă}\ l=1\ \text{şi}\ \{a_n\}_{n\in N}\ \text{este strict crescător}\\ -\infty\ \text{dacă}\ l=1\ \text{şi}\ \{a_n\}_{n\in N}\ \text{este strict descrescător.}\end{cases}$$

1.68. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(1+\frac{2}{1+\sqrt{2}}+\frac{3}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\right.$$
$$\left.+\frac{n}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{n}}\right).$$

(*M. Mogoşanu*, G.M.B., 1974)

1.69. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}k}{\sqrt[n]{n!\,(n+1)^n}}.$$

(R.M.T. 1311, 1973)

1.70. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{C_n^1\cdot C_n^2\ldots C_n^n}.$$

(R.M.T., 951, 1971)

1.71. Dacă $(a_n)_{n\in N}$ este un şir convergent de numere reale pozitive, să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_1}{n}+\frac{a_1+\sqrt{a_1a_2}}{2n}+\frac{a_1+\sqrt{a_1a_2}+\sqrt[3]{a_1a_2a_3}}{3n}+\right.$$
$$\left.+\ldots+\frac{a_1+\sqrt{a_1a_2}+\ldots+\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}}{n^2}\right).$$

(*M. Vlada*, G.M.B., 13662, 1973)

1.72. Se consideră șirurile date de termenii generali:

$$S_n^{(0)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}; \quad S_n^{(1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k}; \quad S_n^{(2)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{2^k}; \ \ldots; \ S_n^{(m)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^m}{2^k}.$$

Vom nota cu:

$$S_0 = \lim_{n\to\infty} S_n^{(0)}; \quad S_1 = \lim_{n\to\infty} S_n^{(1)}; \quad S_2 = \lim_{n\to\infty} S_n^{(2)}; \ldots; \ S_m = \lim_{n\to\infty} S_n^{(m)}.$$

Să se arate că:

$S_0 = 1$; $S_1 = 2$ și $S_m = 2 + \sum_{k=1}^{m-1} C_m^k S_{m-k}$ pentru $m \in N$ și $m \geqslant 2$.

1.73. Se consideră șirurile date de termenii generali:

$$T_n^{(0)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a^k}; \quad T_n^{(1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{a^k}; \quad T_n^{(2)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{a^k}; \ \ldots; \ T_n^{(m)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^m}{a^k}$$

unde $a \in (1, +\infty)$.

Vom nota cu

$$T_0 = \lim_{n\to\infty} T_n^{(0)}; \quad T_1 = \lim_{n\to\infty} T_n^{(1)}; \quad T_2 = \lim_{n\to\infty} T_n^{(2)}; \ldots; \ T_m = \lim_{n\to\infty} T_n^{(m)}.$$

Să se arate că:

$$T_0 = \frac{1}{a-1}; \quad T_1 = \frac{a}{(a-1)^2}; \quad T_m = \frac{a}{(a-1)^2} + \frac{1}{a-1} \sum_{k=1}^{m-1} C_m^k T_{m-k}$$

pentru $m \in N$ și $m \geqslant 2$.

1.74. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{4k^2-3k+1}{2^k}.$$

1.75. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2^3}+\frac{4}{2^4}+\ldots+\frac{n}{2^n}\right),$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{a^3}+\frac{4}{a^4}+\ldots+\frac{n}{a^n}\right), \text{ unde } |a|>1.$$

1.76. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{2^k}; \qquad \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{2^k}.$$

1.77. Să se arate că

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2\cdot 3^{k-1}}=\frac{9}{8}.$$

1.78. Să se calculeze:

1°. $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2^2}\cos\frac{2\pi}{3}+\ldots+\frac{1}{2^n}\cos\frac{n\pi}{3}\right).$$

2°. $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2^2}\sin\frac{2\pi}{3}+\ldots+\frac{1}{2^n}\sin\frac{n\pi}{3}\right).$$

1.79. Se dă șirul cu termenul general:

$$u_n=\frac{n^3+7n^2+12n+2}{(n+3)!} \quad \text{unde } n\in N.$$

Se cere:

1°. Să se determine $a, b, c, d \in R$, astfel încît:

$$u_n=\frac{a}{n!}+\frac{b}{(n+1)!}+\frac{c}{(n+2)!}+\frac{d}{(n+3)!}$$

oricare ar fi $n\in N$.

2°. Să se calculeze $s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$, punînd rezultatul sub forma cea mai simplă.

3°. Să se arate că șirul cu termenul general s_n este convergent și să i se afle limita.

(*I. Gligor*, R.M.T., 1964)

1.80. Să se calculeze limita:

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n-k}\left(a+\frac{i}{n}\right)^p\right]\right\}$$

știind că $n \in N$, $k \in N$, $p \in N$, $a \in R$.

(R.M.T., 444, 1972)

1.81. Să se calculeze:

1°. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sqrt[n]{\ln n}$.

2°. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt[n]{n^2+k}}$.

(Gazeta de matematică, Lisabona, 1960)

1.82. Fie $\{x_n\}_{n\in N}$ și $\{y_n\}_{n\in N}$ două șiruri numerice arbitrare pentru care este îndeplinită relația:

$$|x_n - y_n| \leqslant \varepsilon_n \cdot |y_n| \quad (n \in N)$$

în care $\{\varepsilon_n\}_{n\in N}$ este un șir de numere pozitive convergent către zero.

Să se arate că dacă unul din șiruri este convergent, atunci și celălalt șir este convergent și are aceeași limită.

(Caiet de informare matematică 2/1973)

1.83. Să se calculeze limita șirului $\{u_n\}_{n\in N}$, ai cărui termeni verifică relația:

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(u_0\sqrt{1+u_{n-1}} - \sqrt{1-u_0^2}\cdot\sqrt{1-u_{n-1}}\right)$$

pentru $n \geqslant 1$ unde $u_0 \in [0, 1]$.

(*Fl. Vornicescu*, G.M.B., 1974)

1.84. Să se calculeze limita șirului dat de termenul general:

$$a_n = \sin^2 \pi \sqrt{n^2 + n}.$$

1.85. Să se afle termenul general al șirului dat de relația de recurență:

$$u_n = \frac{1}{12} u_{n-1} + \frac{1}{2} u_{n-2}$$

pentru $n \in N - \{1\}$, unde $u_0 = 1$ și $u_1 = \frac{1}{2}$.

Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

1.86. Să se afle termenul general al șirului dat de relația de recurență:

$$u_n = u_{n-1} + 4u_{n-2} - 4u_{n-3}$$

cu condițiile inițiale

$$u_0 = 3, \quad u_1 = 1, \quad u_2 = 9.$$

(G.M.B., 13407, 1973)

1.87. Se dau șirurile $\{a_n\}_{n\in N}$, $\{a'_n\}_{n\in N}$ definite respectiv de:

$$a_1 = b - 2a; \quad a_n = b - 2a_{n-1} \text{ pentru } n \geqslant 2$$

$$a'_1 = \frac{b-a}{2}; \quad a'_n = \frac{b - a'_{n-1}}{2} \text{ pentru } n \geqslant 2.$$

Să se scrie a_n și a'_n în funcție de a, b și n și să se calculeze limitele acestor șiruri.

(*N. Păun*, G.M.B., 11719, 1972)

1.88. Se dă șirul $\{a_n\}_{n\in N}$ definit astfel:

$$a_0 > 0; \quad a_n = \sqrt{a_{n-1}} + k, \quad (\forall) n \in N$$

iar $k > 0$. Să se arate că șirul este convergent și să se calculeze limita șirului.

(*I. Drăghicescu*, Concurs elevi, 1973)

1.89. Se dă $a_1 = ka,\ a,\ k \in (0, +\infty)$

$$a_2 = \frac{1}{3}\left(\frac{a^3}{a_1^2} + 2a_1\right);\quad a_3 = \frac{1}{3}\left(\frac{a^3}{a_2^2} + 2a_2\right);\ \ldots$$

$$\ldots;\ a_n = \frac{1}{3}\left(\frac{a^3}{a_{n-1}^2} + 2a_{n-1}\right);$$

1°. Pentru ce valori ale lui k putem avea $a_m = a,\ m \in N$?

2°. Pentru ce valori ale lui k avem $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$?

(*C. Ionescu-Țiu*, G.M.B., 13311, 1973)

1.90. Să se calculeze în funcție de x_1, a, b și n termenul general și apoi limita șirului $\{x_n\}_{n\in N}$ dat prin relația de recurență

$$x_n = a \cdot x_{n-1} + b,\ \text{unde}\ \ a \in R - \{0, 1\},\ \ b \in R.$$

1.91. Șirurile de numere reale $\{a_n\}_{n\in N}$ și $\{b_n\}_{n\in N}$ satisfac relațiile

$$1 < a_1 < b_1,\ a_n = \frac{b_{n-1}}{a_{n-1}};\quad b_n = \frac{b_{n-1} - 1}{a_{n-1} - 1},\quad (n \geqslant 2).$$

Pentru ce valori ale numerelor a_1 și b_1 aceste șiruri sînt convergente?

(Matematika v skole, 1969)

1.92. Să se arate că șirul $\{a_n\}_{n\in N}$, în care $a_1 = \sqrt[3]{6}$ și $a_n = \sqrt[3]{6 + a_{n-1}}$ pentru $n \geqslant 2$, este convergent.

1.93. Fie șirul $\{a_n\}_{n\in N}$, cu termenul general

$$a_n = a + n + 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{k^4 + k^2 + 1}{k^4 + k},\quad a \in R.$$

1°. Să se arate că acest șir este convergent.

2°. Să se găsească termenul de la care avem $|a_n - a| \leqslant 0{,}01$.

(*I. Popescu*, G.M.B., 13589, 1973)

1.94. Să se arate că șirurile $\{a_n\}_{n\in N}$ cu $a_{n+1} = \frac{1}{k}(b + a_n^2)$ și $a_1 = r$, unde $0 \leqslant b \leqslant \frac{k^2}{4}$ și $k > 0$, au aceeași limită pentru un b dat și orice $r \in \left[0, \frac{k + \sqrt{k^2 - 4b}}{2}\right]$.

(*Gh. Belcin*, G.M.B., 13346, 1973)

1.95. Fie șirul $\{a_n\}_{n\in N\cup\{0\}}$ cu $a_n = \sqrt{\alpha a_{n-1} + \beta}$, unde $\alpha, \beta, a_0 > 0$ și $a_0^2 - \alpha a_0 - \beta < 0$.

Să se arate că șirul dat este convergent și să se calculeze limita sa.

(*D. M. Bătinețu*, G.M.B., 9108, 1968)

1.96. Să se găsească termenul general al șirurilor definite astfel:

1°. $a_n = a_{n-1} \cos x + \cos (n-1)x$, $(\forall) n \geqslant 2$ și $a_1 = 1$.

2°. $a_n = 2a_{n-1} \cos x - a_{n-2}$, $(\forall) n \geqslant 3$ și $a_1 = 1$, $a_2 = 2 \cos x$.

(Matematika v skole, 1968)

1.97. Se consideră șirul $\{u_n\}_{n\in N}$ definit astfel:

$$u_1 = 3, \quad u_2 = 10,$$

iar pentru $n \geqslant 1$ avem relația de recurență

$$u_{n+2} - 7u_{n+1} + 12u_n = 6n + 1.$$

1°. Să se calculeze termenul general u_n al șirului.

2°. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

1.98. Fie un șir convergent $\{\alpha_n\}_{n\in N}$ și sumele $S_k = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k$, unde $k \in \{1, 2, \ldots\}$. Să se demonstreze că pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există un număr $N(\varepsilon)$, astfel încît pentru oricare ar fi $n \geqslant N(\varepsilon)$ să avem dubla inegalitate:

$$S_N + (n - N) \lim_{n\to\infty} \alpha_n - n \cdot \varepsilon < S_n <$$
$$< S_N + (n - N) \lim_{n\to\infty} \alpha_n + n \cdot \varepsilon.$$

(*M. Vlada*, G.M.B., 13598, 1973)

1.99. Fie $\{x_n\}_{n \in N \cup \{0\}}$ un şir dat de termenul general

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \text{ unde } x_0 > 0 \text{ şi } a > 0.$$

1°. Să se arate că şirul este monoton şi mărginit.

2°. Să se calculeze termenul general al şirului în funcţie de x_0 şi a.

3°. Să se calculeze limita şirului.

1.100. Se consideră şirul $\{x_i\}_{i \in N \cup \{0\}}$ definit prin:

$$x_0 = 1 \text{ şi } x_i = \frac{1}{n}\left[(n-1)x_{i-1} + \frac{a}{x_{i-1}^{n-1}}\right]$$

pentru $n \in N$ unde $a \in (0, 1)$.

Să se arate că şirul $\{x_i\}_{i \in N \cup \{0\}}$ este convergent şi are limita $\sqrt[n]{a}$.

SOLUȚII

1.1. Avem:

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{2})^n + (\sqrt{3})^n + (\sqrt{5})^n + (\sqrt{7})^n = \infty + \infty + \\ + \infty + \infty = + \infty.$$

1.2. Avem:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{5n^2 - 3n} + 2}{4n + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(\sqrt{5 - \frac{3}{n}} + \frac{2}{n}\right)}{n\left(4 + \frac{1}{n}\right)} = \frac{\sqrt{5}}{4}.$$

1.3. Avem:

$$\lim_{n\to\infty} \left[\left(\frac{3n^2 + 5n + 4}{n + 1}\right)^{\frac{2n+4}{3n}}\right] = \infty^{\frac{2}{3}} = \infty.$$

1.4. Avem:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n^2 + 5n + 4}{3n^2 + 2}\right)^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{-8n}{3n+1}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{-8}{3}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{8}{3}} = \sqrt[3]{\frac{3^8}{2^8}}.$$

1.5. Avem:

$$L = \lim_{n\to\infty} \left\{\left[\left(1 + \frac{-3}{3n + 5}\right)^{\frac{3n+5}{-3}}\right]^{\frac{-3n}{3n+5}}\right\} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{-3n}{3n+5}} = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

1.6. Avem:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+\sqrt{n}+1}{n+\sqrt[3]{n}+2}\right)^n =$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left[\left(1+\frac{\sqrt{n}-\sqrt[3]{n}-1}{n+\sqrt[3]{n}+2}\right)^{\frac{n+\sqrt[3]{n}+2}{\sqrt{n}-\sqrt[3]{n}-1}}\right]^{\frac{n(\sqrt{n}-\sqrt[3]{n}-1)}{n+\sqrt[3]{n}+2}}\right\} =$$

$$= e^{\infty} = \infty.$$

1.7. Avem succesiv:

$$L=\lim_{n\to\infty}\left\{\left[\left(1+\frac{3n+5}{4n^2+8n+2}\right)^{\frac{4n^2+8n+2}{3n+5}}\right]^{\frac{(3n+5)n}{4n^2+8n+2}}\right\}=e^{\frac{3}{4}}.$$

1.8. Avem:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]=e.$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{3n+1}=\lim_{n\to\infty}\left\{\left[\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\right]^{\frac{3n+1}{2n}}\right\}=e^{\frac{3}{2}}.$$

Deci limita din enunț este

$$L=e^1\cdot e^{\frac{3}{2}}=e^{\frac{5}{2}}.$$

1.9. Avem:

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\left[\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}}\right]^{\frac{n^k}{\sqrt{n}}}\right\}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^k}{\sqrt{n}}}=$$

$$=\begin{cases} e^0=1 \text{ pentru } k<\frac{1}{2}\\ e \quad\quad \text{ pentru } k=\frac{1}{2}\\ e^{\infty}=\infty \text{ pentru } k>\frac{1}{2}.\end{cases}$$

1.10. Dacă $b = c$, atunci șirul este $1, 1, \ldots, 1, \ldots$ și are limita 1.

Presupunem că $b \neq c$ și în acest caz termenul general A_n al șirului se scrie:

$$A_n = \left(\frac{an+b}{an+c}\right)^{n^k} = \left[\left(1 + \frac{b-c}{an+c}\right)^{\frac{an+c}{b-c}}\right]^{\frac{b-c}{an+c}\cdot n^k}.$$

Deci:

$$\lim_{n\to\infty} A_n = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(b-c)n^k}{an+c}}.$$

Rezultă că:

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \begin{cases} e^{\frac{b-c}{a}} & \text{pentru } k = 1 \\ +\infty & \text{pentru } k > 1 \text{ și } \dfrac{b-c}{a} > 0 \\ 0 & \text{pentru } k > 1 \text{ și } \dfrac{b-c}{a} < 0. \end{cases}$$

1.11. Avem:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin \pi \cdot 3^{-n}}{\dfrac{\pi}{3^n}} \cdot \pi = \pi.$$

1.12. Avem:

$$\frac{n^{\frac{1}{2}}+1}{n^{\frac{1}{4}}+3} - \frac{n^{\frac{1}{5}}+1}{n^{\frac{1}{10}}+1} =$$

$$= \frac{n^{\frac{3}{5}} + n^{\frac{1}{10}} + n^{\frac{1}{2}} + 1 - n^{\frac{9}{20}} - n^{\frac{1}{4}} - 3n^{\frac{1}{5}} - 3}{(n^{\frac{1}{4}}+3)(n^{\frac{1}{10}}+1)}.$$

Deoarece $\frac{3}{5} > \frac{7}{20}$ rezultă că: $L = \infty$.

1.13. Avem: $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$ dacă $a \in (0, 1)$; $\lim_{n\to\infty} a^n = 1$ dacă $a = 1$ și $\lim_{n\to\infty} a^n = +\infty$ dacă $a \in (1, +\infty)$.

1.14. Avem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2a^n + b^n}{3a^n + 4b^n} = \begin{cases} \frac{2}{3} & \text{dacă } a > b \\ \frac{3}{7} & \text{dacă } a = b \\ \frac{1}{4} & \text{dacă } a < b. \end{cases}$$

1.15. Dacă $a = b$, atunci limita este zero. Dacă $a \neq b$ avem

$$\lim_{n\to\infty} (a^n - b^n) = \begin{cases} +\infty & \text{dacă } a = \max(a, b) \\ -\infty & \text{dacă } b = \max(a, b). \end{cases}$$

1.16. Avem:

$$L = \begin{cases} \frac{A}{A_1} & \text{dacă } a = \max(a, b, c) \\ \frac{B}{B_1} & \text{dacă } b = \max(a, b, c) \\ \frac{C}{C_1} & \text{dacă } c = \max(a, b, c) \\ \frac{A + B}{A_1 + B_1} & \text{dacă } a = b > c \\ \frac{B + C}{B_1 + C_1} & \text{dacă } b = c > a \\ \frac{A + C}{A_1 + C_1} & \text{dacă } a = c > b \\ \frac{A + B + C}{A_1 + B_1 + C_1} & \text{dacă } a = b = c. \end{cases}$$

1.17. Avem:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^3-1=\frac{(n+1)^3-n^3}{n^3}=\frac{3n^2+3n+1}{n^3}.$$

$$\left(3+\frac{1}{n}\right)^2-9=\frac{(3n+1)^2-9n^2}{n^2}=\frac{6n+1}{n^2}.$$

Rezultă:

$$L=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2+3n+1}{n^3}\cdot\frac{n^2}{6n+1}\right)=\frac{1}{2}.$$

1.18. Avem:

$$1^3+2^3+\ldots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Deci:

$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3(n+1)^2}{4(n+2)^5}=\frac{1}{4}.$$

1.19. Dacă $a=b=0$, atunci $L=+\infty$.

Dacă $a\in R$ și $b\neq 0$, atunci $L=\frac{a}{b}$.

Dacă $a\in R$ și $b=0$, atunci $L=a(+\infty)$.

1.20. Avem:

$$\sum_{k=1}^{n}(1^2+2^2+\ldots+k^2)=\sum_{k=1}^{n}\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}=$$

$$=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}(2k^3+3k^2+k)=\frac{1}{6}\left[2\cdot\frac{n^2(n+1)^2}{4}+\right.$$

$$\left.+3\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}\right]=$$

$$=\frac{n^2(n+1)^2+n(n+1)(2n+1)+n(n+1)}{12}=$$

$$=\frac{n(n+1)(n^2+3n+2)}{12};$$

deci:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}(1^2+2^2+\ldots+k^2)}{n^4}=\frac{1}{12}.$$

1.21. Deoarece:

$$1\cdot4+2\cdot5+3\cdot6+\ldots+n(n+3)=\sum_{k=1}^{n}k(k+3)=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}k^2+3\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)\,(2n+1)}{6}+3\,\frac{n(n+1)}{2}=$$

$$=\frac{n(n+1)\,(2n+1+9)}{6}=\frac{n(n+1)\,(n+5)}{3};$$

iar

$$C_{n+3}^{n}=C_{n+3}^{3}=\frac{(n+3)\,(n+2)\,(n+1)}{6}, \quad \text{rezultă că}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot4+2\cdot5+\ldots+n(n+3)}{C_{n+3}^{n}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)\,(n+5)}{3}\cdot\frac{6}{(n+3)\,(n+2)\,(n+1)}=2.$$

1.22. Deoarece: $1^2+2^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)\,(2n+1)}{6}$;

rezultă

$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)\,(2n+1)}{6(2n^3+n+5)}=\frac{1}{6}.$$

1.23. Conform teoremei lui Stolz-Cesaro avem:

$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^k}{(n+1)^m-n^m}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^k}{m\cdot n^{m-1}+C_m^2 n^{m-2}+\ldots}$$

de unde avem:

$$L = \begin{cases} \dfrac{1}{m} \text{ pentru } k = m - 1 \\ \infty \text{ pentru } k > m - 1 \\ 0 \text{ pentru } k < m - 1. \end{cases}$$

1.24. Avem:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^k - 1 = \frac{(n+1)^k - n^k}{n^k} = \frac{k \cdot n^{k-1} + \ldots + 1}{n^k}.$$

Deci:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^k}{k \cdot n^{k-1} + \ldots + 1} = +\infty.$$

1.25. Există inegalitățile:

$$0 < \frac{n}{5^n} = \frac{n}{(1+4)^n} = \frac{n}{1 + 4n + \dfrac{n(n-1)}{2} \cdot 16 + \ldots} <$$

$$< \frac{n}{8n(n-1)}.$$

Pentru $n \geqslant 2$ avem deci:

$$0 < \frac{n}{5^n} < \frac{1}{8(n-1)}.$$

De unde, trecînd la limită în inegalități, avem:

$$0 \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{n}{5^n} \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{1}{8(n-1)} = 0.$$

Deci $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{5^n} = 0.$

1.26. Avem: $3^n - n^4 = 3^n\left(1 - \dfrac{n^4}{3^n}\right).$

Însă $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^4}{3^n} = 0.$

Într-adevăr:

$$0 < \frac{n^4}{3^n} = \frac{n^4}{(1+2)^n} =$$

$$= \frac{n^4}{1 + C_n^1 \cdot 2 + C_n^2 \cdot 4 + C_n^3 \cdot 8 + C_n^4 \cdot 16 + C_n^5 \cdot 32 + \ldots} <$$

$$< \frac{n^4}{\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)32}{5!}}, \text{ pentru } n \geqslant 5.$$

Dar:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5!\; n^4}{32n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)} = 0.$$

Deci

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^4}{3^n} = 0.$$

Rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} (3^n - n^4) = +\infty$.

1.27. Deoarece:

$$\sqrt[n]{2^n + 3^n + \ldots + n^n} > n \to +\infty$$

rezultă:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n + \ldots + n^n} = +\infty.$$

1.28. Deoarece $n^n > n!\, n$ pentru orice $n \in N - \{1,2\}$, rezultă: $\dfrac{n^n}{n!} > n$ și cum $\lim\limits_{n\to\infty} n = +\infty$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^n}{n!} = +\infty$.

1.29. Avem:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) +$$

$$+ \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \ldots + \frac{1}{16}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} +\right.$$

$$\left. + \frac{1}{2^{n-1}+2} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right).$$

Însă

$$a_n > \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \dots +$$

$$+ \underbrace{\left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} + \dots + \frac{1}{2^n}\right)}_{2^{n-1}\ \text{termeni}} = \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2}}_{n\ \text{termeni}} = \frac{n}{2}.$$

Însă $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2} = \infty$. Rezultă că și $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

1.30. Avem:

$$L = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n+2}\right) +$$

$$+ \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+3} - \sqrt{n+2}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{-1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}} +$$

$$+ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n+2}} = 0.$$

1.31. Termenul general al șirului se mai poate scrie:

$$a_n = \frac{(n^4 + n^2 + 1) - (n^4 - n^2 + 1)}{\sqrt{n^4 + n^2 + 1} + \sqrt{n^4 - n^2 + 1}}.$$

Sau

$$a_n = \frac{2n^2}{n^2\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4}}\right)}.$$

Rezultă:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1.$$

1.32. Avem:

$$a_n = \frac{(n^2+4n+5)-(n^2-4n+20)}{\sqrt{n^2+4n+5}+\sqrt{n^2-4n+20}} =$$

$$= \frac{8n-15}{n\left(\sqrt{1+\frac{4}{n}+\frac{5}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{4}{n}+\frac{20}{n^2}}\right)}.$$

Deci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 4.$

În mod analog avem:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 4; \ \lim_{n\to\infty} c_n = 4.$$

1.33. Avem pe rînd:

$$a_n = \frac{-2\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2\sqrt{n+1}}+\sqrt{n+4\sqrt{n+1}}}, \text{ deci}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -1.$$

$$b_n = \frac{7+6\sqrt{n+5}}{\sqrt{n+11+8\sqrt{n+5}}+\sqrt{n+4+2\sqrt{n+5}}};$$

deci $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 3.$

$$c_n = \frac{2\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n+\sqrt{n^2-1}}+\sqrt{n-\sqrt{n^2-1}}}, \text{ deci}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} c_n = +\infty.$

1.34. Dacă $\lambda \neq -1$ atunci

$$\lim_{n\to\infty} a_n = (\lambda+2)^{\infty} = \begin{cases} 0 \text{ pentru } \lambda \in [-2, -1) \\ \infty \text{ pentru } \lambda \in (-1, +\infty). \end{cases}$$

Dacă $\lambda = -1$ avem:

$$a_n = \left(\frac{\sqrt{4n^2+3n+1}-n}{\sqrt{n^2+3n+4}}\right)^{\frac{n}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}}.$$

Deci

$$\lim_{n\to\infty} a_n = e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{4n^2+3n+1}-n-\sqrt{n^2+3n+4}}{\sqrt{n^2+3n+4}} \cdot \frac{n}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}}.$$

Însă:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{4n^2+3n+1}-(n+\sqrt{n^2+3n+4})}{\sqrt{n^2+3n+4}} \cdot \frac{n}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n[(2n^2-3)^2-4n^2(n^2+3n+4)]}{(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})\sqrt{n^2+3n+4}(\sqrt{4n^2+3n+1}+n+\sqrt{n^2+3n+4})(2n^2-3+2n\sqrt{n^2+3n+4})} = 0.$$

Deci dacă $\lambda = -1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = e^0 = 1.$

1.35. Dacă $p = 1$, obținem șirul constant $0, 0, 0, \dots$ $\dots, 0. \dots$ cu limita 0.

Pentru $p > 1$ avem:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{5}} \cdot n^{\frac{p}{2}} \left(\sqrt{1+\frac{1}{n^p}} - \sqrt{\frac{1}{n^{p-1}}+\frac{1}{n^p}}\right) = +\infty.$$

1.36. Avem succesiv:

$$n^k\left(\sqrt{\frac{n+2}{n+5}}-1\right) = \frac{n^k(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+5})}{\sqrt{n+5}} =$$

$$= \frac{n^k[(n+2)-(n+5)]}{\sqrt{n+5}(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+5})} =$$

$$= \frac{-3n^k}{n\sqrt{1+\frac{5}{n}}\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1+\frac{5}{n}}\right)}.$$

Rezultă:

$$\lim_{n\to\infty} n^k\left(\sqrt{\frac{n+2}{n+5}}-1\right)=\begin{cases}-\frac{3}{2} & \text{pentru } k=1\\ -\infty & \text{pentru } k>1.\end{cases}$$

1.37. Dacă $a \leqslant 0$, atunci limita este egală cu $+\infty$. Dacă $a > 0$, atunci avem următoarea scriere pentru termenul general:

$$n^{\frac{2}{3}}\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}-a\cdot n^{\frac{1}{3}}\right)\to +\infty(1-a\cdot\infty)=-\infty.$$

1.38. Avem:

$$\sqrt[5]{n+1}-\sqrt[5]{2n+1}=$$

$$=\frac{(n+1)-(2n+1)}{\sqrt[5]{(n+1)^4}+\sqrt[5]{(n+1)^3(2n+1)}+\ldots+\sqrt[5]{(2n+1)^4}}.$$

Rezultă:

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt[5]{n+1}-\sqrt[5]{2n+1})=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-n}{n^{\frac{4}{5}}\left[\sqrt[5]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^4}+\ldots+\sqrt[5]{\left(2+\frac{1}{n}\right)^4}\right]}=-\infty.$$

1.39. Termenul general al șirului din enunț se mai poate pune sub forma:

$$\sqrt[k]{n^k+n^{k-1}+\ldots+1}-n=$$

$$=\frac{n^k+n^{k-1}+\ldots+1-n^k}{\sqrt[k]{(n^k+n^{k-1}+\ldots+1)^{k-1}}+n\sqrt[k]{(n^k+n^{k-1}+\ldots+1)^{k-2}}+}$$

$$\ldots\frac{n^k+n^{k-1}+\ldots+1-n^k}{+\ldots+n^{k-2}\sqrt[k]{n^k+n^{k-1}+\ldots+1}+n^{k-1}}.$$

Dăm factor comun pe n^{k-1} la numărător și la numitor și obținem trecînd la limită pentru $n\to\infty$:

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt[k]{n^k+n^{k-1}+\ldots+1}-n)=\frac{1}{k}.$$

1.40. Avem:

$$\sqrt[k]{n+\sqrt[k]{n+\sqrt[k]{n}}}-\sqrt[k]{n}=$$

$$=\frac{\sqrt[k]{n+\sqrt[k]{n}}}{\sqrt[k]{\left(n+\sqrt[k]{n+\sqrt[k]{n}}\right)^{k-1}}+\ldots+\sqrt[k]{n^{k-1}}}=$$

$$=\frac{n^{\frac{1}{k}}\sqrt[k]{1+\frac{\sqrt[k]{n}}{n}}}{n^{\frac{k-1}{k}}\left[\sqrt[k]{\left(1+\sqrt[k]{\frac{n}{n^k}+\frac{\sqrt[k]{n}}{n^k}}\right)^{k-1}}+\ldots+1\right]}.$$

Dacă $\frac{1}{k}=\frac{k-1}{k}$, atunci rezultă $k=2$ și invers.

Deci avem:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[k]{n+\sqrt[k]{n+\sqrt[k]{n}}}-\sqrt[k]{n}\right)=$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{2} & \text{pentru } k=2\\ 0 & \text{pentru } k\geqslant 3,\quad k\in N.\end{cases}$$

1.41. Avem:

$$\sqrt[k]{n+\sqrt[k]{n^{k-1}}+\sqrt[k]{n}}-\sqrt[k]{n}=$$

$$=\frac{\sqrt[k]{n^{k-1}+\sqrt[k]{n}}}{\sqrt[k]{\left(n+\sqrt[k]{n^{k-1}+\sqrt[k]{n}}\right)^{k-1}}+\ldots+\sqrt[k]{n^{k-1}}}.$$

Rezultă:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[k]{n+\sqrt[k]{n^{k-1}+\sqrt[k]{n}}}-\sqrt[k]{n}\right)=\frac{1}{k}.$$

1.42. Dacă $a_0, b_0\in(0,+\infty)-\{1\}$, atunci limita este egală cu $\infty\cdot(\sqrt[p]{a_0}-\sqrt[q]{b_0})$.

Dacă $a_0 = b_0 = 1$, atunci:

$$\sqrt[p]{n^p + a_1 n^{p-1} + \ldots + a_p} - \sqrt[q]{n^q + b_1 n^{q-1} + \ldots + b_q} =$$
$$= \left(\sqrt[p]{n^p + a_1 n^{p-1} + \ldots + a_p} - n\right) -$$
$$- \left(\sqrt[q]{n^q + b_1 n^{q-1} + \ldots + b_q} - n\right).$$

Însă:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[p]{n^p + a_1 n^{p-1} + \ldots + a_p} - n\right) = \frac{a_1}{p}$$

și

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[q]{n^q + b_1 n^{q-1} + \ldots + b_q} - n\right) = \frac{b_1}{q}.$$

Deci, în acest caz, limita este egală cu: $\frac{a_1}{p} - \frac{b_1}{q}$.

1.43. Avem:

$$\sqrt[5]{n^{\frac{5}{4}} + n + 1} - \sqrt[5]{n^{\frac{5}{4}} - n + 1} =$$
$$= \frac{2n}{\sqrt[5]{\left(n^{\frac{5}{4}} + n + 1\right)^4} + \sqrt[5]{\left(n^{\frac{5}{4}} + n + 1\right)^3 \left(n^{\frac{5}{4}} - n + 1\right)} + \ldots + \sqrt[5]{\left(n^{\frac{5}{4}} - n + 1\right)^4}} =$$
$$= \frac{2}{\sqrt[5]{\left(1 + \frac{1}{n^{\frac{1}{4}}} + \frac{1}{n^{\frac{5}{4}}}\right)^4} + \sqrt[5]{\left(1 + \frac{1}{n^{\frac{1}{4}}} + \frac{1}{n^{\frac{5}{4}}}\right)^3 \left(1 - \frac{1}{n^{\frac{1}{4}}} + \frac{1}{n^{\frac{5}{4}}}\right)} + \ldots + \sqrt[5]{\left(1 - \frac{1}{n^{\frac{1}{4}}} + \frac{1}{n^{\frac{5}{4}}}\right)^4}}.$$

Rezultă că: $L = \frac{2}{5}$.

1.44. Avem:

$$n^k\left(\sqrt[3]{\frac{n+1}{n+2}}-\sqrt{\frac{n+3}{n+4}}\right)=$$

$$=n^k\frac{\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^2-\left(\frac{n+3}{n+4}\right)^3}{\sqrt[6]{\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{10}}+\sqrt[6]{\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^8\left(\frac{n+3}{n+4}\right)^3}+\ldots+\sqrt[6]{\left(\frac{n+3}{n+4}\right)^{15}}}.$$

Însă:

$$n^k\cdot\frac{(n+1)^2\ (n+4)^3-(n+2)^2\ (n+3)^3}{(n+2)^2\ (n+4)^3}=$$

$$=\frac{n^k(14n^4-13n^4+a_0n^3+a_1n^2+a_2n+a_3)}{n^5+b_0n^4+b_1n^3+b_2n^2+b_3n+b_4}.$$

Rezultă că:

$$\lim_{n\to\infty} n^k\left(\sqrt[3]{\frac{n+1}{n+2}}-\sqrt{\frac{n+3}{n+4}}\right)=\begin{cases}\frac{1}{6} & \text{pentru } k=1\\ +\infty & \text{pentru } k>1\\ 0 & \text{pentru } k<1.\end{cases}$$

Coeficienții a_i, b_k, unde $i=0,1,2,3$, $k=0,1,2,3,4$, se pot determina, dar nu influențează rezultatul problemei.

1.45. Termenul general al șirului se mai poate scrie:

$$a_n=\frac{n^k[(n+a)-(n+b)]}{\sqrt[4]{(n+a)^3}+\sqrt[4]{(n+a)^2\,(n+b)}+\sqrt[4]{(n+a)\,(n+b)^2}+\sqrt[4]{(n+b)^3}}$$

sau

$$a_n=\frac{(a-b)n^k}{n^{\frac{3}{4}}\left[\sqrt[4]{\left(1+\frac{a}{n}\right)^3}+\sqrt[4]{\left(1+\frac{a}{n}\right)^2\left(1+\frac{b}{n}\right)}+\ldots\right.}$$

$$\ldots\frac{(a-b)n^k}{\left.+\sqrt[4]{\left(1+\frac{a}{n}\right)\left(1+\frac{b}{n}\right)^2}+\sqrt[4]{\left(1+\frac{b}{n}\right)^3}\right]}.$$

Deci:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} +\infty & \text{pentru } k > \frac{3}{4} \text{ și } a > b. \\ -\infty & \text{pentru } k > \frac{3}{4} \text{ și } a < b. \\ \frac{a-b}{4} & \text{pentru } k = \frac{3}{4}. \\ 0 & \text{pentru } k < \frac{3}{4}. \end{cases}$$

Evident, pentru $a = b$ limita șirului este zero.

1.46. Avem:

$$a_n = \frac{(kn+1)(kn+2)\dots(kn+kn)}{(kn)^{kn}} \text{ și}$$

$$a_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{kn+k}\right)\left(1 + \frac{2}{kn+k}\right)\dots\left(1 + \frac{kn+k}{kn+k}\right),$$

deci:

$$a_{n+1} = \frac{(kn+k+1)(kn+k+2)\dots(kn+k+kn+k)}{(kn+k)^{kn+k}}.$$

Prin urmare:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(kn+1)(kn+2)\dots(kn+k)\cdot(kn+k)^k}{(2kn+1)(2kn+2)\dots(2kn+2k)}\cdot\left(\frac{kn+k}{kn}\right)^{kn}$$

deci:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(\frac{k}{2k}\right)^{2k}\cdot e^k = \left(\frac{e}{4}\right)^k.$$

Deoarece:

$$a_n > \frac{1}{kn} + \frac{2}{kn} + \dots + \frac{kn}{kn} = \frac{kn(kn+1)}{2kn} = \to +\infty,$$

rezultă:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty.$$

1.47. 1°. Avem: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{16}{e^2}$.

2°. Avem: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

1.48. Avem evident:

$$\sum_{s=2}^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{s=2}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=2}^{k} \sum_{s=2}^{\infty} \frac{1}{n^s} =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \sum_{n=2}^{k} \left(\lim_{m\to\infty} \sum_{s=2}^{m} \frac{1}{n^s} \right) =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \sum_{n=2}^{k} \left(\lim_{m\to\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{n}\right)^{m-1}}{1 - \frac{1}{n}} \right) =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \sum_{n=2}^{k} \frac{1}{(n-1)n} = \lim_{k\to\infty} \left(1 - \frac{1}{k}\right) = 1.$$

1.49. Prin inducție matematică completă sau prin calcul direct se arată că:

$$\frac{1}{1^2 \cdot 3^2} + \frac{2}{3^2 \cdot 5^2} + \ldots + \frac{n}{(2n-1)^2 (2n+1)^2} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)^2}.$$

Într-adevăr, fie:

$$8a_n = \frac{3^2 - 1^2}{1^2 \cdot 3^2} + \frac{5^2 - 3^2}{3^2 \cdot 5^2} + \ldots + \frac{(2n+1)^2 - (2n-1)^2}{(2n-1)^2 \, (2n+1)^2}.$$

Deci

$$8a_n = 1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{5^2} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)^2} - \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

Rezultă:

$$a_n = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)^2} \quad \text{și} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{8}.$$

1.50. Avem:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{3k^2+3k+1}{k^3(k+1)^3} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(k+1)^3-k^3}{k^3(k+1)^3} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^3} = 1 - \frac{1}{(n+1)^3}.$$

Rezultă:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{3k^2+3k+1}{k^3(k+1)^3} = 1.$$

1.51. Se stabilește prin metoda inducției matematice complete că:

$$\sum_{k=0}^{n} (k+1)(k+2)\ldots(k+p) =$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+p+1)}{p+1}.$$

Deci:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+p+1)}{(p+1)n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}.$$

1.52. Avem:

$$A_n = \frac{1}{a_1 \cdot a_2} + \frac{1}{a_2 \cdot a_3} + \ldots + \frac{1}{a_n \cdot a_{n+1}};$$

sau:

$$rA_n = \frac{a_2 - a_1}{a_1 \cdot a_2} + \frac{a_3 - a_2}{a_2 \cdot a_3} + \ldots + \frac{a_{n+1} - a_n}{a_n \cdot a_{n+1}}$$

deci:

$$rA_n = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} + \ldots + \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}}.$$

Avem deci:

$$A_n = \frac{n}{a_1 \cdot (a_1 + nr)}.$$

Rezultă:

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \frac{1}{a_1 r}.$$

1.53. Avem identitatea ușor de verificat:

$$\sum_{p=0}^{n-1} \frac{p!}{(p+k)!} = \frac{1}{(k-1)}\left[\frac{1}{(k-1)!} - \frac{n!}{(n+k-1)!}\right].$$

Rezultă:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{p=0}^{n-1} \frac{p!}{(p+k)!} = \frac{1}{(k-1)\ (k-1)!},\quad \text{deoarece}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+k-1)!} = 0.$$

1.54. Avem:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1\cdot 3\cdot 5.\ldots(2k-1)}{2\cdot 4\cdot 6.\ldots(2k+2)} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1\cdot 3\cdot 5.\ldots(2k-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2k} - \frac{1\cdot 3\cdot 5.\ldots(2k+1)}{2\cdot 4\cdot 6.\ldots(2k+2)}\right] =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1\cdot 3\cdot 5.\ldots(2n+1)}{2\cdot 4\cdot 6.\ldots(2n+2)}.$$

Însă:

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5.\ldots(2n+1)}{2\cdot 4\cdot 6.\ldots(2n+2)} < \sqrt{\frac{1}{2n+3}} \quad \text{pentru } (\forall)\ n \in N.$$

Rezultă:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5.\ldots(2n+1)}{2\cdot 4\cdot 6.\ldots(2n+2)} = 0.$$

Deci limita șirului din enunț este $\frac{1}{2}$.

1.55. Avem:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{(n^2+1)\,(n^2-n+1)\,(n-1)^2}{n^3(n+1)^3}\right]^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)^n \cdot \lim_{n\to\infty}\left[\frac{n^2-n+1}{n(n+1)}\right]^n \cdot$$

$$\cdot \lim_{n\to\infty}\left[\frac{(n-1)^2}{(n+1)^2}\right]^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n \cdot \lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{1-2n}{n(n+1)}\right]^n \cdot$$

$$\cdot \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n+1}\right)^{2n} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right]^{\frac{1}{n}} \cdot$$

$$\cdot \lim_{n\to\infty}\left\{\left[1+\frac{1-2n}{n(n+1)}\right]^{\frac{n(n+1)}{1-2n}}\right\}^{\frac{1-2n}{n+1}} \cdot$$

$$\cdot \lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{2}{n+1}\right)^{-\frac{n+1}{2}}\right]^{-\frac{4n}{n+1}} = e^0 \cdot e^{-2} \cdot e^{-4} = e^{-6}.$$

1.56. Termenul general al șirului se mai poate scrie:

$$a_n = \prod_{i=1}^{p} A_{in} \quad \text{unde } A_{in} =$$

$$= \left\{\left[1+\frac{(a_i-\alpha_i)\,n+(b_i-\beta_i)}{n^2+\alpha_i n+\beta_i}\right]^{\frac{n^2+\alpha_i n+\beta_i}{(a_i-\alpha_i)\,n+(b_i-\beta_i)}}\right\}^{\frac{(a_i-\alpha_i)n^2+(b_i-\beta_i)n}{n^2+\alpha_i n+\beta_i}};$$

și deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} A_{in} = e^{a_i-\alpha_i}$, avem:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \prod_{i=1}^{p} e^{a_i-\alpha_i} = e^{\sum\limits_{i=1}^{p}(a_i-\alpha_i)}.$$

1.57. Avem:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\sin\frac{\pi}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\sin\frac{\pi}{n}\right)^{\frac{1}{\sin\frac{\pi}{n}}}\right]^{\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n}}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n}}} = e^{\pi}.$$

În mod analog se arată că:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}\right)^n = e^{\pi}.$$

De unde rezultă:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\sin\frac{\pi}{n}}{1+\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}\right)^n = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\sin\frac{\pi}{n}\right)^n}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}\right)^n} = \frac{e^{\pi}}{e^{\pi}} = 1.$$

1.58. Avem:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\sqrt[n]{n^{2n+1}}}{n!}\right)^{\frac{n!}{e^n}} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n^2}{n!}\sqrt[n]{n}\right)^{\frac{n!}{e^n}}.$$

Dar $\sqrt[n]{n}\to 1$ și $\frac{n^2}{n!}\to 0$ implică $\frac{n^2}{n!}\cdot\sqrt[n]{n}\to 0$, iar $\frac{n!}{e^n}\to\infty$. Calculul limitei conduce deci la cazul de excepție 1^{∞}. Însă se știe că $\lim\limits_{\substack{u\to 0\\ v\to\infty}}(1+u)^v = e^{\lim\limits_{\substack{u\to 0\\ v\to\infty}} uv}$.

În cazul nostru avem:

$u = \frac{n^2}{n!} \cdot \sqrt[n]{n}$ și $v = \frac{n!}{e^n}$, deci $uv = \frac{n^2}{e^n} \cdot \sqrt[n]{n}$. Atunci:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{e^n} \cdot \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{e^n} \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 0 \cdot 1 = 0.$$

Rezultă:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{\sqrt[n]{n^{2n+1}}}{n!}\right)^{\frac{n!}{e^n}} = e^0 = 1.$$

1.59. Avem succesiv:

$$L = \lim_{n\to\infty} \left[(n^2 + 5n + 6)^{\frac{1}{n}}\right]^{\frac{1}{n+6+\frac{7}{n}}} = 1^{\frac{1}{\infty+6+0}} = 1.$$

Să arătăm acum că:

$$\lim_{n\to\infty} (n^2 + 5n + 6)^{\frac{1}{n}} = 1.$$

Într-adevăr

$$\lim_{n\to\infty} (n^2 + 5n + 6)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left[n^2\left(1 + \frac{5}{n} + \frac{6}{n^2}\right)\right]^{\frac{1}{n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{n} \cdot \left(1 + \frac{5}{n} + \frac{6}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1.$$

1.60. 1°. Avem: $\sqrt[n]{n} = 1 + a_n$ unde $a_n \geq 0$, $(\forall) n \in N$. Vom demonstra că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Într-adevăr:

$$n = (1 + a_n)^n = 1 + na_n + \frac{n(n-1)}{2} a_n^2 + \ldots \geq$$

$$\geq \frac{n(n-1)}{2} a_n^2.$$

Deci pentru $n \in N$, $n \geq 2$ avem inegalitatea:

$$a_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}}.$$

Cum $(a_n)_{n \in N}$ este un șir de numere pozitive, rezultă că $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ și deci $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

2°. Avem: $\sqrt[n]{n^2+4n+7} = \sqrt[n]{n^2\left(1+\frac{4}{n}+\frac{7}{n^2}\right)} =$

$$= \sqrt[n]{n^2} \cdot \sqrt[n]{1+\frac{4}{n}+\frac{7}{n^2}} = \sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{1+\frac{4}{n}+\frac{7}{n^2}} \to 1.$$

Deci $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2+4n+7} = 1$.

1.61. Avem:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{1} = 1.$$

1.62. Fie $a = \max(a_1, a_2, \ldots, a_k)$, deci:

$$\sqrt[n^2]{a_1^n + a_2^n + \ldots + a_k^n} = \left[\left(a_1^n + a_2^n + \ldots + a_k^n\right)^{\frac{1}{n}}\right]^{\frac{1}{n}} =$$

$$= \left\{a\left[\left(\frac{a_1}{a}\right)^n + \left(\frac{a_2}{a}\right)^n + \ldots + \left(\frac{a_k}{a}\right)^n\right]^{\frac{1}{n}}\right\}^{\frac{1}{n}}.$$

Deoarece $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_i}{a}\right)^n = 0$ pentru $k-1$ indici i și pentru al k-lea indice avem $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_k}{a}\right)^n = 1$ obținem

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{a_1^n + a_2^n + \ldots + a_k^n} = (a \cdot 1^0)^0 = 1.$$

1.63. Termenul general al șirului se mai poate pune sub forma

$$\sqrt[n]{n^k + a_1 n^{k-1} + a_2 n^{k-2} + \dots + a_k} =$$
$$= \sqrt[n]{n^k} \cdot \sqrt[n]{1 + \frac{a_1}{n} + \frac{a_2}{n^2} + \dots + \frac{a_k}{n^k}}.$$

Ținînd seama că

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^k} = \lim_{n\to\infty} (\underbrace{\sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{n}. \dots \sqrt[n]{n}}_{k \text{ factori}}) = 1,$$

rezultă că limita din enunț este egală cu 1.

1.64. 1°. Notăm $\alpha_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ și $\beta_n = n$. Șirul $\{\beta_n\}_{n\in N}$ este strict crescător și nemărginit.

Avem $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\alpha_{n+1} - \alpha_n}{\beta_{n+1} - \beta_n} = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = a.$

Dar, conform teoremei Stolz-Cesaro,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_{n+1} - \alpha_n}{\beta_{n+1} - \beta_n} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

2°. Reciproc, proprietatea nu se mai păstrează.

Fie $a_n = (-1)^n$. Avem $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = 0.$

Dar șirul $\{a_n\}_{n\in N}$ nu are limită.

1.65. 1°. Se observă ușor că $a \geqslant 0$. Avem:

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \dots a_n} = e^{\ln \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \dots a_n}} = e^{\frac{\ln a_1 + \ln a_2 + \dots + \ln a_n}{n}}.$$

Deoarece din $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ și $a_n > 0$, $(\forall) n \in N$ rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} \ln a_n = \ln a$ și ținînd seama de problema (1.64), obținem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln a_1 + \ln a_2 + \dots + \ln a_n}{n} = \ln a.$$

Rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \ldots a_n} = e^{\ln a} = a$.

2°. Reciproca nu este adevărată. Într-adevăr, fie $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha \neq \beta$ și șirul $\{a_n\}_{n\in N}$: $\alpha, \beta, \alpha, \beta, \ldots, \alpha, \beta, \ldots$. Șirul $\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \ldots a_n} = b_n$ este în acest caz

$$\alpha, \sqrt{\alpha \cdot \beta}, \sqrt[3]{\alpha^2 \cdot \beta}, \sqrt[4]{\alpha^2 \cdot \beta^2}, \sqrt[5]{\alpha^3 \cdot \beta^2}, \sqrt[6]{\alpha^3 \cdot \beta^3}, \ldots$$

Avem în general

$$b_{2n-1} = \sqrt[2n-1]{\alpha^n \cdot \beta^{n-1}}, \quad b_{2n} = \sqrt[2n]{\alpha^n \cdot \beta^n}.$$

Rezultă $b_{2n-1} = \alpha^{\frac{n}{2n-1}} \cdot \beta^{\frac{n-1}{2n-1}} \to \alpha^{\frac{1}{2}} \cdot \beta^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\alpha \cdot \beta}$.

$$b_{2n} = \sqrt{\alpha\beta} \to \sqrt{\alpha\beta}.$$

Deci orice vecinătate a lui $\sqrt{\alpha\beta}$ conține toți termenii subșirului $\{b_{2n-1}\}$, exceptînd eventual un număr finit de termeni, și de asemenea conține toți termenii subșirului $\{b_{2n}\}$, exceptînd eventual un număr finit de termeni. Rezultă că orice vecinătate a lui $\sqrt{\alpha\beta}$ conține toți termenii șirului $\{b_n\}_{n\in N}$, exceptînd eventual un număr finit de termeni. Deci:

$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \ldots a_n} = \sqrt{\alpha\beta}$. În schimb șirul $\{a_n\}_{n\in N}$ nu are limită.

1.66. 1°. Avem:

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{a_1}{1} \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdot \ldots \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}}}.$$

Fie șirul $\{\alpha_n\}_{n\in N}$ definit astfel

$$\alpha_n = \begin{cases} a_1 & \text{dacă } n = 1 \\ \dfrac{a_n}{a_{n-1}} & \text{dacă } n \geqslant 2. \end{cases}$$

Ținînd seama de ipoteză, rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = a$. Conform problemei 1.65 avem: $\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\alpha_1 \cdot \alpha_2 \ldots \alpha_n}$ și

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n} = \lim_{n\to\infty} \alpha_n = a.$$

2°. Reciproca este falsă. Într-adevăr, fie $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha \neq \beta$ și șirul $\{a_n\}_{n \in N}$ definit astfel:

$$a_{2n-1} = \alpha^n \cdot \beta^{n-1},\ a_{2n} = \alpha^n \cdot \beta^n.$$

Cum $\sqrt[2n-1]{a_{2n-1}} \to (\alpha\beta)^{\frac{1}{2}}$ și $\sqrt[2n]{a_{2n}} \to (\alpha\beta)^{\frac{1}{2}}$, rezultă că

$$a_n \to \sqrt{\alpha\beta}.$$

În schimb șirul $\left\{\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right\}_{n \in N}$: $\beta, \alpha, \beta, \alpha, \ldots, \beta, \alpha, \ldots$ nu are limită.

1.67. Observăm că deoarece $a_n \to \infty$ sau $a_n \to -\infty$ după cum $\{a_n\}_{n \in N}$ este strict crescător, respectiv strict descrescător, există $m \in N$, astfel încît pentru $n \geqslant m$ să avem $a_n \neq 0$. Notăm $\alpha_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Cercetăm dacă pentru șirul $\left\{\dfrac{\alpha_n}{a_n}\right\}_{n \in N}$ sîntem în condițiile de aplicativitate ale teoremei Stolz-Cesaro.

Șirul $\{a_n\}_{n \in N}$ este din ipoteză strict monoton și nemărginit. Apoi pentru $n \geqslant m$ avem $a_n \neq 0$ și deci

$$\frac{\alpha_{n+1} - \alpha_n}{a_{n+1} - a_n} = \frac{a_{n+1}}{a_{n+1} - a_n} = \frac{\dfrac{a_{n+1}}{a_n}}{\dfrac{a_{n+1}}{a_n} - 1}.$$

Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = l$, $l \in R$ și $l \neq 1$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\alpha_{n+1} - \alpha_n}{a_{n+1} - a_n} = \dfrac{l}{l-1}$ și, conform teoremei lui Stolz-Cesaro:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{a_n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_{n+1} - \alpha_n}{a_{n+1} - a_n} = \frac{l}{l-1}.$$

Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ și $\{a_n\}_{n\in N}$ este strict crescător, atunci

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1 > 0 \text{ și } \frac{a_{n+1}}{a_n} - 1 \to 0 \text{ și deci } \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_{n+1} - \alpha_n}{a_{n+1} - a_n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{a_{n+1}}{a_n}}{\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1} = \infty.$$

Conform teoremei lui Stolz-Cesaro, în acest caz

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_{n+1} - \alpha_n}{a_{n+1} - a_n} = \infty.$$

Analog, dacă $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ și $\{a_n\}_{n\in N}$ este strict descrescător, atunci

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1 < 0 \text{ și } \frac{a_{n+1}}{a_n} - 1 \to 0 \text{ și deci } \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_{n+1} - \alpha_n}{a_{n+1} - a_n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{a_{n+1}}{a_n}}{\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1} = -\infty,$$

de unde $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{a_n} = -\infty.$

1.68. Fie șirurile date respectiv de $a_n = n$ și $b_n = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \ldots + \sqrt{n}$. Aplicînd pentru aceste două șiruri teorema Stolz-Cesaro, avem:

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \to 0 \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} =$$

$$= \frac{n}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \ldots + \sqrt{n}} \to 0.$$

Fie şirurile date respectiv de:

$$c_n = 1 + \frac{2}{1+\sqrt{2}} + \ldots + \frac{n}{1+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n}} \text{ şi } d_n = n.$$

Aplicînd pentru aceste două şiruri teorema lui Stolz-Cesaro, avem:

$$\frac{c_{n+1}-c_n}{d_{n+1}-d_n} = \frac{\dfrac{n+1}{1+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n+1}}}{1} \to 0 \Rightarrow \frac{c_n}{d_n} \to 0.$$

Deci

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(1 + \frac{2}{1+\sqrt{2}} + \frac{3}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \ldots + \right.$$
$$\left. + \frac{n}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{n}}\right) = 0.$$

1.69. Avem:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} k}{\sqrt[n]{n!(n+1)^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2} \cdot \frac{(n+1)}{n+1} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\dfrac{1}{e}} = \frac{e}{2}.$$

1.70. Fie $\{a_n\}_{n\in N}$ şirul dat de $a_n = C_n^1 C_n^2 \ldots C_n^n$. Deoarece $\{a_n\}_{n\in N}$ este un şir de numere pozitive şi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{C_{n+1}^1 \ldots C_{n+1}^n C_{n+1}^{n+1}}{C_n^1 \ldots C_n^{n-1} C_n^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n!} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} \cdot \frac{n^n}{n!} = e \cdot \infty$$

rezultă:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \infty, \text{ deci } \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{C_n^1 C_n^2 \ldots C_n^n} = \infty.$$

1.71. Fie $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Atunci șirul $(\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n})_{n\in N}$ va fi convergent tot către a și, ca urmare, șirul $\left(\frac{a_1+\sqrt{a_1a_2}+\ldots+\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}}{n}\right)_{n\in N}$ va avea limita a.

Rezultă:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_1}{n}+\frac{a_1+\sqrt{a_1a_2}}{2n}+\ldots+\right.$$

$$\left.+\frac{a_1+\sqrt{a_1a_2}+\ldots+\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}}{n^2}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_1+\frac{a_1+\sqrt{a_1a_2}}{2}+\ldots+\frac{\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}}{n}}{n}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

1.72. $S_0 = 1$ rezultă din: $S_0 = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}$.

Pentru a calcula pe S_1 folosim identitatea:

$$\frac{k+1}{2^k}=\frac{k}{2^{k-1}}-\frac{k}{2^k}+\frac{1}{2^k}$$

unde înlocuim pe rînd pe k cu valorile $1, 2, \ldots, n$ și, adunînd cele n egalități membru cu membru, obținem după reducerea termenilor asemenea:

$$\frac{n+1}{2^n}=1-S_n^{(1)}+S_n^{(0)}.$$

Trecînd la limită pentru $n\to\infty$ obținem

$$0=1-S_1+S_0,\ \text{deci}\ S_1=2.$$

Vom folosi acum, pentru a demonstra relația de recurență, identitatea:

$$\frac{(k+1)^m}{2^k} = \frac{k^m}{2^{k-1}} - \frac{k^m}{2^k} + \frac{C_m^1 k^{m-1}}{2^k} + \frac{C_m^2 k^{m-2}}{2^k} + \dots +$$
$$+ \frac{C_m^{m-1} k}{2^k} + \frac{C_m^m}{2^k}.$$

Înlocuind pe rînd în această identitate pe k cu valorile $1, 2, \dots, n$ și adunînd cele n egalități membru cu membru, obținem după reducerea termenilor asemenea:

$$\frac{(n+1)^m}{2^n} = 1 - S_n^{(m)} + C_m^1 \cdot S_n^{(m-1)} + C_m^2 \cdot S_n^{(m-2)} + \dots +$$
$$+ C_m^{m-1} \cdot S_n^{(1)} + C_m^m \cdot S_n^{(0)}.$$

Trecînd la limită pentru $n \to \infty$ și ținînd seama că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^m}{2^n} = 0,$$

obținem relația de recurență din enunț.

1.73. Se va aplica un raționament asemănător cu cel de la problema 1.72.

1.74. Avem:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{4k^2 - 3k + 1}{2^k} = 4S_2 - 3S_1 + S_0 =$$
$$= 4 \cdot 6 - 3 \cdot 2 + 1 = 19.$$

1.75. Vom calcula numai a doua limită din enunț, deoarece prima se obține în cazul particular $a = 2$.

Fie identitatea:

$$1 + 2x + \dots + nx^{n-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}; \ (x \neq 1),$$

care se mai poate scrie:

$$3x^3 + \dots + nx^n = \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(x-1)^2} - x - 2x^2.$$

Punînd $x = \frac{1}{a}$ şi ţinînd seama că $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{a^{n+2}} = 0$; $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{a^{n+1}} = 0$ (pentru $|a| > 1$), rezultă:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{a^3}+\frac{4}{a^4}+\ldots+\frac{n}{a^n}\right)=\frac{\frac{1}{a}}{\left(\frac{1}{a}-1\right)^2}-\frac{1}{a}-\frac{2}{a^2}=$$

$$=\frac{a}{(1-a)^2}-\frac{a+2}{a^2}=\frac{3a-2}{a^2(a-1)^2}.$$

Pentru $a = 2$ obţinem $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2^3}+\ldots+\frac{n}{2^n}\right)=$

$$=\frac{3\cdot 2-2}{2^2\cdot(2-1)^2}=1.$$

Se pot aplica şi rezultatele de la problema 1.73.

1.76. Ţinînd seama de problema 1.72 avem:

$$S_0=1;\ S_1=2 \text{ şi } S_m=2+\sum_{k=1}^{m-1}C_m^k S_{m-k} \text{ pentru } m\in N$$

$$\text{şi } m\geqslant 2.$$

Deci: $S_2=2+\sum_{k=1}^{1}C_2^k S_{2-k}=2+2\cdot S_1=2+2\cdot 2=6.$

$$S_3=2+\sum_{k=1}^{2}C_3^k S_{3-k}=2+C_3^1\cdot S_2+C_3^2 S_1=$$

$$=2+3\cdot 6+3\cdot 2=26.$$

Avem deci

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{2^k}=6 \text{ şi } \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{2^k}=26.$$

1.77. Considerăm identitatea:

$$1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}=\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(n-1)^2},$$

care este valabilă pentru orice $x \in R - \{1\}$ şi $n \in N$.

Punînd $x = \frac{1}{3}$ obținem:

$$1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} + \ldots + \frac{n}{3^{n-1}} = \frac{\frac{n}{3^{n+1}} - \frac{n+1}{3^n} + 1}{\left(\frac{1}{3} - 1\right)^2}.$$

Ținînd seama că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{3^n} = 0$, obținem:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2 \cdot 3^{k-1}} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{3^{k-1}} =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{3^{n+1}} - \frac{n+1}{3^n} + 1}{\frac{4}{9}} = \frac{9}{8}.$$

Se pot aplica și rezultatele de la problema 1.73.

1.78. Ținem seama că:

$$\sum_{k=1}^{n} a^k \cos kx = \frac{a^{n+2}\cos nx - a^{n+1}\cos (n+1)x + a\cos x - a^2}{a^2 - 2a\cos x + 1}$$

și

$$\sum_{k=1}^{n} a^k \sin kx = \frac{a^{n+2}\sin nx - a^{n+1}\sin (n+1)x + a\sin x}{a^2 - 2a\cos x + 1}.$$

Pentru $a = \frac{1}{2}$ și $x = \frac{\pi}{3}$ rezultă:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \cos \frac{k\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1}{2^n} \sin \frac{n\pi}{3}.$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \sin \frac{k\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1}{2^n} \cos \frac{n\pi}{3}.$$

Deoarece:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \cos \frac{k\pi}{3} - 0\right| \leqslant \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1}{2^n}$$

rezultă:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \cos \frac{k\pi}{3} = 0.$$

În mod asemănător avem:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \sin \frac{k\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

1.79. 1°. Avem:

$$u_n = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)+(n+2)(n+3)-4(n+3)+2}{(n+3)!} =$$

$$= \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{4}{(n+2)!} + \frac{3}{(n+3)!}, \text{ deci}$$

$$a = 1;\ b = 1;\ c = -4;\ d = 2.$$

2°. Avem:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)!} - 4\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+2)!} +$$

$$+ 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+3)!} = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{2!} - \frac{2}{3!} - \frac{1}{(n+1)!} -$$

$$- \frac{2}{(n+2)!} + \frac{2}{(n+3)!}.$$

3°. Rezultă că $\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{5}{3}$.

1.80. Vom ține seama că:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^p + 2^p + \ldots + n^p}{n^{p+1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1^p + 2^p + 3^p + \ldots + (n-k)^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}$$

și obținem:

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n-k}\left(a+\frac{i}{n}\right)^p\right]\right\}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n-k}{n}\cdot a^p+C_p^1\cdot a^{p-1}\cdot\frac{1+2+3+\ldots+(n-k)}{n^2}+\right.$$

$$+C_p^2\cdot a^{p-2}\frac{1^2+2^2+\ldots+(n-k)^2}{n^3}+\ldots+$$

$$\left.+\frac{1^p+2^p+\ldots+(n-k)^p}{n^{p+1}}\right]=\sum_{i=0}^{p}\frac{C_p^i\,a^{p-i}}{i+1}.$$

1.81. 1°. Avem $\ln n<n$, $(\forall)n\in N$. Deci și $\sqrt[n]{\ln n}<\sqrt[n]{n}$. Rezultă

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\ln n}\leqslant\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1.$$

De aici deducem că

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{\ln n}\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$ Și cum $a_n=\frac{1}{n}\sqrt[n]{\ln n}>0$, $(\forall)n\in N$, obținem

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{\ln n}=0.$$

2°. Pentru orice $k\in\{1,\ldots,n\}$ avem

$$\frac{1}{\sqrt[n]{n^2+n}}\leqslant\frac{1}{\sqrt[n]{n^2+k}}<\frac{1}{\sqrt[n]{n^2}}.$$

Făcînd aici $k=1$, $k=2$, ..., $k=n$ și însumînd membru cu membru, găsim

$$\frac{n}{\sqrt[n]{n^2+n}}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt[n]{n^2+k}}<\frac{n}{\sqrt[n]{n^2}};\text{ de unde:}$$

$$\frac{1}{\sqrt[n]{n^2+n}}\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt[n]{n^2+k}}<\frac{1}{\sqrt[n]{n^2}}.\qquad(1)$$



Ţinînd seama că $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, obţinem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1.$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2+n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{1+\frac{1}{n}}} = 1.$$

Ţinînd seama de acestea, şi trecînd la limită în inegalitatea (1), obţinem

$$1 \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2+k}} \leqslant 1.$$

Deci

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2+k}} = 1.$$

1.82. 1°. Presupunem mai întîi că $\{y_n\}_{n\in N}$ este un şir convergent:

$$\lim_{n\to\infty} y_n = y, \text{ finit.}$$

Prin urmare $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n - y_n| \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n |y_n| = 0 \cdot y = 0$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n - y_n) = 0$, şi cum $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$ rezultă imediat că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = y$.

2°. Fie acum $\{x_n\}_{n\in N}$ un şir convergent: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, finit.

Deoarece $\varepsilon_n \to 0$, există $n_0 \in N$, astfel încît pentru orice $n > n_0$ să avem:

$$\varepsilon_n < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{1-\varepsilon_n} < 2.$$

Însă pentru orice $n \in N$ avem:

$$|y_n| \leqslant |y_n - x_n| + |x_n| \leqslant \varepsilon_n \cdot |y_n| + |x_n|$$

și deci pentru $n > n_0$:

$$|y_n| \leqslant \frac{1}{1-\varepsilon_n} |x_n| \leqslant 2 |x_n|$$

de unde

$$|x_n - y_n| \leqslant \varepsilon_n |y_n| \leqslant 2 \varepsilon_n |x_n|$$

și demonstrația continuă ca în primul caz.

1.83. Deoarece $u_0 \in [0, 1]$ există $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ astfel ca $u_0 = \cos \alpha$

Rezultă: $\sqrt{1-u_0^2} = \sin \alpha$, $\sqrt{1+u_0} = \sqrt{2} \cos \frac{\alpha}{2}$;

$$\sqrt{1-u_0} = \sqrt{2} \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Prin inducție se arată că dacă:

$$u_{n-1} = \cos\left(\alpha + \frac{\alpha}{2} + \ldots + \frac{\alpha}{2^{n-1}}\right)$$

atunci:

$$\sqrt{1+u_{n-1}} = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2^2} + \ldots + \frac{\alpha}{2^n}\right);$$

$$\sqrt{1-u_{n-1}} = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2^2} + \ldots + \frac{\alpha}{2^n}\right).$$

Deoarece:

$$\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2^2} + \ldots + \frac{\alpha}{2^n} < \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2^2} + \ldots + \frac{\alpha}{2^n} + \ldots = \alpha \leqslant \frac{\pi}{2};$$

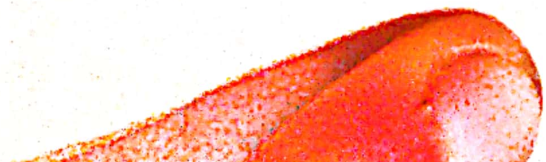
avem:

$$u_n = \cos\left(\alpha + \frac{\alpha}{2} + \ldots + \frac{\alpha}{2^{n-1}} + \frac{\alpha}{2^n}\right).$$

Rezultă:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \cos\left(\alpha + \frac{\alpha}{2} + \ldots + \frac{\alpha}{2^n}\right) = \cos 2\alpha =$$

$$= 2\cos^2\alpha - 1 = 2u_0^2 - 1.$$



1.84. Deoarece $\sin^2 a = \frac{1}{2}(1 - \cos 2a)$, vom considera șirul dat de termenul general:

$$b_n = \cos 2\pi\sqrt{n^2+n} = \cos 2\pi(\sqrt{n^2+n} - n)\cos 2\pi n -$$
$$- \sin 2\pi(\sqrt{n^2+n} - n)\sin 2\pi n.$$

Sau:

$$b_n = \cos 2\pi(\sqrt{n^2+n} - n).$$

Însă

$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n} - n) = \frac{1}{2}$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -1$ și cum

$$a_n = \frac{1}{2}(1 - b_n) \text{ rezultă că } \lim_{n\to\infty} a_n = 1.$$

1.85. Ecuația caracteristică atașată șirului este: $r^2 - \frac{1}{12}r - \frac{1}{2} = 0$ și are rădăcinile $r_1 = \frac{3}{4}$; $r_2 = -\frac{2}{3}$.

Deci u_n este dat de $u_n = a\left(\frac{3}{4}\right)^n + b\left(-\frac{2}{3}\right)^n$.

Ținînd seama de condițiile inițiale, rezultă sistemul: $a + b = 1$; $\frac{3}{4}a - \frac{2}{3}b = \frac{1}{2}$, care, rezolvat, ne dă:

$$a = \frac{14}{17};\ b = \frac{3}{17}, \text{ deci } u_n = \frac{14}{17}\left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{3}{17}\left(-\frac{2}{3}\right)^n.$$

Deoarece:

$$\left|\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right| < \left(\frac{3}{4}\right)^n \text{ rezultă } \lim_{n\to\infty} u_n = 0.$$

1.86. Astfel scriem ecuația caracteristică atașată relației de recurență

$$T^3 - T^2 - 4T + 4 = 0$$

și găsim soluțiile

$$T_1 = 1,\ T_2 = -2,\ T_3 = 2.$$

Rezultă:

$$u_n = \alpha_1 \cdot 1^n + \alpha_2 \cdot 2^n + \alpha_3 \cdot (-2)^n,$$

unde determinarea coeficienților $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ se face cu ajutorul condițiilor inițiale. Din egalitățile

$$u_0 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 3$$

$$u_1 = \alpha_1 + 2\alpha_2 - 2\alpha_3 = 1$$

$$u_2 = \alpha_1 + 4\alpha_2 + 4\alpha_3 = 9,$$

obținem: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$, și deci termenul general al șirului dat de relația de recurență din enunț este:

$$u_n = 1 + [1 + (-1)^n] \cdot 2^n.$$

1.87. Se calculează direct sau se demonstrează prin metoda inducției matematice complete că:

$$a_n = \frac{1 - (-2)^n}{3} \cdot b + (-2)^n a$$

$$a'_n = \frac{b[2^n - (-1)^n] + 3(-1)^n a}{3 \cdot 2^n}.$$

Limitele șirurilor sînt respectiv:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (-2)^n \left(-\frac{b}{3} + a\right) =$$

$$= \begin{cases} 0 \text{ pentru } b = 3a \\ \text{nu există pentru } b \neq 3a. \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} a'_n = \frac{b}{3}.$$

1.88. Se observă că $a_n > 0$, $(\forall) n \in N$. Deosebim două cazuri:

1°. Presupunem: $0 < \sqrt{a_0} < \frac{1 + \sqrt{1 + 4k}}{2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 0 < a_0 < \frac{1 + 2k + \sqrt{1 + 4k}}{2}.$$

Avem $a_0 - a_1 = a_0 - \sqrt{a_0} - k < 0 \Rightarrow a_1 > a_0$;

$$a_2 - a_1 = \sqrt{a_1} - \sqrt{a_0} > 0 \Rightarrow a_2 > a_1.$$

Presupunem prin inducție că:

$$0 < a_0 < a_1 < \ldots < a_{n-1} < a_n.$$

Trebuie să arătăm că: $a_{n+1} > a_n$. Dar

$$a_{n+1} - a_n = \sqrt{a_n} - \sqrt{a_{n-1}} > 0 \Rightarrow a_{n+1} > a_n.$$

Deci șirul în acest caz este strict crescător. Să arătăm că este mărginit:

$$0 < \sqrt{a_0} < \frac{1+\sqrt{1+4k}}{2} \Leftrightarrow 0 < a_0 < \frac{1+2k+\sqrt{1+4k}}{2};$$

$$a_1 = \sqrt{a_0} + k < \frac{1+\sqrt{1+4k}}{2} + k = \frac{1+2k+\sqrt{1+4k}}{2}.$$

Utilizînd metoda inducției matematice, se arată că

$$a_n < \frac{1+2k+\sqrt{1+4k}}{2}.$$

Deci în acest caz șirul este convergent și, trecînd la limită în relația de recurență, obținem

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1+2k+\sqrt{1+4k}}{2}.$$

2°. Considerăm: $\sqrt{a_0} \geqslant \dfrac{1+\sqrt{1+4k}}{2} \Leftrightarrow a_0 \geqslant$

$$\geqslant \frac{1+2k+\sqrt{1+4k}}{2}.$$

Atunci $a_0 - a_1 = a_0 - \sqrt{a_0} - k \geqslant 0 \Rightarrow a_0 \geqslant a_1 > 0$,

$$a_1 - a_2 = \sqrt{a_0} - \sqrt{a_1} \geqslant 0 \Rightarrow a_1 \geqslant a_2.$$

Presupunem că: $a_0 \geqslant a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_{n-1} \geqslant a_n$.

Deci $a_n - a_{n+1} = \sqrt{a_{n-1}} - \sqrt{a_n} \geqslant 0 \Rightarrow a_{n+1} \leqslant a_n$.

Rezultă că în acest caz șirul este descrescător și mărginit superior de a_0, deci șirul este convergent.

Trecem la limită în relația de recurență și obținem:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1+2k+\sqrt{1+4k}}{2}.$$

1.89. 1°. Observăm mai întîi că $a_n > 0$, oricare ar fi $n \in N$ și că pentru $k=1$, $a_n = a$.

Dacă $a_1 = ka \neq a$, atunci pentru $n \in N - \{1\}$ avem:

$$a_n - a = \frac{1}{3}\left(\frac{a^3}{a_{n-1}^2} + 2a_{n-1}\right) - a = \frac{1}{3a_{n-1}^2}(a^3 + 2a_{n-1}^3 -$$

$$- 3a \cdot a_{n-1}^2) = \frac{(a_{n-1}-a)^2}{3a_{n-1}^2}(2a_{n-1} + a) > 0.$$

Rezultă că numai pentru $k=1$ putem avea $a_m = a$, $m \in N$.

2°. Să arătăm acum că șirul $\{a_n\}_{n\in N}$, definit prin recurență în enunț, este convergent. Pentru $n \in N - \{1, 2\}$ avem:

$$a_n - a_{n-1} = \frac{1}{3}\left(\frac{a^3}{a_{n-1}^2} + 2a_{n-1} - 3a_{n-1}\right) = \frac{a^3 - a_{n-1}^3}{3a_{n-1}^2} \leqslant 0,$$

căci $a_{n-1} \geqslant a$. Înlăturînd din șir termenul $a_1 = ka$ (aceasta nu influențează limita șirului) și punînd $a_2 = \frac{1}{3}\left(\frac{a^3}{k^2a^2} + 2\,ka\right)$, rezultă:

$$a \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant a_{n-1} \leqslant \ldots \leqslant a_2 \ (\forall)k > 0, \qquad (1)$$

deci șirul este monoton descrescător și mărginit, adică convergent.

Fie $\lim_{n\to\infty} a_n = l$. Atunci, din (1) avem $l \geqslant a > 0$ deci $l \neq 0$.

Trecînd la limită în relația de recurență a șirului, obținem:

$$l = \frac{1}{3}\left(\frac{a^3}{l^2} + 2l\right) \text{ sau } 3l^3 = a^3 + 2l^3,$$

deci avem $\lim_{n\to\infty} a_n = l = a$ pentru orice $k > 0$.

1.90. Avem:

$$x_n = a \cdot x_{n-1} + b$$
$$x_{n-1} = a x_{n-2} + b.$$

Prin urmare:

$$x_n - x_{n-1} = a(x_{n-1} - x_{n-2}) = a^2(x_{n-2} - x_{n-3}) =$$
$$= \ldots = a^{n-2}(x_2 - x_1).$$

Din egalitățile de mai sus rezultă:

$$x_2 - x_1 = x_2 - x_1$$
$$x_3 - x_2 = a(x_2 - x_1)$$
$$\vdots$$
$$x_n - x_{n-1} = a^{n-2}(x_2 - x_1).$$

Adunînd acum membru cu membru aceste relații obținem:

$$x_n = x_1 + \frac{a^{n-1} - 1}{a - 1}[x_1(a - 1) + b] =$$
$$= a^{n-1}\left(x_1 + \frac{b}{a-1}\right) - \frac{b}{a-1}.$$

Limita șirului va fi:

1°. Dacă $b = x_1(1 - a)$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_1$.

2°. Dacă $|a| < 1$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{b}{1-a}$.

3°. Dacă $|a| > 1$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \pm\infty$.

1.91. Calculînd termenii: $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_6, b_6$, observăm că $a_1 = a_6$ și $b_1 = b_6$. Prin urmare șirurile date au forma:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_1 \ldots$$

și

$$b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_1 \ldots$$

Ele vor fi convergente dacă și numai dacă

$a_1 = a_2 = \dots = a_n$ și $b_1 = b_2 = \dots = b_n$. Fie $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a_1$

$$\text{și } \lim_{n\to\infty} b_n = b_1.$$

Din relațiile de recurență obținem:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} b_{n-1}}{\lim\limits_{n\to\infty} a_{n-1}} \text{ și } \lim_{n\to\infty} b_n = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} b_{n-1} - 1}{\lim\limits_{n\to\infty} a_{n-1} - 1},$$

de unde

$$a_1 = \frac{b_1}{a_1} \text{ și } b_1 = \frac{b_1 - 1}{a_1 - 1}.$$

Rezolvînd acest sistem și ținînd seama că $1 < a_1 < b_1$, găsim:

$$a_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ și } b_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}.$$

1.92. Șirul este strict crescător, adică $a_1 < a_2 < \dots < a_n < \dots$. Șirul este mărginit, adică pentru orice $n \in N$ avem $a_1 \leqslant a_n \leqslant 2$. Într-adevăr, rezultă prin metoda inducției matematice complete că $a_n \leqslant 2$, $(\forall) n \in N$. Șirul fiind monoton și mărginit, el este convergent. Fie $l = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Trecînd la limită în relația de recurență, obținem: $l = \sqrt[3]{6 + l} \Leftrightarrow l^3 - l - 6 = 0$ deci $l = 2$, care este limita șirului.

1.93. 1°. Vom aduce termenul general al șirului la o formă mai simplă:

$$\frac{k^4 + k^2 + 1}{k^4 + k} = 1 + \frac{k^2 - k + 1}{k^4 + k} = 1 + $$

$$+ \frac{k^2 - k + 1}{k(k+1)(k^2 - k + 1)} = 1 + \frac{1}{k(k+1)} =$$

$$= 1 + \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1},$$

deci

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k^4+k^2+1}{k^4+k}=\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=n+1-\frac{1}{n+1}\cdot$$

Rezultă că termenul general al șirului este:

$$a_n=a+\frac{1}{n+1}\cdot$$

Se observă că: $a_n-a_{n-1}=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}<0$, deci șirul este strict descrescător și mărginit superior de $a_1=$ $=a+\frac{1}{2}$. Rezultă că șirul $\{a_n\}_{n\in N}$ este convergent și $\lim_{n\to\infty} a_n=a$.

2°. Trebuie să avem $|a_n-a|\leqslant 0{,}01$ și, înlocuind cu valoarea lui a_n, găsim:

$$\frac{1}{n+1}\leqslant 0{,}01\Rightarrow n+1\geqslant 100\Rightarrow n\geqslant 99.$$

Deci începînd de la a_{99} avem $|a_n-a|\leqslant 0{,}01$.

1.94. Se observă că $a_n\geqslant 0$, $(\forall)n\in N$. Să studiem diferența a_2-a_1:

$a_2-a_1=\frac{1}{k}(r^2-kr+b)$. Deosebim două cazuri:

a). Fie $r\in\left[0,\frac{k-\sqrt{k^2-4b}}{2}\right]\cdot$ Atunci $a_1\leqslant a_2$.

Presupunem prin inducție că: $a_1\leqslant a_2\leqslant\ldots\leqslant a_{n-1}\leqslant a_n$. Trebuie să arătăm că $a_n\leqslant a_{n+1}$.

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{k}(a_n-a_{n-1})(a_n+a_{n-1})\geqslant 0\Rightarrow a_{n+1}\geqslant a_n,$$
$$(\forall)n\in N.$$

Deci șirul este crescător. Să arătăm că el este și mărginit:

$$a_1=r\leqslant\frac{k-\sqrt{k^2-4b}}{2}\cdot$$

Presupunem prin inducție că:

$$a_n \leqslant \frac{k - \sqrt{k^2 - 4b}}{2} \Leftrightarrow a_n^2 \leqslant \frac{k^2 - 2b - k\sqrt{k^2 - 4b}}{2}.$$

Atunci $$a_{n+1} = \frac{1}{k}(b + a_n^2) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{k}\left(b + \frac{k^2 - 2b - k\sqrt{k^2 - 4b}}{2}\right) = \frac{k - \sqrt{k^2 - 4b}}{2}.$$

Deci în acest caz șirul este convergent și, trecînd la limită în relația de recurență, găsim:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{k - \sqrt{k^2 - 4b}}{2}.$$

b). Fie $r \in \left[\frac{k - \sqrt{k^2 - 4b}}{2}, \frac{k + \sqrt{k^2 - 4b}}{2}\right]$. În acest caz, $a_n > 0$, $(\forall) n \in N$.
Rezultă $a_2 < a_1$. Presupunem că: $r = a_1 > a_2 > > \ldots > a_{n-1} > a_n$. Să arătăm că $a_n > a_{n+1}$. Dar $a_n - a_{n+1} = \frac{1}{k}(a_{n-1} - a_n)(a_{n-1} + a_n) > 0$. Deci șirul $\{a_n\}_{n\in N}$ în acest caz este strict descrescător și strict pozitiv, deci convergent, iar

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{k + \sqrt{k^2 - 4b}}{2}.$$

1.95. Șirul este strict crescător. Într-adevăr $a_n > 0$, $(\forall) n \in N$. Și atunci $a_1^2 - a_0^2 = \alpha a_0 + \beta - a_0^2 > > 0 \Rightarrow a_1 > a_0$; $a_2^2 - a_1^2 = \alpha(a_1 - a_0) > 0 \Rightarrow a_2 > a_1$.
Presupunem prin inducție: $0 < a_0 < a_1 < a_2 < < \ldots < a_n$. Să arătăm că $a_n < a_{n+1}$. Dar $a_{n+1}^2 - a_n^2 = = \alpha(a_n - a_{n-1}) > 0 \Rightarrow a_n < a_{n+1}$. Deci șirul este strict crescător.
Șirul $\{a_n\}_{n\in N}$ este mărginit superior de

$\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4\beta}}{2}$ adică $a_n < \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4\beta}}{2}$, $(\forall) n \in N$.

Într-adevăr, din relația $a_0^2 - \alpha a_0 - \beta < 0$ deducem

$$\frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 + 4\beta}}{2} < a_0 < \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4\beta}}{2},$$

$$a_1 = \sqrt{\alpha a_0 + \beta} < \sqrt{\alpha \cdot \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4\beta}}{2} + \beta} =$$

$$= \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4\beta}}{2} \text{ deci } a_1 < \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4\beta}}{2}.$$

Presupunem prin inducție: $a_k < \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4\beta}}{2}$, $(\forall) k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Atunci

$$a_{n+1} = \sqrt{\alpha a_n + \beta} < \sqrt{\alpha \cdot \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4\beta}}{2} + \beta} =$$

$$= \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4\beta}}{2}.$$

Deci șirul $\{a_n\}_{n \in N}$ este convergent.

Fie $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = l$. Trecînd la limită în relația $a_n^2 = \alpha a_{n-1} + \beta$, obținem:

$$l^2 - \alpha l - \beta = 0 \Rightarrow l_1 = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4\beta}}{2} \text{ și}$$

$$l_2 = \frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 + 4\beta}}{2}.$$

Dar $\lim\limits_{n \to \infty} a_n > 0$ iar $l_2 < 0$. Rezultă $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4\beta}}{2}$.

1.96. 1°. Avem $a_1 = 1$; $a_2 = \cos x + \cos x =$

$$= 2 \cos x = \frac{\sin 2x}{\sin x};$$

$$a_3 = a_2 \cos x + \cos 2x = \frac{\sin 2x}{\sin x} \cos x + \cos 2x =$$

$$= \frac{\sin 2x \cos x + \sin x \cos 2x}{\sin x} = \frac{\sin 3x}{\sin x}.$$

În continuare procedăm prin inducție completă. Presupunem

$$a_k = \frac{\sin kx}{\sin x}, \quad (\forall)k \in \{1, 2, \dots, n\}. \quad \text{Atunci}$$

$$a_{n+1} = a_n \cos x + \cos nx = \frac{\sin nx}{\sin x} \cos x + \cos nx =$$

$$= \frac{\sin (n+1)x}{\sin x}.$$

Rezultă că termenul general al șirului este

$$a_n = \frac{\sin nx}{\sin x}, \quad (\forall)n \in N.$$

2°. Avem $a_1 = 1 = \dfrac{\sin x}{\sin x}$; $a_2 = 2 \cos x = \dfrac{\sin 2x}{\sin x}$;

$$a_3 = 2a_2 \cos x - a_1 = \frac{2 \sin 2x \cos x}{\sin x} - 1 =$$

$$= \frac{\sin 2x \cos x + \sin x (2 \cos^2 x - 1)}{\sin x} = \frac{\sin 3x}{\sin x}.$$

Fie acum $a_k = \dfrac{\sin kx}{\sin x}$, $(\forall)k \in \{1, 2, \dots, n\}$. Rezultă

$$a_{n+1} = 2a_n \cos x - a_{n-1} = \frac{2 \sin nx \cos x}{\sin x} -$$

$$- \frac{\sin (n-1)x}{\sin x} = \frac{2 \sin nx \cos x}{\sin x} -$$

$$- \frac{\sin nx \cos x - \sin x \cos nx}{\sin x} =$$

$$= \frac{\sin nx \cos x + \sin x \cos nx}{\sin x} = \frac{\sin (n+1)x}{\sin x}.$$

Deci termenul general este $a_n = \dfrac{\sin nx}{\sin x}$.

1.97. 1° Să determinăm mai întîi termenul general u'_n care satisface relația de recurență:

$$u'_{n+2} - 7u'_{n+1} + 12u'_n = 0.$$

Luînd pe $u'_n = r^n$ și înlocuind în relația de recurență, obținem ecuația:

$$r^2 - 7r + 12 = 0.$$

Deoarece $r_1 = 3$; $r_2 = 4$, rezultă că $u'_n = a \cdot 3^n + b \cdot 4^n$.

Să determinăm acum termenul general de forma

$$u''_n = a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \ldots + a_k$$

care satisface relația:

$$u''_{n+2} - 7u''_{n+1} + 12u''_n = 6n + 1.$$

Se observă că $a_0 = a_1 = \ldots = a_{k-2} = 0$ și considerînd deci pe $u''_n = \alpha n + \beta$ rezultă:

$$[\alpha(n+2) + \beta] - 7[\alpha(n+1) + \beta] + 12(\alpha n + \beta) = 6n + 1.$$

Prin identificare avem: $\alpha = 1$; $\beta = 1$.

Deoarece termenul general u_n al șirului este de forma $u_n = u'_n + u''_n$, rezultă

$$u_n = a \cdot 3^n + b \cdot 4^n + n + 1.$$

Din condițiile inițiale rezultă $a = -1$; $b = 1$. Deci:

$$u_n = 4^n - 3^n + n + 1.$$

2°. $\lim\limits_{n\to\infty} (4^n - 3^n + n + 1) = \lim\limits_{n\to\infty} 4^n \left[1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{n}{4^n} + \frac{1}{4^n}\right] = +\infty.$

1.98. Dacă notăm $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = L$, inegalitatea de demonstrat devine:

$$|S_n - S_N - (n - N)L| < n \cdot \varepsilon.$$

Pentru $(\forall)n \geqslant N(\varepsilon)$ avem:

$$|S_n - S_N - (n - N)L| = |\alpha_{N+1} + \alpha_{N+2} + \ldots + \alpha_n - (n - N)L| = |(\alpha_{N+1} - L) + (\alpha_{N+2} - L) + \ldots + (\alpha_n - L)| \leqslant |\alpha_{N+1} - L| + |\alpha_{N+2} - L| + \ldots + |\alpha_n - L|.$$

Ținînd seama de convergența șirului $(\alpha_n)_{n\in N}$ avem: pentru $(\forall)\varepsilon > 0$, $\exists\ N(\varepsilon)$, astfel încît pentru $(\forall)n \geqslant N(\varepsilon)$ să fie satisfăcută relația $|\alpha_n - L| < \varepsilon$. Conchidem deci că:

$$|S_n - S_N - (n - N)L| \leqslant |\alpha_{N+1} - L| + |\alpha_{N+2} - L| + \ldots + |\alpha_n - L| < \varepsilon + \varepsilon + \ldots + \varepsilon = (n - N)\,\varepsilon < n \cdot \varepsilon,$$

adică

$$|S_n - S_N - (n - N)L| < n \cdot \varepsilon.$$

1.99. 1°. Se observă că dacă $x_0 > 0$, atunci $x_n > 0$, $(\forall)n \in N$. De asemenea

$$x_n - \sqrt{a} = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}}\right) - \sqrt{a} = \frac{(x_{n-1} - \sqrt{a})^2}{2x_{n-1}} \geqslant$$

$$\geqslant 0 \Rightarrow x_n \geqslant \sqrt{a}, \quad (\forall)n \in N.$$

De aici rezultă

$$\frac{x_{n+1} + \sqrt{a}}{x_n + \sqrt{a}} = \frac{\frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) + \sqrt{a}}{x_n + \sqrt{a}} = \frac{(x_n + \sqrt{a})^2}{2x_n(x_n + \sqrt{a})} =$$

$$= \frac{x_n + \sqrt{a}}{2x_n} < 1.$$

Deci

$$\frac{x_{n+1} + \sqrt{a}}{x_n + \sqrt{a}} < 1 \Rightarrow x_{n+1} \leqslant x_n, \quad (\forall)n \in N.$$

Deducem că șirul este descrescător, mărginit inferior de $\sqrt{a}$ și mărginit superior de x_0 sau x_1, după cum $x_0 \geqslant x_1$ sau $x_0 \leqslant x_1$.

2°. Se observă ușor că:

$$\frac{x_{k+1}-\sqrt{a}}{x_{k+1}+\sqrt{a}}=\left(\frac{x_k-\sqrt{a}}{x_k+\sqrt{a}}\right)^2.$$

Făcînd aici $k=0, 1, \ldots, n-1$ obținem

$$\frac{x_1-\sqrt{a}}{x_1+\sqrt{a}}=\left(\frac{x_0-\sqrt{a}}{x_0+\sqrt{a}}\right)^2; \quad \frac{x_2-\sqrt{a}}{x_2+\sqrt{a}}=$$

$$=\left(\frac{x_1-\sqrt{a}}{x_1+\sqrt{a}}\right)^2; \ldots; \frac{x_n-\sqrt{a}}{x_n+\sqrt{a}}=\left(\frac{x_{n-1}-\sqrt{a}}{x_{n-1}+\sqrt{a}}\right)^2,$$

de unde $\dfrac{x_n-\sqrt{a}}{x_n+\sqrt{a}}=\left(\dfrac{x_0-\sqrt{a}}{x_0+\sqrt{a}}\right)^{2^n}$ sau

$$x_n=\sqrt{a}\cdot\frac{(x_0-\sqrt{a})^{2^n}+(x_0+\sqrt{a})^{2^n}}{(x_0-\sqrt{a})^{2^n}-(x_0+\sqrt{a})^{2^n}}.$$

3°. Trecînd la limită în relația de recurență obținem:

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\sqrt{a}.$$

1.100. Se observă că $x_i > 0$ indiferent de i, ceea ce înseamnă că relația de recurență are sens pentru toate valorile lui $i \in N \cup \{0\}$.

Avem:

$$x_i-\sqrt[n]{a}=\frac{1}{n}\left[(n-1)x_i+\frac{a}{x_{i-1}^{n-1}}\right]-\sqrt[n]{a}=$$

$$=\frac{(n-1)x_{i-1}^n+a-nx_{i-1}^{n-1}\sqrt[n]{a}}{nx_{i-1}^{n-1}}; \quad n\in N.$$

Considerăm numărătorul acestei fracții, unde am introdus notațiile: $A=\sqrt[n]{a}$; $B=x_{i-1}$.

Deci

$$(n-1)x_{i-1}^n+a-nx_{i-1}^{n-1}\sqrt[n]{a}=(n-1)B^n+A^n-$$

$$-nAB^{n-1}=(A-B)^2\sum_{j=1}^{n-1}\left(B^{j-1}\sum_{k=j}^{n-1}A^{n-k-1}B^{k-j}\right)\geqslant 0.$$

Rezultă $x_i - \sqrt[n]{a} \geqslant 0$, deci $x_i \geqslant \sqrt[n]{a}$, și cum $x_0 \geqslant \sqrt[n]{a}$ avem că oricare ar fi i întreg pozitiv șirul $\{x_i\}_{i \in N}$ este mărginit inferior de $\sqrt[n]{a}$.

Mai avem:

$$\frac{x_i}{x_{i-1}} = \frac{1}{n}\left(n - 1 + \frac{a}{x_{i-1}^n}\right).$$

Însă $a \leqslant x_i^n$, deci $\frac{x_i}{x_{i-1}} \leqslant 1$, adică $x_i \leqslant x_{i-1}$.

Rezultă că șirul este monoton descrescător și mărginit inferior, deci $\lim\limits_{i \to \infty} x_i$ există. Fie l această limită.

Trecînd la limită în relația de recurență avem:

$$l = \frac{(n-1)l}{n} + \frac{a}{nl^{n-1}}, \quad \text{adică } l = \sqrt[n]{a}.$$



Capitolul II

LIMITE DE FUNCȚII

Fie A o mulțime de puncte pe dreapta reală și α un punct care aparține mulțimii sau nu. Spunem că α este un *punct de acumulare* al mulțimii A, dacă orice vecinătate V a lui α conține cel puțin un punct al mulțimii A în afară de punctul α, deci

$$V \cap A - \{\alpha\} \neq \varnothing.$$

Un punct al unei mulțimi care nu este punct de acumulare se numește *punct izolat*.

Limita unei funcții într-un punct

Fie funcția $f: E \subseteq R \to R$ și x_0 un punct de acumulare al mulțimii E.

Definiția 1. Se spune că un număr l (finit sau infinit) este limita funcției f în punctul x_0, dacă pentru orice vecinătate U a lui l există o vecinătate V a lui x_0, astfel încît oricare ar fi $x \neq x_0$ din $V \cap E$, să avem $f(x) \in U$.

Limita funcției f în punctul x_0 se notează:

$$\lim_{x \to x_0} f(x).$$

În definiția dată, V depinde de U.

Definiția 2 (cu ε și δ a limitei).

Se spune că funcția f are limita finită l în punctul x_0, dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un număr $\delta(\varepsilon)$, astfel încît oricare ar fi $x \in E$, $x \neq x_0$ cu proprietatea $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$ să avem $|f(x) - l| < \varepsilon$. Pentru cazul cînd unul sau amîndouă numerele x_0 și l nu sînt finite, avem următoarele definiții:

1°. $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = l$ înseamnă: pentru orice $\varepsilon > 0$, există un $\delta(\varepsilon)$, astfel încît oricare ar fi $x \in E$ cu proprietatea $x > \delta(\varepsilon)$ să avem $|f(x) - l| < \varepsilon$.

2°. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l$ înseamnă: pentru orice $\varepsilon > 0$ există un $\delta(\varepsilon)$, astfel încît oricare ar fi $x \in E$ cu proprietatea $x < \delta(\varepsilon)$ să avem $|f(x) - l| < \varepsilon$. Și reciproc.

3°. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ înseamnă: pentru orice ε există un $\delta(\varepsilon) > 0$, astfel încît oricare ar fi $x \in E$, $x \neq x_0$ cu proprietatea $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$ să avem $f(x) > \varepsilon$, fiind o consecință a definiției.

4°. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ înseamnă: pentru orice ε există un $\delta(\varepsilon) > 0$, astfel încît oricare ar fi $x \in E$, $x \neq x_0$ cu proprietatea $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$ să avem $f(x) < \varepsilon$.

5°. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ înseamnă: pentru orice ε există un $\delta(\varepsilon)$, astfel încît oricare ar fi $x \in E$ cu proprietatea $x > \delta(\varepsilon)$ să avem $f(x) > \varepsilon$.

6°. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ înseamnă: pentru orice ε există un $\delta(\varepsilon) > 0$, astfel încît oricare ar fi $x \in E$ cu proprietatea $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$ să avem $f(x) < \varepsilon$.

7°. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ înseamnă: pentru orice ε există un $\delta(\varepsilon)$, astfel încît oricare ar fi $x \in E$ cu proprietatea $x < \delta(\varepsilon)$ să avem $f(x) > \varepsilon$.

8°. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ înseamnă: pentru $(\forall)\varepsilon$ există un $\delta(\varepsilon)$, astfel încît oricare ar fi $x \in E$ cu proprietatea $x < \delta(\varepsilon)$ să avem $f(x) < \varepsilon$.

Definiția 3. Se spune că funcția f are limita l (finită sau infinită) în punctul x_0 dacă pentru orice șir $\{x_n\}_{n \in N}$ convergent către x_0 ($x_n \in E$, $x_n \neq x_0$) șirul valorilor funcției $\{f(x_n)\}_{n \in N}$ este convergent către l.

Limite laterale

Limita la stînga a unei funcții într-un punct

Definiția 1. Se spune că funcția $f : E \subseteq R \to R$ are în punctul x_0 (punct de acumulare al mulțimii E) limita la stînga l_s, dacă pentru orice vecinătate U a lui l_s

există o vecinătate V a lui x_0, astfel încît, oricare ar fi $x < x_0$, $x \in V \cap E$, să avem $f(x) \in U$. Se notează:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = f(x_0 - 0) = l_s.$$

Definiția 2. Se spune că funcția $f: E \subseteq R \to R$ are în punctul x_0 limita l_s, dacă pentru orice șir crescător $\{x_n\}_{n \in N}$, convergent către $x_0 (x_n \in E, \ x_n < x_0)$ șirul corespunzător al valorilor funcției $\{f(x_n)\}_{n \in N}$ este convergent către l_s.

Limita la dreapta a unei funcții într-un punct

Definiția 1. Se spune că funcția $f: E \subseteq R \to R$ are în punctul x_0 (punct de acumulare al mulțimii E) limita la dreapta l_d, dacă pentru orice vecinătate U a lui l_d există o vecinătate V a lui x_0, astfel încît, oricare ar fi $x > x_0$, $x \in V \cap E$ să avem $f(x) \in U$.

Se notează:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = f(x_0 + 0) = l_d.$$

Definiția 2. Se spune că funcția $f: E \subseteq R \to R$ are în punctul x_0 limita la dreapta l_d, dacă pentru orice șir descrescător $\{x_n\}_{n \in N}$, convergent către x_0 $(x_n \in E$, $x_n > x_0)$, șirul corespunzător al valorilor funcției $\{f(x_n)\}_{n \in N}$ este convergent către l_d.

Să presupunem că $f: E \subseteq R \to R$ și că x_0 este punct de acumulare pentru mulțimea $E \cap (-\infty, x_0)$ cît și pentru mulțimea $E \cap (x_0, +\infty)$.

Teoremă. Funcția f are limită în x_0, dacă și numai dacă are în x_0 limite laterale egale. În acest caz:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0).$$

Limitele unor funcții folosind limitele unor șiruri cunoscute

1°. Pentru funcția constantă $f(x) = c$ definită pe R avem $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = c$ oricare ar fi x_0 (finit sau infinit).

2°. Pentru funcția $f(x) = x^k$, $k \in N$ definită pe R avem $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = x_0^k$ oricare ar fi x_0 (finit sau infinit).

3°. Pentru funcția $f(x) = \frac{1}{x^k}$, $(k \in N)$ definită pe $R - \{0\}$ avem $\lim_{x \to x_0} f(x) = \frac{1}{x_0^k}$ dacă $x_0 \neq 0$.

4°. $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^{2k}} = +\infty$, $(k \in N)$.

5°. Pentru funcția $f(x) = x^\alpha$ $(\alpha > 0)$ definită pe $[0, +\infty)$ avem $\lim_{x \to x_0} f(x) = x_0^\alpha$ oricare ar fi x_0 (finit sau infinit).

6°. Pentru funcția $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ $(\alpha > 0)$ definită pe $(0, +\infty)$ avem $\lim_{x \to x_0} f(x) = \frac{1}{x_0^\alpha}$ oricare ar fi x_0 (finit sau infinit).

7°. $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x^\alpha} = +\infty$.

8°. $\lim_{x \to x_0} a^x = a^{x_0}$ unde $(a > 0,\ a \neq 1)$.

9°. $\lim_{x \to x_0} \ln x = \ln x_0$ oricare ar fi x_0 finit,

$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$ și $\lim_{x \to \infty} \ln x = +\infty$.

10°. Pentru funcția $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ definită pe $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$ avem:

$$\lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e; \quad \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

11°. $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$; $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$.

Proprietăți ale limitelor de funcții

Teorema 1. Fie $f : E \subset R \to R$ o funcție și x_0 un punct de acumulare a lui E. Dacă $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$, atunci $\lim_{x \to x_0} |f(x)| = |l|$.

Teorema 2 (Criteriul majorării). Dacă f și g sînt definite pe E, dacă $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ și dacă există un număr finit l și o vecinătate V a lui x_0, astfel încît să avem $|f(x) - l| \leqslant g(x)$, pentru orice $x \in V \cap E$, $x \neq x_0$ atunci $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$.

Aplicații. $\lim\limits_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0$ (x_0 finit); $\lim\limits_{x\to x_0} \cos x = \cos x_0$ (x_0 finit); $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$; $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$, $(\alpha > 0)$.

Teorema 3. Dacă funcțiile f și g sînt definite pe E, dacă $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$ și dacă există o vecinătate V a lui x_0, astfel încît să avem $f(x) \geqslant g(x)$ pentru orice $x \in V \cap E$, $x \neq x_0$, atunci $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$.

Teorema 4. Dacă funcțiile f și g sînt definite pe E, dacă $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = -\infty$ și dacă există o vecinătate V a lui x_0, astfel încît să avem $f(x) \leqslant g(x)$, pentru orice $x \in V \cap E$, $x \neq x_0$ atunci $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$.

Teoremă (de trecere la limită în inegalități). Dacă funcțiile g, f și h definite pe E au limită în x_0 și dacă există o vecinătate V a lui x_0 astfel încît să avem $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$ pentru orice $x \in V \cap E$ $(x \neq x_0)$, atunci:

$$\lim_{x\to x_0} g(x) \leqslant \lim_{x\to x_0} f(x) \leqslant \lim_{x\to x_0} h(x).$$

Operații cu funcții care au limită

Fie funcțiile $f : E \subseteq R \to R$ și $g : E \subseteq R \to R$ și x_0 un punct de acumulare al mulțimii E.

Teoremă. Dacă funcțiile f și g au limite în x_0 (finite sau infinite), atunci:

1°. Dacă suma limitelor are sens, funcția $f + g$ are limită în x_0 și

$$\lim_{x\to x_0} [f(x) + g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)$$

(caz exceptat: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \mp\infty$).

2°. Dacă produsul limitelor are sens, funcția $f \cdot g$ are limită în x_0 și

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x)$$

(caz exceptat $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$, $\lim_{x \to x_0} |g(x)| = \pm\infty$).

3°. Dacă raportul limitelor are sens, funcția $\frac{f}{g}$ are limită în x_0 și

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)}$$

(cazuri exceptate $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$ sau $\lim_{x \to x_0} |f(x)| = \lim_{x \to x_0} |g(x)| = +\infty$).

În cazul cînd $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$ se pot face precizările:

Dacă $g(x) > 0$ pentru $x \neq x_0$, atunci $\lim_{x \to x_0} \frac{1}{g(x)} = +\infty$.

Dacă $g(x) < 0$ pentru $x \neq x_0$, atunci $\lim_{x \to x_0} \frac{1}{g(x)} = -\infty$.

4°. Dacă $[\lim_{x \to x_0} f(x)]^{\lim_{x \to x_0} g(x)}$ are sens, atunci funcția f^g are limită în punctul x_0 și $\lim_{x \to x_0} [f(x)]^{g(x)} = \lim_{x \to x_0} f(x)^{\lim_{x \to x_0} g(x)}$ (cazuri exceptate 0^0, 1^∞, ∞^0).

Teoremă. Dacă $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ și dacă g este mărginită pe o vecinătate a lui x_0, atunci $\lim_{x \to x_0} f(x)g(x) = 0$.

Limita unei funcții compuse.

Fie funcțiile $u : E \subseteq R \to F \subseteq R$; $f : F \subseteq R \to R$ și funcția compusă $f \circ u : E \subseteq R \to R$, $(f \circ u)(x) =$

$= f(u(x))$ pentru $x \in E$. Fie x_0 un punct de acumulare al lui E și u_0 un punct de acumulare al lui F.

Teoremă. Dacă $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = u_0$, și dacă $\lim\limits_{u \to u_0} f(u) = l$, atunci funcția compusă $f \circ u$ are limită în x_0 și $\lim\limits_{x \to x_0} f(u(x)) = \lim\limits_{u \to u_0} f(u) = l$.

Aplicație. Fie funcția $u : E \subseteq R \to R$ și x_0 un punct de acumulare al lui E. Dacă $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = 0$ și dacă $u(x) \neq 0$ pentru $x \neq x_0$, atunci

$$\lim_{x \to x_0} [1 + u(x)]^{\frac{1}{u(x)}} = e.$$

PROBLEME

2.1. Să se calculeze:

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{1}{x-1} \text{ și } \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{1}{x-1}.$$

2.2. Să se calculeze limita funcției $f: R \to R$ dată de legea $f(x) = x^{10} + x + 1$ în punctul $x = 1$ folosind definiția limitei unei funcții într-un punct cu ajutorul șirurilor.

2.3. Să se calculeze:

$$L = \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x+\sqrt[3]{x^2}} - \sqrt[3]{x^3-\sqrt[3]{x^2}}\right).$$

2.4. Să se calculeze limita funcției $f: R \to R$ dată de legea

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & x \leqslant 0 \\ \cos x, & x > 0 \end{cases}$$

în punctul $x = 0$.

2.5. Să se calculeze:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{(\pi-2x)^2} \quad \text{și} \quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} 5x}{\operatorname{tg} 3x}.$$

2.6. Să se calculeze:

$$L = \lim_{x\to -2} \frac{\arcsin(x+2)}{x^2+2x}.$$

2.7. Să se calculeze:

$$L = \lim_{x \to \infty} x\,[\ln(1 + x) - \ln x].$$

2.8. Să se calculeze:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos^n x}{x^2}, \text{ unde } n \in N.$$

2.9. Să se calculeze:

$$\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt[3]{x + \sqrt[3]{x^2}} - \sqrt[3]{x - \sqrt[3]{x^2}}\right).$$

2.10. Să se calculeze:

$$\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{mx^2 + 2x + 1} - \sqrt{x^2 + 1}\right)$$

unde m este un parametru real.

(Concurs elevi, 1961)

2.11. Să se calculeze:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt[p]{x} - 1}{\sqrt[r]{x^q} - 1}$$

unde $p, r, q \in N;\ p, r \geqslant 2$.

2.12. Să se calculeze:

$$\lim_{x \to a} \frac{a^m (x^n + b) - x^m (a^n + b)}{a^n (x^m + b) - x^n (a^m + b)}$$

dacă $m, n \in N$.

Dacă $m, n \in R$ se poate calcula limita?

2.13. Să se calculeze:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[m]{\cos x} - \sqrt[n]{\cos x}}{\sin^2 x};\ m, n \in N.$$

(*M. Chiriță*, G.M.B., 9823, 1969)

2.14. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{x}{n}+a\cdot\sin\frac{x}{n}\right)^n.$$

(*N. Bebea*, G.M.F.B., 5550, 1962)

2.15. Să se calculeze:

$$\lim_{x\to\infty} x\left[\sqrt{ax^2+6x+10}-(ax+3)\right], \text{ unde } a\in R.$$

(*C. Tempeanu*, G. M. F. B., 5931, 1962)

2.16. Să se calculeze:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\sin 2x}{\cos 2x}\right)^{\operatorname{cosec} x}.$$

2.17. Să se calculeze:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[4]{x^3-1}+\sqrt{x-1}}.$$

2.18. Să se calculeze:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos ax-\cos bx}{\cos cx-\cos dx}.$$

unde $a, b, c, d \in R-\{0\}$, iar $|c|\neq|d|$.

2.19. Să se calculeze:

$$\lim_{x\to 3}(7-2x)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{6}}.$$

2.20. Să se calculeze:

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right)^{\frac{a}{x}}$$

unde $a\in(0,+\infty)$.

(*I. Constantinescu*, G.M.F.B., 5692, 1963)

2.21. Să se calculeze:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3-2x^2+7}-ax+3\right)$$

unde $a\in R$.

2.22. Să se calculeze:

$$\lim_{x\to p}\frac{\sqrt{2p^3x-x^4}-p\sqrt[3]{p^2\cdot x}}{p-\sqrt[4]{px^3}}.$$

(Concurs elevi, 1970)

2.23. Să se calculeze:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)+e^x-\cos x}{(1-\sin x)^2-e^{x^2}}.$$

2.24. Să se calculeze:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}(a+x)-\operatorname{arctg}(a-x)}{\operatorname{tg}(a+x)-\operatorname{tg}(a-x)}.$$

2.25. Să se calculeze:

a). $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}(\sin 6x+\cos 3x)^{\operatorname{ctg} 6x}$.

b). $\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}$ unde $a,b\in R$.

2.26. Să se calculeze:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}[\sin x(1+2\sin x)]^{\sec 3x}.$$

(*E. Isac*, G.M.F.B., 4364, 1960)

2.27. Să se calculeze:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(2-\operatorname{tg} x\sqrt{\operatorname{ctg} x}\right)^{\frac{1}{\sin x-\cos x}}.$$

(Concurs elevi, 1969)

2.28. Să se calculeze:

$$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt[m]{x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_m} - \sqrt[n]{x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_n}\right)$$

unde $m,n \in N - \{1\}$, $a_i \in R$, $(\forall) i \in \{1,2,\ldots, m\}$, $b_i \in R$, $(\forall)\ i \in \{1,2,\ldots,n\}$.

2.29. Să se calculeze:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n)}{b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_nx^n}$$

unde a_i, $b_i \in (0, \infty)$, $(\forall)\ i \in \{1,2,\ldots, n\}$.

2.30. Să se calculeze:

$$\lim_{x\to 0} (\cos\sqrt{x})^{\frac{1}{x}}.$$

2.31. Să se calculeze:

1°. $\lim_{x\to a} \dfrac{\sin^n x - \sin^n a}{\sin(x - a)}$, $(n \in N)$.

2°. $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\operatorname{tg} x - 1}{\sin^4 x - \cos^4 x}$.

2.32. Să se calculeze:

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{x - \frac{\pi}{2}}{\sqrt{1 - \sin x}}.$$

2.33. Să se calculeze:

a). $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos x - \cos 5x}{x \sin x}$.

b). $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos 3x - \cos 7x}{x \sin 5x}$.

2.34. Să se calculeze:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{\sin^2 x} - \frac{1}{1-\cos x}\right).$$

2.35. Să se calculeze:

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{\pi-x}\right)^2}}.$$

2.36. Să se calculeze:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-\cos 2x}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}.$$

2.37. Să se calculeze:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\operatorname{tg} x}.$$

2.38. Să se calculeze:

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\operatorname{ctg}^2 x}.$$

2.39. Să se calculeze:

$$\lim_{x\to 0}(1-\sin x)^{\operatorname{ctg} x}.$$

2.40. Să se calculeze:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}[\cos x(1+2\cos x)]^{\operatorname{cosec} 3x}.$$

2.41. Să se calculeze:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+x}{\sqrt[3]{1+\sin x}-1}.$$

2.42. Să se calculeze:

$$\lim_{x \to a} \frac{\arcsin (x - a)}{x^n - a^n} \quad \text{unde } n \in N.$$

2.43. Să se calculeze:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{\arcsin \dfrac{1 + 2 \cos 2x}{4 \cos \left(\dfrac{\pi}{6} - x \right)}}{\sin 3x}.$$

2.44. Să se calculeze:

$$\lim_{x \to 1} \frac{(x+1)\sqrt{x} + 2\sqrt{x} - 3x - 1}{(x+1)\sqrt{x+3} + 14\sqrt{x+3} - 6x - 26}.$$

(*C. Ionescu-Ţiu*, R.M.T., 2706, 1946)

2.45. Să se calculeze:

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \operatorname{tg} \frac{a}{2^k}.$$

Caz particular $a = \dfrac{\pi}{2}$.

(*C. Ionescu-Ţiu*, G.M.B., p. 396, 1961)

2.46. Să se calculeze:

$$\lim_{x \to \pi} \frac{\sin \dfrac{x}{2} + \cos x}{1 + \sin^2 x + \cos x}.$$

(Admitere, Facultatea de Matematică-Mecanică, București, 1971 oral)

2.47. Dacă $a \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ să se calculeze:

$$\lim_{x \to a} \left(\frac{\sin x}{\sin a} \right)^{\frac{1}{x-a}}; \quad \lim_{x \to a} \left(\frac{\cos x}{\cos a} \right)^{\frac{1}{x-a}}; \quad \lim_{x \to a} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} a} \right)^{\frac{1}{x-a}};$$

$$\lim_{x \to a} \left(\frac{\operatorname{ctg} x}{\operatorname{ctg} a} \right)^{\frac{1}{x-a}}; \quad \lim_{x \to a} \left(\frac{\sec x}{\sec a} \right)^{\frac{1}{x-a}}; \quad \lim_{x \to a} \left(\frac{\operatorname{cosec} x}{\operatorname{cosec} a} \right)^{\frac{1}{x-a}}.$$

2.48. Să se calculeze:

$$L=\lim_{x\to\pi}\frac{\sin 4x+\cos 2x-1}{\sin x}.$$

2.49. Să se calculeze:

$$\lim_{\substack{x\to\pi\\ x<\pi}}\frac{\sin x}{\sqrt{\pi-x}}.$$

2.50. Să se calculeze limita în $\frac{\pi}{4}$ a funcției:

$$f(x)=\left[\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}\right]^{\sec^2 2x}.$$

2.51. Să se calculeze:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^3}}{\operatorname{tg}x-\sin x}.$$

2.52. Să se calculeze:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ \text{sau}\\ x\to\pi}}\frac{\sin 4x}{1-2\sin 2x-\cos 4x}.$$

(*C. Ionescu-Țiu*, G.M.F.B., 3638, 1959)

2.53. Să se calculeze:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\operatorname{tg}x-x}{x^2}.$$ Dar dacă $x<0$?

(*G. Gussi*, Concurs elevi, 1974)

2.54. Să se calculeze:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{x e^{-\frac{1}{x}}}{\operatorname{tg}^2 x}.$$

(Concurs elevi, 1974)

2.55. Să se calculeze:

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x + a \sin x)}{\sin x}.$$

(Concurs elevi, 1964)

2.56. Să se determine m, n, p, q astfel ca:

a). $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt[3]{mx^3 + (n+2)x^2 + 14} -\right.$

$$\left. - \sqrt[3]{nx^3 + 2x^2 - 3}\right) = 1.$$

b). $\lim_{x\to\infty} \left(p + \frac{qx}{x^2 - 1}\right)^x = e^2.$

(*I. Iancu*, G.M.B., 7033, 1965)

2.57. Să se calculeze:

$$\lim_{x\to 0} \left[\frac{\sin\left(mx + \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(nx + \frac{\pi}{4}\right)}\right]^{\frac{1}{x}} \quad \text{unde } m \neq n.$$

(*S. Petru*, G.M.B., 5092, 1962)

2.58. Să se calculeze:

$$\lim_{x\to 0} (2 - \sqrt[3]{\cos x} \cdot \cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}.$$

(*A. Matei*, G.M.B., 7488, 1966)

2.59. Să se calculeze:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (\sec x - \operatorname{cosec} 2x).$$

2.60. Să se calculeze limita

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(\sec^2 \sqrt{x}\right)}{2x}.$$

(*Al. Păunescu*, G.M.B., 7849, 1966)

2.61. Să se calculeze:

$$\lim_{x\to 1} \frac{nx\,(x^m - 1) - mx\,(x^n - 1)}{(x-1)^2}$$

unde $m, n \in N$, $n \geqslant 2$, $m \geqslant 2$.

2.62. Să se calculeze:

$$\lim_{x\to 1} \frac{Ax^n + Bx^p + C}{(x-1)^2}$$

știind că $A + B + C = 0$; $nA + pB = 0$ și $n, p \in N$.

2.63. Să se calculeze:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^n + (2n-7)x^{n-1} - 2(n-2)x^{n-2} + x + 1}{(x-1)^2}.$$

(*Th. Angheluță*, Gazeta Matematică, 1938)

2.64. Să se calculeze:

$$\lim_{x\to -1} \frac{x(x^{n-1}+1)+3x^2(x^{n-3}+1)+4x^3(x^{n-5}+x^{n-6}+\ldots+x+1)}{(x+1)^2}.$$

2.65. Să se calculeze:

$$\lim_{x\to 1} \frac{np\,(n-p)x^m + pm\,(p-m)x^n + mn\,(m-n)x^p +}{(x-1)^3}$$

$$\frac{+\,(m-n)\,(n-p)\,p-m)}{(x-1)^3}$$

unde $m, n, p \in N$ și $\min\,(m, n, p) = 3$.

2.66. Să se calculeze limita funcției

$$f(x) = \sqrt{\sin^2 x - \frac{1}{4} + \sqrt{\sin^2 x - \frac{1}{4} + \ldots}}$$

cînd $x \to \frac{\pi}{3}$.

(G.M.B., 7650, 1966)

2.67. Considerăm șirurile de funcții $\{y_n(x)\}$ și $\{z_n(x)\}$ definite prin $y_1(x) = z_1(x) = x$ și prin relațiile de recurență

$$y_k = (z_{k-1} + 1)^{y_{k-1}}; \quad z_k = z_{k-1}^{y_{k-1}}.$$

Să se afle:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{y_n(x)}{z_n(x)}.$$

(*T. Zamfirescu*, G.M.B., 7346, 1966)

2.68. Să se calculeze limita:

$$\lim_{x\to a} (\log_b \log_a x^b)^{\frac{1}{x-a}}, \text{ unde } a > 1,\ b > 0 \text{ și } b \neq 1.$$

(*N. C. Manolache*, G.M.B., 8552, 1967)

2.69. Să se calculeze:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+\sin^2 x} - \sqrt[5]{4 - 3\cos x}}{\sqrt[3]{1 + x\sin x} - \sqrt[5]{\cos^2 x}}.$$

2.70. Să se calculeze:

$$L = \lim_{\substack{x\to\frac{\pi}{2} \\ x>\frac{\pi}{2}}} \frac{\sqrt{\ln\left|\frac{1}{\sin x}\right|}}{x - \frac{\pi}{2}}.$$

2.71. Să se calculeze fără ajutorul derivatelor

$$\lim_{x \to 1} \frac{a^{x^2-1} - 1}{\sin(x^2 - 3x + 2)} \text{ unde } a > 0.$$

(*P. Simon*, G.M.B., 7457, 1966)

2.72. Să se calculeze limita

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{p_1^{\alpha_1 x} + p_2^{\alpha_2 x} + \ldots + p_n^{\alpha_n x}}{n} \right)^{\frac{1}{x}}$$

$n \in N$, $p_i > 0$, $\alpha_i \in R$; $i \in \{1,2,\ldots, n\}$.

2.73. Să se calculeze limita:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\sqrt[p]{x^p + a_1 x^{p-1} + \ldots + a_p} - \sqrt[q]{x^q + b_1 x^{q-1} + \ldots + b_q}}{(x - x_0)}$$

știind că $p, q \in N$, $p, q \geqslant 2$ și $(x_0^p + a_1 x_0^{p-1} + \ldots + a_p)^q = (x_0^q + b_1 x_0^{q-1} + \ldots + b_q)^p \neq 0$.

Aplicație:

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt[5]{x^5 - 5x^3 + 9} - \sqrt[4]{x^4 + x^3 - 23}}{x - 2}.$$

2.74. Să se calculeze:

$$\lim_{x \to a} \frac{\operatorname{tg} \sqrt[n]{P(x)} - \operatorname{tg} \sqrt[n]{Q(x)}}{\operatorname{tg}(x - a)}$$

știind că $P(x)$ și $Q(x)$ sînt polinoame, că $P(a) = Q(a)$ iar n este număr natural impar și $P(a) \neq 0$.

2.75. Să se calculeze:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\prod_{k=1}^{n} \operatorname{tg}(a + kx) - \operatorname{tg}^n a}{x}$$

și să se determine $a \in (0, \pi)$ în cazul cînd $n = 3$ știind că limita are valoarea 72.

(*I. Hadircă*, G.M.B., 6336, 1964)

2.76. Se dă funcţia $f : R - \{0\} \to R$, definită prin:

$$f(x) = \frac{\sin \alpha x}{x}; \quad \alpha \in R.$$

Să se determine funcţia $g : R \to R$ astfel încît:

a). $g(x) = f(x)$ pentru orice $x \in R - \{0\}$.

b). $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = g(0)$.

(*N. N. Teodorescu*, G.M.B., 12295, 1972)

2.77. Să se calculeze:

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{nx} \cdot \log_a \prod_{k=1}^{n} \sqrt[k]{1 + kx} \right).$$

(Admitere, Institutul Politehnic, Bucureşti, 1973)

2.78. Să se calculeze limita:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin \{a\pi [\cos (b \arcsin x) - 1]\}}{x^2}.$$

(G.M.B., 12291, 1972)

2.79. Se dau funcţiile

$$f(x) = \frac{\log_a \log_c [(x^2 - 3)c]}{x - 2};$$

$$g(x) = \frac{\log_c \log_a [(x^2 - 3)a]}{x - 2}.$$

1°. Să se determine domeniul maxim pe care poate fi definită $f(x) + g(x)$ în cazul cînd $a \in (0,1)$ şi $c \in (1, + \infty)$.

2° Fără a folosi derivata să li se calculeze limitele cînd $x \to 2$.

(*N. Păun*, G.M.B., 7559, 1966)

2.80. Să se calculeze:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{tg}^3\, ax}{x - \sin x} \quad \text{unde } a \in R - \{0\}.$$

2.81. Să se calculeze:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$$

știind că limita există și este finită.

(*C. Szasz*, G.M.B., 7572, 1966)

2.82. Să se calculeze limita:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \prod_{k=1}^{n} (\cos kx)^k}{x^2}.$$

2.83. Să se calculeze:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x \sqrt{\cos 2x} \cdot \sqrt[3]{\cos 3x} \ldots \sqrt[n]{\cos nx}}{x^2}$$

știind că $n \in N$.

(G.M.B., 9558, 1969)

2.84. Să se calculeze fără ajutorul derivatelor

$$\lim_{x\to\infty} \ln\left[(1 + a^x) \ln\left(1 + \frac{b}{x}\right)\right]. \quad (a > 1).$$

(*S. Petru*, G.M.B., 7340, 1966)

2.85. Fie funcțiile $f: (0, a) \to R$ și $g: (0, a) \to (0, +\infty)$, unde $a \in (0, +\infty)$ iar $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. Dacă $\{\alpha_{mn}\}_{n\in N}$ este un șir cu $\alpha_{mn} > 0$, $m \in N$ $\lim_{n\to+\infty} \alpha_{mn} = 0$, iar $m \leqslant n$, atunci:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_{in}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} g(\alpha_{in}),$$

în ipoteza că limita din membrul drept al egalității există.

2.86. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1^2}{n^3}\right)\left(1+\frac{2^2}{n^3}\right)\dots\left(1+\frac{n^2}{n^3}\right).$$

2.87. Să se calculeze limita:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sin\frac{1^k a}{n^{k+1}}+\sin\frac{2^k a}{n^{k+1}}+\dots+\sin\frac{n^k a}{n^{k+1}}\right)$$

unde $k \in N$ și $a > 0$.

(*Gh. Marghescu*, G.M.B., 13968, 1974)

2.88. Să se calculeze limita:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^k}\right)\left(1+\frac{2}{n^k}\right)\dots\left(1+\frac{n}{n^k}\right) \text{ unde } k \in N.$$

(*C. Marcel*, G.M.B., 12463, 1972)

2.89. Fie șirul $\{a_n\}_{n\in N}$ dat de termenul general:

$$a_n = \left(1+\frac{1\cdot 2}{n^3}\right)\left(1+\frac{2\cdot 3}{n^3}\right)\dots\left(1+\frac{n(n+1)}{n^3}\right).$$

Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

(G.M.B., 7518, 1966)

2.90. Se dă șirul cu termenul general

$$a_n = \left(1+\frac{1^k}{n^{k+1}+2}\right)\cdot\left(1+\frac{2^k}{n^{k+1}+2}\right)\dots\left(1+\frac{n^k}{n^{k+1}+2}\right).$$

Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$; $(k \in N)$.

(*L. Pirșan*, G.M.B., 9622, 1969)

2.91. Se dă $f : N \to (0, \infty) - \{k/2 \mid k \in N\}$. Să se calculeze:

$$\lim_{x\to\pi f(n)} x\cdot\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}\,[\pi f(n)]}\right)^A \text{ unde } A = \operatorname{tg}\frac{x}{2f(n)}.$$

2.1. Avem: $x - 1 = y$, deci prima limită devine

$$\lim_{\substack{y \to 0 \\ y > 0}} \frac{1}{y} = +\infty,$$

iar a doua $\lim_{\substack{y \to 0 \\ y < 0}} \frac{1}{y} = -\infty.$

2.2. Fie $\{x_n\}$ un șir convergent către 1 și $x_n \neq 1$, $(\forall) n \in N$. Avem $f(x_n) = x_n^{10} + x_n + 1$. Folosind operațiile cu șiruri convergente, obținem că $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = = \lim_{n \to \infty} (x_n^{10} + x_n + 1) = 1 + 1 + 1$ adică $f(x_n) \to 3$. Deci $\lim_{x \to 1} f(x) = 3$.

2.3.

$$L = -\infty.$$

2.4. Avem:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{x \to 0} e^x = 1.$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{x \to 0} \cos x = 1.$$

Deci $\lim_{x \to 0} f(x) = 1.$

2.5. Făcînd substituția $x = t + \frac{\pi}{2}$; obținem:

a). $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{(\pi - 2x)^2} = \lim_{t \to 0} \frac{1 - \cos t}{4t^2} = \lim_{t \to 0} \frac{\sin^2 \frac{t}{2}}{2t^2} =$

$$= \frac{1}{8} \lim_{t \to 0} \left(\frac{\sin \frac{t}{2}}{\frac{t}{2}} \right)^2 = \frac{1}{8}.$$

b). Avem:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} 5x}{\operatorname{tg} 3x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 5x \cdot \cos 3x}{\sin 3x \cdot \cos 5x} = -\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 3x}{\cos 5x}.$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} 5x}{\operatorname{tg} 3x} = -\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 3x}{\cos 5x} = \lim_{t \to 0} \frac{\sin 3t}{\sin 5t} = \frac{3}{5}.$$

2.6. Notăm $x + 2 = y$. Cînd $x \to -2$, atunci $y \to 0$. Deci limita devine:

$$L = \lim_{y \to 0} \frac{\arcsin y}{(y - 2)y} = -\frac{1}{2} \text{ deoarece } \lim_{y \to 0} \frac{\arcsin y}{y} = 1.$$

2.7. Avem:

$$x[\ln(1 + x) - \ln x] = \ln \left(\frac{1 + x}{x} \right)^x = \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x; \; L = 1.$$

2.8. Avem:

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x + \ldots + \cos^{n-1} x)}{x^2} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2} \right)^2} (1 + \cos x + \ldots + \cos^{n-1} x) = \frac{n}{2}.$$

2.9. Avem:

$$\sqrt[3]{x+\sqrt[3]{x^2}}-\sqrt[3]{x-\sqrt[3]{x^2}}=$$

$$=\frac{(x+\sqrt[3]{x^2})-(x-\sqrt[3]{x^2})}{\sqrt[3]{(x+\sqrt[3]{x^2})^2}+\sqrt[3]{x^2-x\sqrt[3]{x}}+\sqrt[3]{(x-\sqrt[3]{x^2})^2}}=$$

$$=\frac{2\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^2+2x\sqrt[3]{x^2}+x\sqrt[3]{x}}+\sqrt[3]{x^2-x\sqrt[3]{x}}+}$$

$$\ldots\frac{2\sqrt[3]{x^2}}{+\sqrt[3]{x^2-2x\sqrt[3]{x^2}+x\sqrt[3]{x}}}.$$

Deci

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{x+\sqrt[3]{x^2}}-\sqrt[3]{x-\sqrt[3]{x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt[3]{1+\frac{2}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}}+\sqrt[3]{1-\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}}+}$$

$$\ldots\frac{2}{+\sqrt[3]{1-\frac{2}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}}}=\frac{2}{3}.$$

2.10. Vom deosebi următoarele cazuri:

1). $m<0$.

În acest caz $mx^2+2x+1\geqslant 0$ numai pentru x aparţinînd unui interval finit, deci limita nu are sens pentru că ∞ nu este punct de acumulare al funcţiei de sub semnul limitei.

2). $m\in[0,1)$.

Amplificînd cu expresia conjugată, obținem:

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{mx^2+2x+1}-\sqrt{x^2+1})=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(m-1)x^2+2x}{\sqrt{mx^2+2x+1}+\sqrt{x^2+1}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(m-1)x+2}{\sqrt{m+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=-\infty.$$

3). $m=1$.

În acest caz, procedînd ca la 2), obținem limita 1.

4). $m>1$, cînd se obține limita $+\infty$.

2.11. Vom observa mai întîi că dacă r este număr par, limita din enunț are sens numai dacă $x\to 1$, $x>1$. Calculul limitei îl efectuăm astfel:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[p]{x}-1}{\sqrt[r]{x^q-1}}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt[r]{x^q-1}\cdot[(\sqrt[p]{x})^{p-1}+\ldots+\sqrt[p]{x}+1]}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\sqrt[r]{\frac{(x-1)^r}{x^q-1}}\cdot\lim_{x\to 1}\frac{1}{(\sqrt[p]{x})^{p-1}+\ldots+\sqrt[p]{x}+1}=$$

$$=\sqrt[r]{\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^{r-1}}{x^{q-1}+x^{q-2}+\ldots+1}}\cdot\frac{1}{p}=\sqrt[r]{\frac{0}{q}}\cdot\frac{1}{p}=0.$$

2.12. Ținînd seama că pentru $\alpha\in N$ avem

$$\lim_{x\to a}\frac{x^\alpha-a^\alpha}{x-a}=\alpha\cdot a^{\alpha-1}$$

vom obține:

$$\lim_{x\to a}\frac{a^m(x^n+b)-x^m(a^n+b)}{a^n(x^m+b)-x^n(a^m+b)}=$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{a^m\cdot x^n-x^m\cdot a^n-b(x^m-a^m)}{a^n\cdot x^m-x^n\cdot a^m-b(x^n-a^n)}=$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{a^m(x^n-a^n)-a^n(x^m-a^m)-b(x^m-a^m)}{a^n(x^m-a^m)-a^m(x^n-a^n)-b(x^n-a^n)}=$$

$$=\frac{a^m\cdot\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{x^n-a^n}{x-a}\right)-a^n\cdot\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{x^m-a^m}{x-a}\right)-b\cdot\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{x^m-a^m}{x-a}\right)}{a^n\cdot\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{x^m-a^m}{x-a}\right)-a^m\cdot\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{x^n-a^n}{x-a}\right)-b\cdot\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{x^n-a^n}{x-a}\right)}=$$

$$=\frac{(n-m)\cdot a^{m+n-1}-mb\cdot a^{m-1}}{(m-n)\cdot a^{m+n-1}-nb\cdot a^{n-1}}.$$

Limita se poate calcula chiar dacă $m, n \in R$.

2.13. Notăm valoarea limitei cu L și avem:

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{\cos x}-1}{\sin^2 x}-\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{\cos x}-1}{\sin^2 x}.$$

Însă

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[p]{\cos x}-1}{\sin^2 x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[p]{\cos^{p-1}x}+\sqrt[p]{\cos^{p-2}x}+\ldots+1}\cdot$$

$$\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\sin^2 x}=-\frac{1}{p}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{4\sin^2\dfrac{x}{2}\cos^2\dfrac{x}{2}}=-\frac{1}{2p},$$

unde $p \in N$.

Rezultă:

$$L = -\frac{1}{2m} - \left(-\frac{1}{2n}\right) = \frac{m-n}{2nm}.$$

2.14. Avem:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{x}{n} + a\cdot\sin\frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1 + a\sin\frac{x}{n} + \cos\frac{x}{n} - 1\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left\{\left[\left(1 + a\sin\frac{x}{n} + \cos\frac{x}{n} - 1\right)^{\frac{1}{a\sin\frac{x}{n} + \cos\frac{x}{n} - 1}}\right]^{\left(a\sin\frac{x}{n} + \cos\frac{x}{n} - 1\right)n}\right\} =$$

$$= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left[a\cdot x\cdot\frac{\sin\frac{x}{n}}{\frac{x}{n}} - \frac{1-\cos\frac{x}{n}}{\frac{x^2}{n^2}}\cdot\frac{x^2}{n}\right]} = e^{a\cdot x\cdot 1 - \frac{1}{2}\cdot 0} = e^{ax}.$$

2.15. Se observă ușor că, pentru ca limita să aibă sens, este necesar ca $a \in [0, \infty)$. Distingem cazurile

1). $a = 0$. Atunci:

$$\lim_{x\to\infty} x\left[\sqrt{ax^2 + 6x + 10} - (ax + 3)\right] =$$

$$= \lim_{x\to\infty} x\left(\sqrt{6x + 10} - 3\right) = \infty.$$

2). $a \in (0, \infty)$. Avem:

$$\sqrt{ax^2 + 6x + 10} - (ax + 3) =$$

$$= \frac{a(1-a)x^2 + 6(1-a)x + 1}{\sqrt{ax^2 + 6x + 10} + (ax + 3)}.$$

Pentru $a \in (0,1)$ rezultă:

$$\lim_{x\to\infty} x\left[\sqrt{ax^2+6x+10}-(ax+3)\right]=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{a(1-a)x^3+6(1-a)x^2+x}{\sqrt{ax^2+6x+10}+(ax+3)}=-\infty.$$

Pentru $a \in (1, \infty)$ rezultă:

$$\lim_{x\to\infty} x\left[\sqrt{ax^2+6x+10}-(ax+3)\right]=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{a(1-a)x^3+6(1-a)x^2+x}{\sqrt{ax^2+6x+10}+(ax+3)}=\infty.$$

Pentru $a=1$ rezultă:

$$\lim_{x\to\infty} x\left[\sqrt{ax^2+6x+10}-(ax+3)\right]=$$

$$=\lim_{x\to\infty} x\left[\sqrt{x^2+6x+10}-(x+3)\right]=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+6x+10}+(x+3)}=\frac{1}{2}.$$

2.16. Avem:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\sin 2x}{\cos 2x}\right)^{\operatorname{cosec} x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\left(1+\frac{1+\sin 2x-\cos 2x}{\cos 2x}\right)^{\frac{\cos 2x}{1+\sin 2x-\cos 2x}}\right]^{\frac{1+\sin 2x-\cos 2x}{\cos 2x\cdot\sin x}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\sin^2 x+\cos^2 x)+2\sin x\cdot\cos x-(\cos^2 x-\sin^2 x)}{\cos 2x\cdot\sin x}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2(\sin x+\cos x)}{\cos 2x}}=e^{\frac{2\cdot 1}{1}}=e^2.$$

2.17. Punînd $x = \frac{1}{y} > 0$, se observă că atunci cînd $x \to +\infty$, $y \to 0$. Limita devine:

$$\lim_{y\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt[3]{y^2}} + \frac{1}{\sqrt{y}\cdot\sqrt[4]{y}}}{\frac{\sqrt[4]{1-y^3}}{\sqrt{y}\cdot\sqrt[4]{y}} + \frac{\sqrt{1-y}}{\sqrt{y}}} =$$

$$= \lim_{y\to 0} \left[\frac{\sqrt{y}\cdot\sqrt[4]{y}}{\sqrt[4]{1-y^3} + \sqrt[4]{y}\sqrt{1-y}}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt[3]{y^2}} + \frac{1}{\sqrt{y}\sqrt[4]{y}}\right)\right] =$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{1}{\sqrt[4]{1-y^3} + \sqrt[4]{y}\sqrt{1-y}}\cdot$$

$$\cdot\lim_{y\to 0}\left(\sqrt[4]{y} + \frac{\sqrt[4]{y^3}}{\sqrt[3]{y^2}} + 1\right) = 1\cdot\lim_{y\to 0}(\sqrt[4]{y} + \sqrt[12]{y} + 1) = 1.$$

2.18. Ținînd seama că $\lim\limits_{y\to 0}\frac{1-\cos y}{y^2} = \frac{1}{2}$, vom obține

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos ax - \cos bx}{\cos cx - \cos dx} = \lim_{x\to 0}\frac{b^2\cdot\frac{1-\cos bx}{b^2x^2} - a^2\frac{1-\cos ax}{a^2x^2}}{d^2\cdot\frac{1-\cos dx}{d^2x^2} - c^2\frac{1-\cos cx}{c^2x^2}} =$$

$$= \frac{\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}}{\frac{d^2}{2} - \frac{c^2}{2}} = \frac{a^2-b^2}{c^2-d^2}.$$

2.19. Deoarece

$$\lim_{x\to 3}(7-2x)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{6}} =$$

$$= \lim_{x\to 3}\left\{[1-2(x-3)]^{\frac{1}{-2(x-3)}}\right\}^{-2(x-3)\cdot \operatorname{tg}\frac{\pi x}{6}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 3} -2(x-3)\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi x}{6}\right)};$$

iar

$$\lim_{x\to 3}\left[-2(x-3)\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi x}{6}\right)\right] =$$

$$= \lim_{x\to 3} 2(x-3)\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi x}{6}-\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 3} 2(x-3)\frac{\cos\left[\frac{\pi}{6}(x-3)\right]}{\sin\left[\frac{\pi}{6}(x-3)\right]} =$$

$$= \lim_{x\to 3}\frac{\frac{\pi}{6}(x-3)}{\sin\left[\frac{\pi}{6}(x-3)\right]}\cdot\frac{12}{\pi}\cos\left[\frac{\pi}{6}(x-3)\right] =$$

$$= 1\cdot\frac{12}{\pi}\cdot 1 = \frac{12}{\pi};$$

rezultă:

$$\lim_{x\to 3}(7-2x)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{6}} = e^{\frac{12}{\pi}}.$$

2.20. Avem:

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right)^{\frac{a}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{a+\sqrt{a^2-x^2}}\right)^{\frac{a}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\left(1+\frac{x}{a+\sqrt{a^2-x^2}}\right)^{\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}}\right]^{\frac{a}{a+\sqrt{a^2-x^2}}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{a}{a+\sqrt{a^2-x^2}}}=e^{\frac{a}{2a}}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}.$$

2.21. Dacă $a\leqslant 0$, limita din enunț este evident $+\infty$. Dacă $a>0$, avem:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3-2x^2+7}-ax+3\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^3-2x^2+7)-(ax-3)^3}{x^2\cdot\sqrt[3]{\left(1-\frac{2}{x}+\frac{7}{x^3}\right)^2}+x^2\sqrt[3]{a-\frac{3}{x}}\sqrt[3]{1-\frac{2}{x}+\frac{7}{x^3}}+x^2\sqrt[3]{\left(a-\frac{3}{x}\right)^2}}=\frac{1}{1+\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{a^2}}\cdot$$

$$\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{(1-a^3)x^3-x^2(2-9a^2)-27ax+34}{x^2}.$$

De aici rezultă că pentru $a>0$ limita din enunț este egală cu:

$+\infty$ dacă $0<a<1$; $\frac{7}{3}$ dacă $a=1$; $-\infty$ dacă $a>1$.

2.22. Trecînd direct la limită se observă că ne situăm în cazul de excepție $\frac{0}{0}$. Procedăm astfel:

$$\lim_{x\to p}\frac{\sqrt{2p^3x-x^4}-p\sqrt[3]{p^2x}}{p-\sqrt[4]{px^3}}=$$

$$=\lim_{x\to p}\frac{\sqrt{2p^3x-x^4}-p^2+p(p-\sqrt[3]{p^2x})}{p-\sqrt[4]{px^3}}. \qquad (1)$$

Însă

$$\sqrt{2p^3x-x^4}-p^2=\frac{2p^3x-x^4-p^4}{\sqrt{2p^3x-x^4}+p^2}=$$

$$=\frac{x(p^3-x^3)-p^3(p-x)}{\sqrt{2p^3x-x^4}+p^2}=$$

$$=\frac{(p-x)[x(p^2+xp+x^2)-p^3]}{\sqrt{2p^3x-x^4}+p^2};$$

$$p-\sqrt[3]{p^2x}=\frac{p^3-p^2x}{p^2+p\sqrt[3]{p^2x}+(\sqrt[3]{p^2x})^2}=$$

$$=\frac{p^2\cdot(p-x)}{p^2+p\sqrt[3]{p^2x}+(\sqrt[3]{p^2x})^2}$$

și

$$p-\sqrt[4]{px^3}=\frac{p^4-px^3}{(p+\sqrt[4]{px^3})(p^2+\sqrt{px^3})}=$$

$$=\frac{p(p-x)(p^2+px+x^2)}{(p+\sqrt[4]{px^3})(p^2+\sqrt{px^3})}.$$

Înlocuind în (1) aceste expresii și simplificînd fracția prin $p-x$, vom obține după trecerea la limită rezultatul:

$$\lim_{x\to p}\frac{\sqrt{2p^3x-x^4}-p\sqrt[3]{p^2x}}{p-\sqrt[4]{px^3}}=\frac{16}{9}p.$$

2.23. Avem:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)+e^x-\cos x}{(1-\sin x)^2-e^{x^2}}=$$

$$=\lim\frac{\ln(1+x)+e^x-1+2\sin^2\frac{x}{2}}{1-e^{x^2}-2\sin x+\sin^2 x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\ln(1+x)}{x}+\frac{e^x-1}{x}+\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x}}{\frac{1-e^{x^2}}{x}-2\frac{\sin x}{x}+\frac{\sin^2 x}{x}}.$$

Dar

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1;\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1;$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x}=0.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{x^2}}{x}=\lim_{x\to 0}x\cdot\frac{1-e^{x^2}}{x^2}=0;\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1;$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x}=0.$$

Rezultă

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)+e^x-\cos x}{(1-\sin x)^2-e^{x^2}}=-1.$$

2.24. Avem:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}(a+x)-\operatorname{arctg}(a-x)}{\operatorname{tg}(a+x)-\operatorname{tg}(a-x)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos(a+x)\cos(a-x)[\operatorname{arctg}(a+x)-\operatorname{arctg}(a-x)]}{\sin 2x}=$$

$$=\cos^2 a\cdot\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin 2x}\cdot\frac{\operatorname{arctg}(a+x)-\operatorname{arctg}(a-x)}{2x}=$$

$$=\cos^2 a\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}(a+x)-\operatorname{arctg}(a-x)}{2x}=$$

$$=\cos^2 a\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}(a+x)-\operatorname{arctg}(a-x)}{\operatorname{tg}[\operatorname{arctg}(a+x)]-\operatorname{tg}[\operatorname{arctg}(a-x)]}=$$

$$=\cos^2 a\cdot\lim_{x\to 0}[\cos\operatorname{arctg}(a+x)]\cdot[\cos\operatorname{arctg}(a-x)]\cdot$$

$$\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}(a+x)-\operatorname{arctg}(a-x)}{\sin[\operatorname{arctg}(a+x)-\operatorname{arctg}(a-x)]}=\frac{\cos^2 a}{1+a^2}.$$

S-a ținut seama că: $\cos(\operatorname{arctg} x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

2.25. a). Prima limită nu există. Într-adevăr, făcînd substituția $x=t+\dfrac{\pi}{3}$ obținem:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}(\sin 6x+\cos 3x)^{\operatorname{ctg} 6x}=\lim_{t\to 0}[\sin(6t+2\pi)+$$

$$+\cos(3t+\pi)]^{\operatorname{ctg}(6t+2\pi)}=\lim_{t\to 0}(\sin 6t-\cos 3t)^{\operatorname{ctg} 6t}=$$

$$=\lim_{t\to 0}(-1)^{\operatorname{ctg} 6t}\lim_{t\to 0}(\cos 3t-\sin 6t)^{\operatorname{ctg} t}.$$

Dar $\lim\limits_{t\to 0}(\cos 3t-\sin 6t)^{\operatorname{ctg} 6t}=e^{-\lim\limits_{t\to 0}(1+\sin 6t-\cos 3t)\operatorname{ctg} 6t}=$

$$=e^{-\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin 6t+2\sin^2\frac{3t}{2}}{\sin 6t}}=e^{-1-\lim\limits_{t\to 0}\frac{2\sin^2\frac{3t}{2}}{\sin 6t}}=e^{-1}\neq 0.$$

Iar $\lim\limits_{t\to 0}(-1)^{\operatorname{ctg} 6t}$ nu există. Într-adevăr, punînd $\operatorname{ctg} 6t = y$ obținem:

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}}(-1)^{\operatorname{ctg} 6t} = \lim_{y\to\infty}(-1)^{y}.$$

Fie acum șirul $\{a_n\}$ dat de termenul general $a_n = n$, evident:

$a_n\to\infty$ și $(-1)^{a_{2n}} = 1$, $(\forall) n\in N$ și deci $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^{a_{2n}}=1$,

iar $(-1)^{a_{2n+1}} = -1$ și deci $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^{a_{2n+1}} = -1.$

Deci prima limită nu există.

b). Avem:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos ax}{\cos ax - 1}\cdot\frac{\cos bx - 1}{\ln\cos bx}\cdot$$

$$\cdot\frac{1-\cos ax}{1-\cos bx} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos ax}{1-\cos bx} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\dfrac{ax}{2}}{\sin^2\dfrac{bx}{2}} = \frac{b^2}{a^2}.$$

2.26. Sîntem în cazul operației fără sens 1^∞. Deci:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}[\sin x(1+2\sin x)]^{\sec 3x} = e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\sin x+2\sin^2 x-1}{\cos 3x}}.$$

Dar:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\sin x+2\sin^2 x-1}{\cos 3x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{(\sin x+1)(2\sin x-1)}{\cos 3x} =$$

$$= \frac{3}{2}\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\sin x-1}{\cos 3x}.$$

Făcînd substituția $x = t + \frac{\pi}{6}$ obținem:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{2\sin x - 1}{\cos 3x} = \lim_{t\to 0} \frac{2\sin\left(t + \frac{\pi}{6}\right) - 1}{\cos\left(3t + \frac{\pi}{2}\right)} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{3}\sin t + \cos t - 1}{\sin 3t} = \sqrt{3}\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{\sin 3t} -$$

$$- \lim_{t\to 0}\frac{2\sin^2\frac{t}{2}}{\sin 3t} = \frac{\sqrt{3}}{3} - \lim_{t\to 0}\frac{1}{6}t\cdot\left(\frac{\sin\frac{t}{2}}{\frac{t}{2}}\right)^2\cdot$$

$$\cdot\frac{3t}{\sin 3t} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Deci $\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} [\sin x\,(1 + 2\sin x)]^{\sec 3x} = e^{\frac{\sqrt{3}}{3}}$.

2.27. Fie $E = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left\{[1 + (1 - \sqrt{\operatorname{tg} x})]^{\frac{1}{1-\sqrt{\operatorname{tg} x}}}\right\}^{A}$ unde

$$A = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1 - \sqrt{\operatorname{tg} x}}{\sin x - \cos x} =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt{\sin x}}{\sqrt{\cos x}(\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x})(\sqrt{\sin x} - \sqrt{\cos x})} =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{-1}{\sqrt{\cos x}(\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x})} = \frac{-1}{2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}};$$ deci

$$E = e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}}.$$

2.28. Avem:

$$\sqrt[m]{x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m} -$$

$$- \sqrt[n]{x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_n} =$$

$$= \left(\sqrt[m]{x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m} - x\right) -$$

$$- \left(\sqrt[n]{x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_n} - x\right) =$$

$$= \frac{a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots + a_m}{\sum_{k=0}^{m-1} \left(\sqrt[m]{x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m}\right)^k x^{m-k-1}} -$$

$$- \frac{b_1 x^{n-1} + b_2 x^{n-2} + \ldots + b_n}{\sum_{k=0}^{n-1} \left(\sqrt[n]{x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_n}\right)^k x^{n-k-1}} =$$

$$= \frac{a_1 + \frac{a_2}{x} + \ldots + \frac{a_m}{x^{m-1}}}{\sum_{k=0}^{m-1} \left(\sqrt[m]{1 + \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_m}{x^m}}\right)^k} -$$

$$- \frac{b_1 + \frac{b_2}{x} + \ldots + \frac{b_n}{x^{n-1}}}{\sum_{k=0}^{n-1} \left(\sqrt[n]{1 + \frac{b_1}{x} + \ldots + \frac{b_n}{x^n}}\right)^k}.$$

Rezultă:

$$\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt[m]{x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m} -\right.$$

$$\left. - \sqrt[n]{x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_n}\right) =$$

$$= \frac{a_1}{m} - \frac{b_1}{n}.$$

2.29. Avem:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n)}{b_1x+b_2x^2+\ldots+b_nx^n}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+a_1x+\ldots+a_nx^n)}{a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n}\times$$

$$\times\frac{a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n}{b_1x+b_2x^2+\ldots+b_nx^n}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+a_1x+\ldots+a_nx^n)}{a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n}\cdot$$

$$\cdot\lim_{x\to 0}\frac{a_1+a_2x^1+\ldots+a_nx^{n-1}}{b_1+b_2x+\ldots+b_nx^{n-1}}=\frac{a_1}{b_1}.$$

2.30. Sîntem în cazul operației fără sens 1^∞. Deci:

$$\lim_{x\to 0}(\cos\sqrt{x})^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos\sqrt{x}-1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-2\sin^2\frac{\sqrt{x}}{2}}{x}}=$$

$$=e^{-\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{\sqrt{x}}{2}}{\frac{\sqrt{x}}{2}}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{e}}.$$

2.31. 1°) Avem:

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin^n x-\sin^n a}{\sin(x-a)}=$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{(\sin x-\sin a)\left(\sum_{k=0}^{n-1}\sin^k x\sin^{n-k-1}a\right)}{\sin(x-a)}=$$

$$=n\sin^{n-1}a\lim_{x\to a}\frac{2\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}}{\sin(x-a)}=$$

$$=n\cdot\cos a\cdot\sin^{n-1}a\cdot\lim_{x\to a}\left(\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}\cdot\frac{x-a}{\sin(x-a)}\right)=$$

$$=n\cdot\cos a\cdot\sin^{n-1}a.$$

2°) Avem:

$$\frac{\operatorname{tg} x - 1}{\sin^4 x - \cos^4 x} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - 1}{\sin^2 x - \cos^2 x} =$$

$$= \frac{(\sin x - \cos x)}{(\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x)\cos x} = \frac{1}{\cos x(\sin x + \cos x)}.$$

Deci

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg} x - 1}{\sin^4 x - \cos^4 x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x(\sin x + \cos x)} = 1.$$

2.32. Facem substituţia $x - \frac{\pi}{2} = t \Rightarrow x = t + \frac{\pi}{2}$.

Cînd $x \to \frac{\pi}{2}$, $t \to 0$. Obţinem:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{x - \frac{\pi}{2}}{\sqrt{1 - \sin x}} = \lim_{t \to 0} \frac{t}{\sqrt{1 - \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right)}} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{t}{\sqrt{1 - \cos t}} = \lim_{t \to 0} \frac{t}{\sqrt{2 \sin^2 \frac{t}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{t \to 0} \frac{t}{\left|\sin \frac{t}{2}\right|}.$$

Calculînd limitele laterale găsim:

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{t}{\left|\sin \frac{t}{2}\right|} = \frac{2}{\sqrt{2}} \lim_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} \frac{\frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}}.$$

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ t < 0}} \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{t}{\left|\sin \frac{t}{2}\right|} = -\frac{2}{\sqrt{2}} \lim_{\substack{t \to 0 \\ t < 0}} \frac{\frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} = -\frac{2}{\sqrt{2}}.$$

Deci limita cerută în enunţ nu există. Limitele laterale sînt diferite. Avem:

$$\lim_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x>\frac{\pi}{2}}} \frac{x-\frac{\pi}{2}}{\sqrt{1-\sin x}} = \frac{2}{\sqrt{2}}; \quad \lim_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x<\frac{\pi}{2}}} \frac{x-\frac{\pi}{2}}{\sqrt{1-\sin x}} = -\frac{2}{\sqrt{2}}.$$

2.33. Avem:

a) $$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \cos 5x}{x \sin 5x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin 2x \cdot \sin 3x}{x \sin 5x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{12}{5} \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \frac{5x}{\sin 5x} = \frac{12}{5}.$$

b) $$\lim_{x\to 0} \frac{\cos 3x - \cos 7x}{x \sin 5x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin 2x \cdot \sin 5x}{x \sin 5x} =$$

$$= 4 \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{2x} = 4.$$

2.34. Avem:

$$\frac{2}{\sin^2 x} - \frac{1}{2\sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{4\sin^2 \frac{x}{2} - \sin^2 x}{2\sin^2 \frac{x}{2} \cdot \sin^2 x} =$$

$$= \frac{4\sin^2 \frac{x}{2} - 4\sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}}{2\sin^2 \frac{x}{2} \sin^2 x} = \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{\sin^2 x} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\frac{x^2}{4}} \cdot \frac{x^2}{\sin^2 x}.$$

Deci:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{\sin^2 x}-\frac{1}{1-\cos x}\right)=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\cdot\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2=\frac{1}{2}.$$

2.35. Avem:

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{\pi-x}\right)^2}}=\lim_{x\to\pi}\frac{\sin\frac{x}{2}\sqrt{(\pi-x)^2}}{\cos\frac{x}{2}\sqrt{2x^2-2\pi x+\pi^2}}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\lim_{x\to\pi}\frac{|x-\pi|}{\cos\frac{x}{2}}.$$

Facem substituția $x-\pi=t$. Cînd $x\to\pi$, $t\to 0$:

$$\frac{1}{\pi}\lim_{x\to\pi}\frac{|x-\pi|}{\cos\frac{x}{2}}=\frac{1}{\pi}\lim_{t\to 0}\frac{|t|}{\cos\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{2}\right)}=-\frac{1}{\pi}\lim_{t\to 0}\frac{|t|}{\sin\frac{t}{2}}.$$

Calculînd limitele laterale avem:

$$l_d=-\frac{1}{\pi}\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}}\frac{t}{\sin\frac{t}{2}}=-\frac{1}{\pi}\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}}2\frac{\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}=-\frac{2}{\pi}.$$

$$l_s=-\frac{1}{\pi}\lim_{\substack{t\to 0\\ t<0}}\frac{t}{\sin\frac{t}{2}}=-\frac{2}{\pi}\lim_{\substack{t\to 0\\ t<0}}\frac{\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}=+\frac{2}{\pi}.$$

Deci limita din enunţ nu există. Limitele laterale sînt diferite:

$$\lim_{\substack{x\to\pi \\ x>\pi}} \frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{\pi-x}\right)^2}} = -\frac{2}{\pi}; \quad \lim_{\substack{x\to\pi \\ x<\pi}} \frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{\pi-x}\right)^2}} = +\frac{2}{\pi}.$$

2.36. Avem:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x\sin x}-\cos 2x}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos^2\frac{x}{2}\,(1-\cos^2 2x + x\sin x)}{\sin^2\frac{x}{2}\left(\sqrt{1+x\sin x}+\cos 2x\right)} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x + x\sin x}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} +$$

$$+ \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{16}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)^2 \cdot$$

$$\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2 + \frac{4}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} =$$

$$= 8 + 2 = 10.$$

2.37. Avem cazul 1^{∞}. Deci:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg} x} = e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin x-1)\sin x}{\cos x}} = e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x-1}{\cos x}}.$$

Facem substituția $x = t + \frac{\pi}{2}$ și obținem:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - 1}{\cos x} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right)-1}{\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right)} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{1-\cos t}{\sin t} = \lim_{t\to 0} \frac{2\sin^2\frac{t}{2}}{\sin t} =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\left[\left(\frac{\sin\frac{t}{2}}{\frac{t}{2}}\right)^2 \cdot \left(\frac{t}{\sin t}\right) \cdot t\right] = 0.$$

Deci $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg} x} = e^0 = 1.$

2.38. Limita din enunț se încadrează în cazul de excepție 1^{∞}.

Avem:

$$\lim_{x\to 0} (\cos x)^{\operatorname{ctg}^2 x} = \lim_{x\to 0}\left\{\left[(1+\cos x - 1)^{\frac{1}{\cos x - 1}}\right]^{(\cos x-1)\operatorname{ctg}^2 x}\right\} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0} -\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{x^2}{\sin^2 x}\cdot\cos^2 x} = e^{-\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

2.39. Sîntem în cazul operației fără sens 1^∞. Avem:

$$\lim_{x\to 0}(1-\sin x)^{\operatorname{ctg} x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{\left[(1-\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}\right]^{\sin x\cdot\frac{\cos x}{\sin x}}\right\}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\cos x}=e^1=e.$$

2.40. Avem:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}[\cos x(1+2\cos x)]^{\operatorname{cosec}3x}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}(1+\cos x+2\cos^2 x-1)^{\operatorname{cosec}3x}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}(1+\cos x+\cos^2 x-\sin^2 x)^{\operatorname{cosec}3x}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}(1+\cos x+\cos 2x)^{\frac{1}{\sin 3x}}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\left\{\left[\left(1+2\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}}}\right]^{\frac{2\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin 3x}}\right\}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{2\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{3x}{2}}}=e^{\frac{\cos\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{2}}}=e^{\frac{\sqrt{3}}{2}}.$$

2.41. Cazul de excepție care apare în calculul acestei limite este $\frac{0}{0}$. Înlăturăm cazul $\frac{0}{0}$, observînd că putem scrie:

$$\sqrt[3]{1+\sin x}-1=\frac{(1+\sin x)-1}{(\sqrt[3]{1+\sin x})^2+\sqrt[3]{1+\sin x}+1}=$$

$$=\frac{\sin x}{(\sqrt[3]{1+\sin x})^2+\sqrt[3]{1+\sin x}+1}.$$

Acum vom avea:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2+x}{\sqrt[3]{1+\sin x}-1} =$$

$$=\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x}(x+1)[(\sqrt[3]{1+\sin x})^2+\sqrt[3]{1+\sin x}+1] =$$

$$= 1\cdot 1\cdot 3 = 3.$$

2.42. Trecînd direct la limită se observă că sîntem în cazul de excepție $\frac{0}{0}$. Procedăm astfel:

$$\lim_{x\to a} \frac{\arcsin(x-a)}{x^n-a^n} = \lim_{x\to a} \frac{\arcsin(x-a)}{x-a}\cdot$$

$$\cdot \frac{1}{x^{n-1}+ax^{n-2}+\ldots+a^{n-1}} = \lim_{y\to 0} \frac{\arcsin y}{y}\cdot$$

$$\cdot \lim_{x\to a} \frac{1}{x^{n-1}+ax^{n-2}+\ldots+a^{n-1}} = 1\cdot \frac{1}{na^{n-1}},$$

unde am notat $y = x - a$.

2.43. Avem:

$$\frac{1+2\cos 2x}{4\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)} = \frac{1+4\cos^2 x-2}{2(\sqrt{3}\cos x+\sin x)} =$$

$$= \frac{(\sqrt{3})^2\cos^2 x-\sin^2 x}{2(\sqrt{3}\cos x+\sin x)} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x =$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right).$$

Rezultă:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\arcsin \dfrac{1+2\cos^2 x}{4\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)}}{\sin 3x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\arcsin\left[\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right)\right]}{\sin 3x} =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\dfrac{1}{3}(\pi-3x)}{\sin(\pi-3x)} = \frac{1}{3}\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\pi-3x}{\sin(\pi-3x)} = \frac{1}{3}.$$

2.44. Limita dată devine succesiv:

$$\lim_{x\to 1} \frac{(x+1)\sqrt{x}+2\sqrt{x}-3x-1}{(x+1)\sqrt{x+3}+14\sqrt{x+3}-6x-26} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{x\sqrt{x}-3x+3\sqrt{x}-1}{(x+3)\sqrt{x+3}-6(x+3)+12\sqrt{x+3}-8} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt{x}-1)^3}{(\sqrt{x+3}-2)^3} = \lim_{x\to 1}\left(\frac{\dfrac{x-1}{\sqrt{x}+1}}{\dfrac{x-1}{\sqrt{x+3}+2}}\right)^3 =$$

$$= \lim_{x\to 1}\left(\frac{\sqrt{x+3}+2}{\sqrt{x}+1}\right)^3 = \left(\frac{\sqrt{1+3}+2}{\sqrt{1}+1}\right)^3 = 8.$$

2.45. Prin metoda inducției matematice se arată mai întîi că

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}\operatorname{tg}\frac{a}{2^k} = \frac{1}{2^n}\operatorname{ctg}\frac{a}{2^n} - \operatorname{ctg} a.$$

Dacă $n\to\infty$ atunci

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{a}{2^n}}{\operatorname{tg}\dfrac{a}{2^n}} - \operatorname{ctg} a = \frac{1}{a} - \operatorname{ctg} a.$$

Cazul particular $a = \frac{\pi}{2}$ ne dă

$$\frac{1}{\pi} = \frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} + \frac{1}{8}\operatorname{tg}\frac{\pi}{8} + \frac{1}{16}\operatorname{tg}\frac{\pi}{16} + \ldots + \frac{1}{2^n}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2^n} + \ldots$$

Termenii din partea a doua fiind repede descrescători, însumînd numai cîțiva termeni de la început, putem avea cu bună aproximație valoarea numărului π.

2.46. Avem:

$$\frac{\sin\frac{x}{2} + \cos x}{1 + \sin^2 x + \cos x} = \frac{-2\sin^2\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2} + 1}{-\cos^2 x + \cos x + 2} =$$

$$= \frac{\left(\sin\frac{x}{2} - 1\right)\left(2\sin\frac{x}{2} + 1\right)}{(\cos x - 2)(\cos x + 1)} = \frac{1 - \sin\frac{x}{2}}{1 + \cos x} \cdot \frac{2\sin\frac{x}{2} + 1}{2 - \cos x} =$$

$$= \frac{1}{2 + 2\sin\frac{x}{2}} \cdot \frac{2\sin\frac{x}{2} + 1}{2 - \cos x} \text{ și deci}$$

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\sin\frac{x}{2} + \cos x}{1 + \sin^2 x + \cos x} = \frac{3}{8}.$$

2.47. Trecînd direct la limită, avem în toate cazurile operația fără sens 1^∞. Avem pe rînd:

$$1).\ \lim_{x\to a}\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}} = e^{\lim\limits_{x\to a}\frac{\frac{\sin x}{\sin a} - 1}{x-a}} =$$

$$= e^{\frac{1}{\sin a}\lim\limits_{x\to a}\frac{2\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}}{x-a}} = e^{\operatorname{ctg} a}.$$

2). $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\cos x}{\cos a}\right)^{\frac{1}{x-a}} = e^{\lim\limits_{x\to a}\frac{\frac{\cos x}{\cos a}-1}{x-a}} =$

$$= e^{\frac{1}{\cos a}\lim\limits_{x\to a}\frac{2\sin\frac{x-a}{2}\sin\frac{x+a}{2}}{x-a}} = e^{-\operatorname{tg} a}.$$

3). $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} a}\right)^{\frac{1}{x-a}} = \lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}\cdot\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\cos a}{\cos x}\right)^{\frac{1}{x-a}} =$

$$= e^{\operatorname{ctg} a+\operatorname{tg} a}.$$

4). $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\operatorname{ctg} x}{\operatorname{ctg} a}\right)^{\frac{1}{x-a}} = \lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\cos x}{\cos a}\right)^{\frac{1}{x-a}}\cdot\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\sin a}{\sin x}\right)^{\frac{1}{x-a}} =$

$$= e^{-\operatorname{tg} a-\operatorname{ctg} a}.$$

5). $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\sec x}{\sec a}\right)^{\frac{1}{x-a}} = \lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\cos a}{\cos x}\right)^{\frac{1}{x-a}} = e^{\operatorname{tg} a}.$

6). $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\operatorname{cosec} x}{\operatorname{cosec} a}\right)^{\frac{1}{x-a}} = \lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\sin a}{\sin x}\right)^{\frac{1}{x-a}} = \dfrac{1}{e^{\operatorname{ctg} a}}.$

2.48. $L = 2.$

2.49. Limita din enunț se încadrează în cazul operației fără sens $\frac{0}{0}$. Notînd însă $\pi - x = y$, se observă că $y > 0$ și $y \to 0$. Vom avea atunci:

$$\lim_{\substack{x\to\pi\\ x<\pi}}\frac{\sin x}{\sqrt{\pi - x}} = \lim_{\substack{y\to 0\\ y>0}}\frac{\sin(\pi - y)}{\sqrt{y}} = \lim_{\substack{y\to 0\\ y>0}}\frac{\sin y}{\sqrt{y}} =$$

$$= \lim_{\substack{y\to 0\\ y>0}}\left(\frac{\sin y}{y}\cdot\sqrt{y}\right) = 1\cdot 0 = 0.$$

2.50. Deoarece:

$$\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}=\frac{\dfrac{\sin 2x}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}}{\dfrac{\sin\frac{\pi}{2}}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}}=$$

$=\sin 2x$. Deci

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\sin 2x)^{\frac{1}{\cos^2 2x}}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left[(1+\sin 2x-1)^{\frac{1}{\sin 2x-1}}\right]^{\frac{\sin 2x-1}{\cos^2 2x}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin 2x-1}{1-\sin^2 2x}}=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(-\frac{1}{1+\sin 2x}\right)}=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}.$$

2.51. Limita din enunț se încadrează în cazul operației fără sens $\frac{0}{0}$. Procedăm astfel:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^3}}{\operatorname{tg} x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-(1-x^3)}{1+\sqrt{1-x^3}}\cdot\frac{1}{\sin x\left(\frac{1}{\cos x}-1\right)}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{1+\sqrt{1-x^3}}\cdot\frac{\cos x}{\sin x(1-\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}}\cdot\lim_{x\to 0}\cos x\cdot\frac{1}{1+\sqrt{1-x^3}}=1\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}}\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=1.$$

2.52. Avem:

$$\frac{\sin 4x}{1-2\sin 2x-\cos 4x}=\frac{\sin 4x}{1-2\sin 2x-(1-2\sin^2 2x)}=$$

$$=\frac{2\sin 2x\cos 2x}{2\sin 2x(\sin 2x-1)}=\frac{\cos 2x}{\sin 2x-1}.$$

Rezultă:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ \text{sau}\\ x\to\pi}}\frac{\sin 4x}{1-2\sin 2x-\cos 4x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ \text{sau}\\ x\to\pi}}\frac{\cos 2x}{\sin 2x-1}=-1.$$

2.53. Avem:

$$0<\frac{\operatorname{tg} x-x}{x^2}<\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^2}=\frac{\operatorname{tg} x(1-\cos x)}{x^2}=$$

$$=\frac{\operatorname{tg} x}{x}\cdot\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x}.$$

Însă $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=1$ și $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{x}=0.$

Rezultă că $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\operatorname{tg} x-x}{x^2}=0.$

S-a folosit rezultatul că pentru orice $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ avem: $\sin x<x<\operatorname{tg} x.$

2.54. Deoarece $x<\operatorname{tg} x$ rezultă că:

$$0<\frac{xe^{-\frac{1}{x}}}{\operatorname{tg}^2 x}<\frac{xe^{-\frac{1}{x}}}{x^2}=\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}.$$

Să calculăm acum:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}=\lim_{y\to\infty}\frac{e^{-y}}{\frac{1}{y}}=\lim_{y\to\infty}\frac{y}{e^y}=0.$$

Rezultă:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{xe^{-\frac{1}{x}}}{\mathrm{tg}^2 x} = 0.$$

2.55. $L = a.$

2.56. a) $m = n = \dfrac{1}{3}$; b) $p = 1$; $q = 2.$

2.57. Avem:

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin\left(mx+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(nx+\frac{\pi}{4}\right)}\right]^{\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\left[\frac{\sin\left(mx+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(nx+\frac{\pi}{4}\right)}-1\right]} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\left(mx+\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(nx+\frac{\pi}{4}\right)}{x\sin\left(nx+\frac{\pi}{4}\right)}}.$$

$$\text{Dar } \lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(mx+\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(nx+\frac{\pi}{4}\right)}{x\sin\left(nx+\frac{\pi}{4}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2\sin\frac{(m-n)x}{2}\cos\left[\frac{(m+n)x}{2}+\frac{\pi}{4}\right]}{x\sin\left(nx+\frac{\pi}{4}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2\sin\frac{(m-n)x}{2}}{x} = (m-n)\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{(m-n)x}{2}}{\frac{(m-n)x}{2}} =$$

$$= m - n.$$

Deci

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin\left(mx+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(nx+\frac{\pi}{4}\right)}\right]^{\frac{1}{x}} = e^{m-n}.$$

2.58. Avem:

$$\lim_{x\to 0}(2-\sqrt[3]{\cos x}\cdot\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt[3]{\cos x}\,\cos 2x}{x^2}}.$$

Dar

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt[3]{\cos x}\,\cos 2x}{x^2} =$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\sqrt[3]{\cos x})+\sqrt[3]{\cos x}\,(1-\cos 2x)}{x^2} =$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt[3]{\cos x}}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2} =$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\sqrt[3]{\cos x}+\sqrt[3]{\cos^3 x}}+$$

$$+\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x^2}=$$

$$=\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2+2=2+\frac{1}{6}=\frac{13}{6}.$$

Deci $\lim\limits_{x\to 0}(2-\sqrt[3]{\cos x}\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{13}{6}} = \sqrt[6]{e^{13}}.$

2.59. Avem:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (\sec x - \operatorname{cosec} 2x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\sin 2x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin x - 1}{\sin 2x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (2\sin x - 1) \cdot \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin 2x} =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin 2x}, \text{ și cum:}$$

$$\lim_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x<\frac{\pi}{2}}} \frac{1}{\sin 2x} = +\infty, \text{ iar } \lim_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x>\frac{\pi}{2}}} \frac{1}{\sin 2x} = -\infty,$$

rezultă că nu există

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (\sec x - \operatorname{cosec} 2x).$$

2.60. Limita dată devine succesiv:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\sec^2 \sqrt{x})}{2x} = \lim_{x\to 0} \ln(\sec^2 \sqrt{x})^{\frac{1}{2x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \ln(1 + \operatorname{tg}^2 \sqrt{x})^{\frac{1}{2x}} =$$

$$= \ln\left\{\lim_{x\to 0}\left[(1 + \operatorname{tg}^2 \sqrt{x})^{\frac{1}{\operatorname{tg}^2 \sqrt{x}}}\right]^{\frac{\operatorname{tg}^2 \sqrt{x}}{2x}}\right\} =$$

$$= \ln\left(e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}^2 \sqrt{x}}{2x}}\right) = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{tg} \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

2.61. Avem:

$$\lim_{x\to 1}\frac{nx(x^m-1)-mx(x^n-1)}{(x-1)^2}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{nx(x-1)(x^{m-1}+\ldots+1)-mx\cdot(x-1)(x^{n-1}+\ldots+1)}{(x-1)^2}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{nx(x^{m-1}+x^{m-2}+\ldots+1)-mx(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+1)}{x-1}.$$

Dar

$$nx(x^{m-1}+\ldots+1)-mx(x^{n-1}+\ldots+1)=$$

$$=nx[(x^{m-1}-1)+(x^{m-2}-1)+\ldots+(x-1)+m]-$$

$$-mx[(x^{n-1}-1)+(x^{n-2}-1)+\ldots+(x-1)+n]=$$

$$=nx[(x^{m-1}-1)+(x^{m-2}-1)+\ldots+(x-1)]-$$

$$-mx[(x^{n-1}-1)+(x^{n-2}-1)+\ldots+(x-1)]$$ și

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^p-1}{x-1}=p.$$ Rezultă:

$$\lim_{x\to 1}\frac{nx(x^m-1)-mx(x^n-1)}{(x-1)^2}=n\left(\lim_{x\to 1}\frac{x^{m-1}-1}{x-1}+\right.$$

$$\left.+\ldots+\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x-1}\right)-m\left(\lim_{x\to 1}\frac{x^{n-1}-1}{x-1}+\ldots+\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x-1}\right)=$$

$$=n[(m-1)+(m-2)+\ldots+1]-m[(n-1)+$$

$$+(n-2)+\ldots+1]=\frac{n(m-1)m}{2}-\frac{m(n-1)n}{2}=$$

$$=\frac{mn}{2}(m-n).$$

2.62. Facem substituția $x - 1 = t \Rightarrow x = t + 1$. Cînd $x \to 1$, $t \to 0$.

$$\lim_{x\to 1} \frac{Ax^n + Bx^p + C}{(x-1)^2} = \lim_{t\to 0} \frac{A(1+t)^n + B(1+t)^p + C}{t^2} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{(A+B+C) + t(nA+pB) + t^2(C_n^2 A + C_p^2 B) + t^3 P(t)}{t^2} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{t^2(C_n^2 A + C_p^2 B) + t^3 P(t)}{t^2} =$$

$$= \lim_{t\to 0} [(C_n^2 A + C_p^2 B) + tP(t)] = C_n^2 A + C_p^2 B =$$

$$= \frac{n(n-1)A + p(p-1)B}{2}.$$

$P(t)$ este un polinom de gradul $[\max(n,p) - 3]$ în t.

2.63. Notînd $x - 1 = y$, cînd $x \to 1$, avem: $y \to 0$. Limita devine:

$$\lim_{y\to 0} \frac{(y+1)^n + (2n-7)\cdot(y+1)^{n-1} - 2(n-2)\cdot}{y^2}$$

$$\frac{\cdot (y+1)^{n-2} + y + 2}{y^2}.$$

În polinomul de la numărătorul fracției de mai sus, termenul liber este:

$$1 + (2n-7)\cdot 1 - 2(n-2)\cdot 1 + 2 = 0,$$

coeficientul lui y este

$$C_n^{n-1} + (2n-7)\cdot C_{n-1}^{n-2} - 2(n-2)\cdot C_{n-2}^{n-3} + 1 =$$

$$= n + (2n-7)\cdot(n-1) - 2(n-2)^2 + 1 = 0,$$

iar coeficientul lui y^2 este

$$C_n^{n-2} + (2n - 7) \cdot C_{n-1}^{n-3} - 2(n - 2) \cdot C_{n-2}^{n-4} =$$

$$= C_n^2 + (2n - 7)C_{n-1}^2 - 2(n - 2)C_{n-2}^2 =$$

$$= \frac{n(n-1)}{2} + \frac{(2n-7)(n-1)(n-2)}{2} -$$

$$- 2\frac{(n-2)^2 \cdot (n-1)}{2} = -(n^2 - 4n + 3).$$

De aici rezultă că limita din enunț este egală cu $-(n^2 - 4n + 3)$.

2.64. Trecînd direct la limită obținem operația fără sens $\frac{0}{0}$. Deoarece:

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-5} = \frac{x^{n-4} - 1}{x - 1}, \text{ vom avea:}$$

$$\frac{x(x^{n-1} + 1) + 3x^2(x^{n-3} + 1) + 4x^3(x^{n-5} + \ldots + x + 1)}{(x+1)^2} =$$

$$= \frac{1}{x-1} \cdot \frac{x(x^{n-1} + 1)(x - 1) + 3x^2(x^{n-3} + 1)(x - 1) +}{(x+1)^2}$$

$$\ldots \frac{+ 4x^3(x^{n-4} - 1)}{(x+1)^2} = \frac{1}{x-1} \cdot$$

$$\cdot \frac{x^{n+1} + 2x^n + x^{n-1} - x^3 - 2x^2 - x}{(x+1)^2} =$$

$$= \frac{1}{x-1} \cdot \frac{x^{n-1}(x^2 + 2x + 1) - x(x^2 + 2x + 1)}{(x+1)^2} =$$

$$= \frac{1}{x-1} \cdot (x^{n-1} - x).$$

Rezultă:

$$\lim_{x \to -1} \frac{x(x^{n-1}+1)+3x^2(x^{n-3}+1)+4x^3(x^{n-5}+x^{n-6}+\ldots+x+1)}{(x+1)^2} =$$

$$= \lim_{x \to -1} \frac{x}{x-1}(x^{n-2}-1) = \frac{(-1)^{n-2}-1}{2} = \frac{(-1)^n - 1}{2}.$$

2.65. Facem substituția $x - 1 = t \Rightarrow x = t + 1$. Cînd $x \to 1$, $t \to 0$.
Avem:

$$np(n-p)x^m + pm(p-m)x^n + mn(m-n)x^p + (m-n)(n-p)(p-m) = np(n-p)(1+t)^m + pm(p-m)(1+t)^n + mn(m-n)(1+t)^p + (m-n)(n-p)(p-m) = np(n-p)(1 + C_m^1 t + C_m^2 t^2 + C_m^3 t^3 + \ldots) + pm(p-m)(1 + C_n^1 t + C_n^2 t^2 + C_n^3 t^3 + \ldots) + mn(m-n)(1 + C_p^1 t + C_p^2 t^2 + C_p^3 t^3 + \ldots) + (m-n)(n-p)(p-m) = [np(n-p) + pm(p-m) + mn(m-n) + (m-n)(n-p)(p-m)] + t[mnp(m-n) + mnp(n-p) + mnp(p-m)] + \frac{t^2}{2}[mnp(m-1)(n-p) + mnp(n-1)(p-m) + mnp(p-1)(m-n)] + \frac{t^3}{3}[mnp(m-1)(m-2)(n-p) + mnp(n-1)(n-2)(p-m) + mnp(p-1)(p-2)(m-n)] + t^4P(t) =$$

$$= -t^3 \frac{mnp(m-n)(n-p)(p-m)}{3} + t^4P(t).$$

Cu $P(t)$ am notat un polinom în t de gradul: $\max(m, n, p) - 4$. Rezultă:

$$\lim_{x \to 1} \frac{np(n-p)x^m + pm(p-m)x^n + mn(m-n)x^p +}{(x-1)^3}$$

$$\ldots \frac{+ (m-n)(n-p)(p-m)}{(x-1)^3} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{-t^3 \dfrac{mnp(m-n)(n-p)(p-m)}{3} + t^4P(t)}{t^3} =$$

$$= -\frac{mnp(m-n)(n-p)(p-m)}{3}.$$

2.66. Notînd:

$$a_n = \underbrace{\sqrt{\sin^2 x - \frac{1}{4} + \sqrt{\sin^2 x - \frac{1}{4} + \ldots}}}_{n \text{ radicali}},$$ vom avea

$a_n > 0$ pentru orice $n \in N$ și $a_n^2 = \sin^2 x - \frac{1}{4} + a_{n-1}$.

Cum

$$a_1 = \sqrt{\sin^2 x - \frac{1}{4}}, \quad a_2 = \sqrt{\sin^2 x - \frac{1}{4} + \sqrt{\sin^2 x - \frac{1}{4}}},$$

rezultă:

$$a_2 - a_1 = \frac{\sqrt{\sin^2 x - \dfrac{1}{4}}}{a_1 + a_2} \geqslant 0.$$

Deoarece

$$a_n - a_{n-1} = \frac{a_n^2 - a_{n-1}^2}{a_n + a_{n-1}} = \frac{a_{n-1} - a_{n-2}}{a_n + a_{n-1}},$$

prin inducție se obține că $a_n \geqslant a_{n-1}$, $n \in N - \{1\}$.

Șirul $(a_n)_{n\in N}$ este deci monoton crescător. El este și mărginit. Într-adevăr, din:

$$a_n^2 = \sin^2 x - \frac{1}{4} + a_{n-1} \leqslant \sin^2 x - \frac{1}{4} + a_n,$$

rezultă că:

$$a_n^2 - a_n + \frac{1}{4} - \sin^2 x \leqslant 0,$$

de unde

$$0 \leqslant a_n \leqslant \frac{1 + 2\sin x}{2}.$$

Fiind monoton și mărginit, șirul $(a_n)_{n \in N}$ este convergent.

Trecînd la limită, în relația de recurență vom obține:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1 + 2\sin x}{2}, \quad \text{astfel că: } \lim_{x \to \frac{\pi}{3}} f(x) = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}.$$

2.67. Vom demonstra prin inducție completă că:

$$\lim_{x\to\infty} y_n(x) = \lim_{x\to\infty} z_n(x) = \infty, \quad (\forall) n \in N. \qquad (1)$$

Într-adevăr pentru $n = 1$: $\lim\limits_{x\to\infty} y_1(x) = \lim\limits_{x\to\infty} z_1(x) = \lim\limits_{x\to\infty} x = \infty$.

Să arătăm că relația (1) este îndeplinită pentru $n = k + 1$ în ipoteza că $(\forall) n \in \{1, 2, \ldots\ldots, k\}$. Dar

$$\lim_{x\to\infty} y_{k+1}(x) = \lim_{x\to\infty} [z_k(x) + 1]^{y_k(x)} = \infty \quad \text{iar}$$

$$\lim_{x\to\infty} z_{k+1}(x) = \lim_{x\to\infty} z_k(x)^{y_k(x)} = \infty.$$

Cu aceasta relația (1) este demonstrată. Atunci:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{y_n(x)}{z_n(x)} = \lim_{x\to\infty} \left[1 + \frac{1}{z_{n-1}(x)}\right]^{y_{n-1}(x)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{y_{n-1}(x)}{z_{n-1}(x)}}.$$

Analog găsim:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{y_{n-1}(x)}{z_{n-1}(x)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{y_{n-2}(x)}{z_{n-2}(x)}}; \ldots; \quad \lim_{x\to\infty} \frac{y_2(x)}{z_2(x)} = e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{y_1(x)}{z_1(x)}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{x}} = e,$$

Rezultă deci că:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{y_n(x)}{z_n(x)} = e^{e^{e^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{e}}}}}} \quad \text{unde } e \text{ apare de } (n-1) \text{ ori.}$$

2.68. Trecînd direct la limită, se observă că ne situăm în cazul operației fără sens 1^{∞}. Procedăm astfel:

$$\lim_{x\to a} (\log_b \log_a x^b)^{\frac{1}{x-a}} = \lim_{x\to a} (1 + \log_b \log_a x^b - 1)^{\frac{1}{x-a}} =$$

$$= \lim_{x\to a} (1 + \log_b \log_a x^b - \log_b b)^{\frac{1}{x-a}} =$$

$$= \lim_{x\to a} \left[(1 + (\log_b \log_a x))^{\frac{1}{\log_b \log_a x}}\right]^{\frac{\log_b \log_a x}{x-a}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to a} \frac{\log_b \log_a x}{x-a}} = e^{\lim\limits_{x\to a} \frac{\ln(\log_a x)}{(\ln b)(x-a)}} =$$

$$= e^{\frac{1}{\ln b} \cdot \lim\limits_{x\to a} \frac{\ln(1+\log_a x - 1)}{\log_a x - 1} \cdot \frac{\log_a x - 1}{x-a}}.$$

Însă, notînd $y = \log_a \frac{x}{a}$, se observă că atunci cînd $x \to a$, $y \to 0$.

Rezultă:

$$\lim_{x\to a} \frac{\ln(1+\log_a x - 1)}{\log_a x - 1} = \lim_{x\to a} \frac{\ln\left(1 + \log_a \frac{x}{a}\right)}{\log_a \frac{x}{a}} =$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{\ln(1+y)}{y} = \lim_{y\to 0} \ln (1+y)^{\frac{1}{y}} = 1.$$

Apoi:

$$\lim_{x\to a} \frac{\log_a x - 1}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{\log_a x - \log_a a}{x-a} = \frac{1}{a \ln a};$$

deci:

$$\lim_{x\to a}(\log_b \log_a x^b)^{\frac{1}{x-a}} = e^{\frac{1}{a\cdot\ln a\cdot\ln b}}.$$

2.69. Trecînd direct la limită, se observă că sîntem în cazul operației fără sens $\frac{0}{0}\cdot$ Însă putem scrie:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+\sin^2 x}-\sqrt[5]{4-3\cos x}}{\sqrt[3]{1+x\sin x}-\sqrt[5]{\cos^2 x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt[3]{1+\sin^2 x}-1)-(\sqrt[5]{4-3\cos x}-1)}{(\sqrt[3]{1+x\sin x}-1)-(\sqrt[5]{\cos^2 x}-1)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sqrt[3]{1+\sin^2 x}-1}{x^2}-\dfrac{\sqrt[5]{4-3\cos x}-1}{x^2}}{\dfrac{\sqrt[3]{1+x\cdot\sin x}-1}{x^2}-\dfrac{\sqrt[5]{\cos^2 x}-1}{x^2}};$$

și cum

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+\sin^2 x}-1}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{(1+\sin^2 x)-1}{(\sqrt[3]{1+\sin^2 x})^2+(\sqrt[3]{1+\sin^2 x}+1}\cdot\frac{1}{x^2}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{(\sqrt[3]{1+\sin^2 x})^2+\sqrt[3]{1+\sin^2 x}+1} =$$

$$= 1\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3};$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{4-3\cos x}-1}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{(4-3\cos x)-1}{(\sqrt[5]{4-3\cos x})^4+(\sqrt[5]{4-3\cos x})^3+\ldots+1}\cdot\frac{1}{x^2}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(3\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}\right)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{(\sqrt[5]{4-3\cos x})^4+\ldots+1} =$$

$$= 3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}=\frac{3}{10};$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x\cdot\sin x}-1}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{(1+x\cdot\sin x)-1}{(\sqrt[3]{1+x\cdot\sin x})^2+\sqrt[3]{1+x\cdot\sin x}+1}\cdot\frac{1}{x^2}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{(\sqrt[3]{1+x\cdot\sin x})^2+\sqrt[3]{1+x\cdot\sin x}+1} =$$

$$= 1\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3};$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{\cos^2 x}-1}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-1}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{(\sqrt[5]{\cos^2 x})^4+(\sqrt[5]{\cos^2 x})^3+\ldots+1} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(-\frac{1-\cos x}{x^2}\right)\cdot\lim_{x\to 0}(1+\cos x)\cdot$$

$$\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{(\sqrt[5]{\cos^2 x})^4+(\sqrt[5]{\cos^2 x})^3+\ldots+1} =$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 2\cdot\frac{1}{5}=-\frac{1}{5},$$

rezultă:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+\sin^2 x}-\sqrt[5]{4-3\cos x}}{\sqrt[3]{1+x\sin x}-\sqrt[5]{\cos^2 x}}=\frac{\frac{1}{3}-\frac{3}{10}}{\frac{1}{3}-\left(-\frac{1}{5}\right)}=\frac{1}{16}.$$

2.70. Făcînd substituția $x - \frac{\pi}{2} = y$, obținem:

$$L = \lim_{\substack{y \to 0 \\ y > 0}} \frac{\sqrt{-\ln|\cos y|}}{y} = \lim_{\substack{y \to 0 \\ y > 0}} \sqrt{\frac{-\ln(\cos y)}{y^2}} =$$

$$= \lim_{\substack{y \to 0 \\ y > 0}} \sqrt{\frac{-\ln(\cos y)}{\cos y - 1} \cdot \frac{\cos y - 1}{y^2}} = \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

2.71. Ținînd seama că $\lim_{y \to 0} \frac{a^y - 1}{y} = \ln a, \quad (a > 0)$

avem:

$$\lim_{x \to 1} \frac{a^{x^2-1} - 1}{\sin(x^2 - 3x + 2)} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \left(\frac{a^{x^2-1} - 1}{x^2 - 1} \cdot \frac{x^2 - 3x + 2}{\sin(x^2 - 3x + 2)} \cdot \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2} \right) =$$

$$= \ln a \cdot 1 \cdot \lim_{x \to 1} \frac{x + 1}{x - 2} = -2 \ln a.$$

2.72. Să arătăm mai întîi că

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ (a > 0)}} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a.$$

Într-adevăr, notînd $a^x - 1 = y \Leftrightarrow a^x = 1 + y$, se observă că pentru $x \to 0$ avem $y \to 0$. Atunci:

$$\ln a^x = \ln(1 + y) \Rightarrow x = \frac{\ln(1 + y)}{\ln a},$$

de unde

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{y \to 0} \frac{y}{\frac{\ln(1 + y)}{\ln a}} =$$

$$= \ln a \cdot \frac{1}{\ln \lim_{y \to 0} (1 + y)^{\frac{1}{y}}} = \frac{\ln a}{\ln e} = \ln a.$$

Limita din enunț devine:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{p_1^{\alpha_1 x}+p_2^{\alpha_2 x}+\ldots+p_n^{\alpha_n x}}{n}\right)^{\frac{1}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{1+\frac{[(p_1^{\alpha_1})^x-1]+[(p_2^{\alpha_2})^x-1]+\ldots+[(p_n^{\alpha_n})^x-1]}{n}\right\}^{\frac{1}{x}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{n}\left[\frac{(p_1^{\alpha_1})^x-1}{x}+\frac{(p_2^{\alpha_2})^x-1}{x}+\ldots+\frac{(p_n^{\alpha_n})^x-1}{x}\right]}=$$

$$=e^{\frac{1}{n}\left[\ln p_1^{\alpha_1}+\ln p_2^{\alpha_2}+\ldots+\ln p_n^{\alpha_n}\right]}=e^{\ln\left(p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\ldots p_n^{\alpha_n}\right)^{\frac{1}{n}}}=$$

$$=\sqrt[n]{p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_n^{\alpha_n}}.$$

2.73. Din enunț rezultă

$$\sqrt[p]{x_0^p+a_1x_0^{p-1}+\ldots+a_p}=$$

$$=\sqrt[q]{x_0^q+b_1x_0^{q-1}+\ldots+b_q}.$$

Ținînd seama că $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{x^a-x_0^a}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}(x^{a-1}+x_0x^{a-2}+$ $+\ldots+x_0^{a-1})=a\cdot x_0^{a-1}$, $(a\in N)$ vom avea:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\sqrt[p]{x^p+a_1x^{p-1}+\ldots+a_p}-\sqrt[q]{x^q+b_1x^{q-1}+\ldots+b_q}}{x-x_0}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{\sqrt[p]{x^p+a_1x^{p-1}+\ldots+a_p}-\sqrt[p]{x_0^p+a_1x_0^{p-1}+\ldots+a_p}}{x-x_0}-$$

$$-\lim_{x\to x_0}\frac{\sqrt[q]{x^q+b_1x^{q-1}+\ldots+b_q}-\sqrt[q]{x_0^q+b_1x_0^{q-1}+\ldots+b_q}}{x-x_0}.$$

Dar

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\sqrt[p]{x^p+a_1x^{p-1}+\ldots+a_p}-\sqrt[p]{x_0^p+a_1x_0^{p-1}+\ldots+a_p}}{x-x_0}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{(x^p-x_0^p)+a_1(x^{p-1}-x_0^{p-1})+\ldots+a_{p-1}(x-x_0)}{(x-x_0)[(\sqrt[p]{x^p+\ldots+a_p})^{p-1}+\ldots+(\sqrt[p]{x_0^p+\ldots+a_p})^{p-1}]}=$$

$$=\frac{1}{p\cdot(\sqrt[p]{x_0^p+\ldots+a_p})^{p-1}}\left[\lim_{x\to x_0}\frac{x^p-x_0^p}{x-x_0}+\right.$$

$$\left.+a_1\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{x^{p-1}-x_0^{p-1}}{x-x_0}+\ldots+a_{p-1}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{x-x_0}{x-x_0}\right]=$$

$$=\frac{p\cdot x_0^{p-1}+a_1\cdot(p-1)\cdot x^{p-2}+\ldots+a_{p-1}}{p\cdot(\sqrt[p]{x_0^p+\ldots+a_p})^{p-1}}.$$

Rezultă:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\sqrt[p]{x^p+a_1x^{p-1}+\ldots+a_p}-\sqrt[q]{x^q+b_1x^{q-1}+\ldots+b_q}}{x-x_0}=$$

$$=\frac{px_0^{p-1}+a_1(p-1)x_0^{p-2}+\ldots+a_{p-1}}{p(\sqrt[p]{x_0^p+\ldots+b_p})^{p-1}}-$$

$$-\frac{qx_0^{q-1}+b_1(q-1)x_0^{q-2}+\ldots+b_q}{q(\sqrt[q]{x_0^q+\ldots+b_q})^{q-1}};$$

sau, dacă notăm $P(x)=x^p+a_1x^{p-1}+\ldots+a_p$, $Q(x)=x^q+b_1x^{q-1}+\ldots+b_q$ avem:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\sqrt[p]{P(x)}-\sqrt[q]{Q(x)}}{x-x_0}=$$

$$=\frac{P'(x_0)}{p}\cdot\frac{1}{(\sqrt[p]{P(x_0)})^{p-1}}-\frac{Q'(x_0)}{q(\sqrt[q]{Q(x_0)})^{q-1}}$$

(dacă $[P(x_0)]^q=[Q(x_0)]^p$.

În particular rezultă:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[5]{x^5-5x^3+9}-\sqrt[4]{x^4+x^3-23}}{x-2}=-7.$$

2.74. Ținînd seama că $\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$ avem:

$$\lim_{x\to a}\frac{\operatorname{tg}\sqrt[n]{P(x)}-\operatorname{tg}\sqrt[n]{Q(x)}}{\operatorname{tg}(x-a)}=$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\sin\left[\sqrt[n]{P(x)}-\sqrt[n]{Q(x)}\right]\cos(x-a)}{\sin(x-a)\cos\sqrt[n]{P(x)}\cos\sqrt[n]{Q(x)}}=$$

$$=\frac{1}{\cos^2\sqrt[n]{P(a)}}\lim_{x\to a}\frac{\sin\left[\sqrt[n]{P(x)}-\sqrt[n]{Q(x)}\right]}{\sin(x-a)}=$$

$$=\frac{1}{\cos^2\sqrt[n]{P(a)}}\lim_{x\to a}\left[\frac{\sin\left[\sqrt[n]{P(x)}-\sqrt[n]{Q(x)}\right]}{\sqrt[n]{P(x)}-\sqrt[n]{Q(x)}}\cdot\frac{x-a}{\sin(x-a)}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\frac{\sqrt[n]{P(x)}-\sqrt[n]{Q(x)}}{x-a}\right]=\frac{1}{\cos^2\sqrt[n]{P(a)}}\lim_{x\to a}\frac{\sqrt[n]{P(x)}-\sqrt[n]{Q(x)}}{x-a}=$$

$$=\frac{1}{\cos^2\sqrt[n]{P(a)}}\lim_{x\to a}\left(\frac{P(x)-Q(x)}{x-a}\cdot\frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n-1}\sqrt[n]{P^k(x)Q^{n-k-1}(x)}}\right)=$$

$$=\frac{1}{\left[\cos^2\sqrt[n]{P(a)}\right]\cdot n\sqrt[n]{P^{n-1}(a)}}\cdot\lim_{x\to a}\frac{P(x)-Q(x)}{x-a}.$$

Dar

$$\lim_{x\to a}\frac{P(x)-Q(x)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{P(x)-P(a)}{x-a}-$$

$$-\lim_{x\to a}\frac{Q(x)-Q(a)}{x-a}=P'(a)-Q'(a).$$

Rezultă:

$$\lim_{x\to a}\frac{\operatorname{tg}\sqrt[n]{P(x)}-\operatorname{tg}\sqrt[n]{Q(x)}}{\operatorname{tg}(x-a)}=\frac{P'(a)-Q'(a)}{n\sqrt[n]{P^{n-1}(a)}\cos^2\sqrt[n]{P(a)}}.$$

2.75. Notînd $E_n = \dfrac{\operatorname{tg}(a+x)\ldots\operatorname{tg}(a+nx) - \operatorname{tg}^n a}{x}$

vom avea:

$$E_n = \frac{\operatorname{tg}(a+x)\ldots\operatorname{tg}(a+nx) - \operatorname{tg}(a+nx)\operatorname{tg}^{n-1}a -}{x}$$

$$\ldots\frac{-\operatorname{tg}^n a + \operatorname{tg}(a+nx)\operatorname{tg}^{n-1}a}{x} =$$

$$= \operatorname{tg}(a+nx)\cdot E_{n-1} + \operatorname{tg}^{n-1}a\cdot\frac{\operatorname{tg}(a+nx) - \operatorname{tg}a}{x}.$$

Dar

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}(a+nx)-\operatorname{tg}a}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{(\sin nx)\cdot n}{nx\cdot\cos(a+nx)\cos a} =$$

$$= \frac{n}{\cos^2 a}, \text{ iar}$$

$$\lim_{x\to 0} E_1 = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}(a+x)-\operatorname{tg}a}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{\cos(a+x)\cos a} = \frac{1}{\cos^2 a}.$$

Vom avea:

$$\lim_{x\to 0} E_2 = \operatorname{tg}a\cdot\frac{1}{\cos^2 a} + \operatorname{tg}a\cdot\frac{2}{\cos^2 a} = \frac{(1+2)\operatorname{tg}a}{\cos^2 a},$$

$$\lim_{x\to 0} E_3 = \operatorname{tg}a\cdot\frac{(1+2)\operatorname{tg}a}{\cos^2 a} + \operatorname{tg}^2 a\cdot\frac{3}{\cos^2 a} =$$

$$= \frac{(1+2+3)\operatorname{tg}^2 a}{\cos^2 a}.$$

Presupunînd acum că:

$$\lim_{x\to 0} E_n = \frac{(1+2+\ldots+n)\cdot\operatorname{tg}^{n-1}a}{\cos^2 a} = \frac{n(n+1)}{2}\times$$

$$\times\frac{\operatorname{tg}^{n-1}a}{\cos^2 a},$$

obținem:

$$\lim_{x\to 0} E_{n+1} = \text{tg}\, a \cdot \frac{(1+2+\ldots+n)\,\text{tg}^{n-1} a}{\cos^2 a} + \text{tg}^n a \times$$

$$\times \frac{n+1}{\cos^2 a} = \frac{[1+2+\ldots+(n+1)]\,\text{tg}^n a}{\cos^2 a} =$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \cdot \frac{\text{tg}^n a}{\cos^2 a}.$$

Cu aceasta, demonstrația prin inducție a valorii limitei s-a terminat. Deci:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\prod_{k=1}^{n} \text{tg}\,(a+kx) - \text{tg}^n a}{x} = \frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{\text{tg}^{n-1} a}{\cos^2 a}.$$

În cazul $n = 3$ și $l = 72$ obținem $a = \frac{\pi}{3}$ sau $a = \frac{2\pi}{3}$.

2.76. Calculînd $\lim_{x\to 0} f(x)$ obținem $g(0) = \alpha$, deci funcția căutată este $g : R \to R$, dată de legea

$$g(x) = \begin{cases} f(x), \text{ dacă } x \in R - \{0\} \\ \alpha, \text{ dacă } x = 0. \end{cases}$$

2.77. Avem:

$$\frac{1}{nx} \log_a \prod_{k=1}^{n} \sqrt[k]{1+kx} = \frac{1}{n}\left[\sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{1}{k}\log_a (1+kx)}{x}\right].$$

Dacă ținem seama că dacă $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, atunci:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln [1+f(x)]}{f(x)} = 1, \text{ obținem}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{k}\log_a (1+kx)}{x} = \log_a e \lim_{x\to 0} \frac{\ln (1+kx)}{kx} = \frac{1}{\ln a}.$$

Rezultă:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{nx} \log_a \prod_{k=1}^{n} \sqrt[k]{1+kx} = \frac{1}{\ln a}.$$

2.78. Se ține seama că dacă $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ atunci $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin f(x)}{f(x)} = 1$. Notăm $f(x) = a\pi[\cos(b \arcsin x) - 1]$. Avem $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$. Deci

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin f(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin f(x)}{f(x)} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2} =$$

$$= a\pi \lim_{x\to 0} \frac{\cos(b \arcsin x) - 1}{x^2}.$$

Facem substituția $x = \sin t$; cînd $x \to 0$, $t \to 0$ și $\sin t \to 0$. Obținem:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin f(x)}{x^2} = a\pi \lim_{x\to 0} \frac{\cos(b \arcsin x) - 1}{x^2} =$$

$$= a\pi \lim_{t\to 0} \frac{\cos bt - 1}{\sin^2 t} = a\pi \lim_{t\to 0} \left[\left(\frac{t}{\sin t}\right)^2 \cdot\right.$$

$$\left.\cdot\left(\frac{-2\sin^2\frac{bt}{2}}{t^2}\right)\right] = a\pi \lim_{t\to 0} \frac{1}{\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2} \cdot \lim_{t\to 0} \frac{-2\sin^2\frac{bt}{2}}{t^2} =$$

$$= -a\pi \lim_{t\to 0} \left(\frac{b^2}{2} \cdot \frac{\sin^2\frac{bt}{2}}{\frac{b^2t^2}{4}}\right) = -\frac{ab^2\pi}{2} \cdot \lim_{t\to 0} \left(\frac{\sin\frac{bt}{2}}{\frac{bt}{2}}\right)^2 =$$

$$= -\frac{ab^2\pi}{2}.$$ Deci

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin\{a\pi[\cos(b \arcsin x) - 1]\}}{x^2} = -\frac{ab^2\pi}{2}.$$

2.79. a). Să determinăm domeniul maxim al funcțiilor f și g. Din condițiile de existență ale funcției f obținem:

$x \neq 2$ și $\log_c (x^2 - 3)c > 0 \Rightarrow (x^2 - 3)c > 1 \Rightarrow x^2 > 3 + \frac{1}{c} \Rightarrow x \in \left(-\infty, -\sqrt{3 + \frac{1}{c}}\right) \cup \left(\sqrt{3 + \frac{1}{c}}, \infty\right)$

și cum $2 > \sqrt{3 + \frac{1}{c}}$, rezultă că domeniul maxim al funcției f este:

$$E_f = \left(-\infty, -\sqrt{3 + \frac{1}{c}}\right) \cup \left(\sqrt{3 + \frac{1}{c}}, 2\right) \cup (2, +\infty).$$

Procedînd analog pentru funcția g, găsim că domeniul maxim al funcției g este:

$$E_g = \left(-\sqrt{3 + \frac{1}{a}}, \sqrt{3 + \frac{1}{a}}\right) - \{2\}.$$

Cum $\sqrt{3 + \frac{1}{a}} > \sqrt{3 + \frac{1}{c}}$ deducem că domeniul maxim al funcției $f(x) + g(x)$ este

$$E_{max} = \left(-\sqrt{3 + \frac{1}{a}}, -\sqrt{3 + \frac{1}{c}}\right) \cup$$

$$\cup \left(\sqrt{3 + \frac{1}{c}}, 2\right) \cup \left(2, \sqrt{3 + \frac{1}{a}}\right).$$

b). Avem:

$$\lim_{x \to 2} \frac{\log_a \log_c [(x^2 - 3)c]}{x - 2} =$$

$$= \frac{1}{\ln a} \lim_{x \to 2} \left[\frac{\ln [1 + \log_c (x^2 - 3)]}{\log_c (x^2 - 3)} \cdot \frac{\log_c (x^2 - 3)}{x - 2}\right] =$$

$$= \frac{1}{\ln a} \lim_{x \to 2} \frac{\log_c (x^2 - 3)}{x - 2} = \frac{1}{\ln a \cdot \ln c} \cdot \lim_{x \to 2} \frac{\ln (x^2 - 3)}{x - 2}.$$

Făcînd substituția $x = t + 2$ obținem:

$$\lim_{x \to 2} \frac{\ln (x^2 - 3)}{x - 2} = \lim_{t \to 0} \left[\frac{\ln (1 + 4t + t^2)}{4t + t^2} \cdot \frac{4t + t^2}{t} \right] = 4.$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{\log_a \log_c [(x^2 - 3)c]}{x - 2} = \frac{4}{\ln a \cdot \ln c}.$$

Analog găsim:

$$\lim_{x \to 2} \frac{\log_c \log_a [(x^2 - 3)c]}{x - 2} = \frac{4}{\ln c \cdot \ln a}.$$

2.80. Se poate stabili că pentru $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ există inegalitățile:

$$x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}. \qquad (1)$$

De aici rezultă:

$$\frac{x^3}{6} > x - \sin x > \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120};$$

sau

$$\frac{1}{6} > \frac{x - \sin x}{x^3} > \frac{1}{6} - \frac{x^2}{120},$$

de unde:

$$\frac{1}{6} \geqslant \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{x - \sin x}{x^3} \geqslant \frac{1}{6} - \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{120};$$

$$\text{deci } \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6}. \qquad (2)$$

Înmulțind inegalitățile din (1) prin -1 și notînd $-x = y < 0$, rezultă că pentru $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ avem:

$$y - \frac{y^3}{6} > \sin y > y - \frac{y^3}{6} + \frac{y^5}{120},$$

de unde rezultă că pentru $y < 0$ putem scrie

$$\frac{1}{6} > \frac{y - \sin y}{y^3} > \frac{1}{6} - \frac{y^2}{120} \text{ deci } \lim_{\substack{y \to 0 \\ y < 0}} \frac{y - \sin y}{y^3} = \frac{1}{6}. \quad (3)$$

Din (2) și (3) rezultă că $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6}$.

Atunci limita din enunț, care se încadrează cazului de excepție $\frac{0}{0}$, devine:

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\operatorname{tg}^3 ax}{a^3 x^3} \cdot \frac{a^3}{\frac{x - \sin x}{x^3}} \right) = 1 \cdot \frac{a^3}{\frac{1}{6}} = 6a^3.$$

2.81. Pentru $x > 0$ avem:

$$\frac{x^3}{6} > x - \sin x > \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120}, \quad (1)$$

$$\text{de unde } \frac{1}{6} > \frac{x - \sin x}{x^3} > \frac{1}{6} - \frac{x^2}{120},$$

$$\text{deci } \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6}.$$

Înmulțind inegalitatea (1) cu -1 și notînd $-x = y < 0$, rezultă: $\lim\limits_{\substack{y \to 0 \\ y < 0}} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6}$ și ca urmare:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6}.$$

2.82. Vom observa mai întîi că:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-(\cos kx)^k}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos kx}{x^2}(1+\cos kx+$$

$$+\ldots+\cos^{k-1}kx)=k\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos kx}{x^2}=$$

$$=k\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{kx}{2}}{x^2}=\frac{k^3}{2}.$$

Folosind identitatea:

$$1-\prod_{k=1}^{n}(\cos kx)^k=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\cos x\cdot\cos^2 2x\ldots\cos^{k-1}(k-1)x\,[1-\cos^k kx],$$

vom avea:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\prod_{k=1}^{n}(\cos kx)^k}{x^2}=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\cdot\cos^2 2x\ldots\cos^{k-1}(k-1)x\cdot[1-\cos^k kx]}{x^2}=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left\{\lim_{x\to 0}[\cos x\cdot\cos^2 2x\ \ldots\ \cos^{k-1}(k-1)\,x]\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^k kx}{x^2}\right\}=\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{2}=\frac{1}{2}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

2.83. Notăm:

$$E_n=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cdot\sqrt{\cos 2x}\cdot\sqrt[3]{\cos 3x}\ldots\sqrt[n]{\cos nx}}{x^2}.$$

Avem:

$$E_1=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$$

şi

$$E_n = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\ldots\sqrt[n-1]{\cos(n-1)x}}{x^2}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\sqrt[n]{\cos nx}+\frac{1-\sqrt[n]{\cos nx}}{x^2}\right)$$

sau

$$E_n = E_{n-1} + \lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt[n]{\cos nx}}{x^2}.\quad \text{Dar:}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt[n]{\cos nx}}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos nx}{x^2}\cdot$$

$$\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[n]{\cos^{n-1} nx}+\sqrt[n]{\cos^{n-2} nx}+\ldots+\sqrt[n]{1}} =$$

$$=\frac{n^2}{2}\cdot\frac{1}{n}=\frac{n}{2}.$$

Avem:

$$E_n = E_{n-1}+\frac{n}{2}. \tag{1}$$

Făcînd în (1) succesiv pe $n = 1, 2, \ldots, n$ obținem:

$$E_2 = E_1+\frac{2}{2};\ E_3 = E_2+\frac{3}{2};\ldots;\ E_n = E_{n-1}+\frac{n}{2}.$$

Adunînd membru cu membru egalitățile de mai sus obținem:

$$E_n = E_1+\frac{1}{2}(2+3+\ldots+n) = \frac{1}{2}(1+2+\ldots+n) =$$

$$=\frac{n(n+1)}{4}.$$

Rezultă:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cdot\sqrt{\cos 2x}\cdot\sqrt[3]{\cos 3x}\ldots\sqrt[n]{\cos nx}}{x^2} =$$

$$=\frac{n(n+1)}{4}.$$

2.84. Deoarece se poate ușor demonstra (fără ajutorul derivatelor că $\lim\limits_{y\to 0} \frac{\ln(1+y)}{y} = 1$ și $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$, vom avea:

$$\lim_{x\to\infty} \ln\left[(1+a^x)\ln\left(1+\frac{b}{x}\right)\right] =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \ln\left[\frac{(1+a^x)\,b}{x} \cdot \frac{\ln\left(1+\frac{b}{x}\right)}{\frac{b}{x}}\right] =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \ln \frac{(1+a^x)\,b}{x} + \ln 1 = \lim_{x\to\infty} \ln \frac{(1+a^x)\cdot b}{x}.$$

Însă

$$\frac{1+a^x}{x} > \frac{a^x}{x} = \frac{e^x \cdot e^{\ln a}}{x}, \quad \text{deci} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{1+a^x}{x} = +\infty.$$

Rezultă că $\lim\limits_{x\to\infty} \ln\left[(1+a^x)\ln\left(1+\frac{b}{x}\right)\right] = +\infty.$

2.85. Fie $\{x_n\}_{n\in N}$, $\{y_n\}_{n\in N}$ șirurile date de relațiile:

$$x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_{in}), \quad y_n = \sum_{i=1}^{n} g(\alpha_{in}).$$

Deoarece (prin ipoteză) $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ există, putem avea următoarele cazuri:

1). $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ este finită.

În acest caz, șirul $\{y_n\}_{n\in N}$ este mărginit, deci există $M > 0$ astfel ca $y_n < M$, pentru orice $n \in N$. Fie acum $\varepsilon > 0$. Din egalitatea $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ rezultă că există $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încît

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - 1\right| < \frac{\varepsilon}{M} \Leftrightarrow g(x)\cdot\left(1-\frac{\varepsilon}{M}\right) < f(x) < g(x)\cdot\left(1+\frac{\varepsilon}{M}\right) \quad (1)$$

pentru orice $x \neq 0$, $|x| < \delta(\varepsilon)$.

Însă $\alpha_{mn} \xrightarrow{n} 0$, deci există $n_\varepsilon \in N$ astfel ca $|\alpha_{mn}| < \delta(\varepsilon)$ pentru $n > n_\varepsilon$ și $m \leqslant n$. Prin urmare, cînd $n > n_\varepsilon$, putem înlocui pe x cu $\alpha_{1n}, \alpha_{2n}, \ldots, \alpha_{nn}$ în relațiile (1). Adunînd membru cu membru inegalitățile obținute, vom căpăta:

$$y_n\left(1 - \frac{\varepsilon}{M}\right) < x_n < y_n\left(1 + \frac{\varepsilon}{M}\right)$$

și deci pentru $n > n_\varepsilon$ avem:

$$-\varepsilon < -\frac{\varepsilon}{M} \cdot y_n < x_n - y_n < \frac{\varepsilon}{M} y_n < \varepsilon.$$

Rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n - y_n) = 0$ și drept urmare $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

2). $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$ (nu putem avea $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = -\infty$ căci $y_n > 0$).

Atunci, din $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ rezultă că pentru $\varepsilon = \frac{1}{2}$ există $\delta\left(\frac{1}{2}\right) = \delta$, astfel ca $\left|\frac{f(x)}{g(x)} - 1\right| < \frac{1}{2} \Rightarrow f(x) > \frac{1}{2}\, g(x)$,

cînd $|x| < \delta$, iar din $\alpha_{mn} \xrightarrow{n} 0$ rezultă că există $n_0 \in N$ astfel ca $|\alpha_{mn}| < \delta$ pentru $n > n_0$ și $m \leqslant n$. Pentru $n > n_0$ se obține că

$$x_n > \frac{1}{2} \cdot y_n,$$

deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

Aplicație.

Luînd $f\colon (0, \infty) \to R$ și $g\colon (0, \infty) \to (0, \infty)$ date de relațiile $f(x) = \ln(1 + x)$; $g(x) = x$,

avem $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1$ și deci:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \ln(1 + \alpha_{in}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \alpha_{in}$$

cînd limita din membrul drept există. Rezultă:

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{i=1}^{n}(1+\alpha_{in}) = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\ln\prod\limits_{i=1}^{n}(1+\alpha_{in})} =$$

$$= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln(1+\alpha_{in})},$$

deci

$$\lim_{n\to\infty}(1+\alpha_{1n})(1+\alpha_{2n})\ldots(1+\alpha_{nn}) =$$

$= e^{\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha_{1n}+\alpha_{2n}+\ldots+\alpha_{nn})}$ cînd $\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha_{1n}+\alpha_{2n}+\ldots+$ $+\alpha_{nn})$ există.

2.86. Avem (vezi problema 2.85):

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1^2}{n^3}\right)\left(1+\frac{2^2}{n^3}\right)\ldots\left(1+\frac{n^2}{n^3}\right) =$$

$$= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k^2}{n^3}\right)} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}} =$$

$$= e^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{e}.$$

2.87. Luînd (vezi problema 2.85) $f, g: (0,\infty)\to(0,\infty)$ date de $f(x) = \sin x$ și $g(x) = x$ și $\alpha_{mn} = \dfrac{m^k\cdot a}{n^{k+1}}, m \leqslant n,$

avem: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$ și $\alpha_{mn}\xrightarrow{n} 0.$

Rezultă:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sin\frac{1^k\cdot a}{n^{k+1}}+\sin\frac{2^k\cdot a}{n^{k+1}}+\ldots+\sin\frac{n^k\cdot a}{n^{k+1}}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{a(1^k+2^k+\ldots+n^k)}{n^{k+1}} = \frac{a}{k+1}.$$

2.88. Avem:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^k}\right)\left(1+\frac{2}{n^k}\right)\dots\left(1+\frac{n}{n^k}\right)=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+\dots+n}{n^k}}$$

(vezi problema 2.85).

Însă $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+\dots+n}{n^k}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2n^k}=$

$$=\begin{cases}+\infty \text{ pentru } k=1\\ \frac{1}{2} \text{ pentru } k=2\\ 0 \text{ pentru } k\geqslant 3.\end{cases}$$

Rezultă:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^k}\right)\left(1+\frac{2}{n^k}\right)\dots\left(1+\frac{n}{n^k}\right)=\begin{cases}+\infty \text{ pentru } k=1\\ \sqrt{e} \text{ pentru } k=2\\ 1 \text{ pentru } k\geqslant 3.\end{cases}$$

2.89. Avem:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\ln a_n}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\left[1+\frac{k(k+1)}{n^3}\right]}=$$

$$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k(k+1)}{n^3}}$$

și cum

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k(k+1)}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n^3}\cdot\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}\right]\right\}=\frac{1}{3},$$

rezultă:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1\cdot 2}{n^3}\right)\dots\left[1+\frac{n(n+1)}{n^3}\right]=e^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{e}.$$

2.90. Trecînd la limită avem:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{i^k}{n^{k+1} + 2}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left\{ \prod_{i=1}^{n} \left[\left(1 + \frac{i^k}{n^{k+1} + 2}\right)^{\frac{n^{k+1}+2}{i^k}} \right]^{\frac{i^k}{n^{k+1}+2}} \right\} =$$

$$= \prod_{i=1}^{n} e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{i^k}{n^{k+1}+2}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{i^k}{n^{k+1}+2}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} i^k}{n^{k+1}+2}}.$$

Limita exponentului o calculăm cu ajutorul teoremei Stolz-Cesaro:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} i^k}{n^{k+1} + 2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{i=1}^{n+1} i^k - \sum\limits_{i=1}^{n} i^k}{(n+1)^{k+1} + 2 - (n^{k+1} + 2)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^k}{(n+1)^{k+1} - n^{k+1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^k + C_k^1 n^{k-1} + C_k^2 n^{k-2} + \ldots}{C_{k+1}^1 n^k + C_{k+1}^2 n^{k-1} + C_{k+1}^3 n^{k-2} + \ldots} = \frac{1}{k+1}.$$

Deci

$$\lim_{n\to\infty} a_n = e^{\frac{1}{k+1}}.$$

2.91. Avem:

$$\lim_{x\to\pi f(n)} x \left(\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}\,[\pi f(n)]}\right)^{\operatorname{tg} \frac{x}{2f(n)}} =$$

$$= \pi f(n) \cdot e^{\lim\limits_{x\to\pi f(n)} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}[\pi f(n)]}{\operatorname{tg}[\pi f(n)]} \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2f(n)}}.$$

Dar:

$$\lim_{x\to\pi f(n)} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}[\pi f(n)]}{\operatorname{tg}[\pi f(n)]} \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2f(n)} =$$

$$= \lim_{x\to\pi f(n)} \left\{ \frac{\sin(x - \pi f(n)) \cdot (-1)}{\cos[\pi f(n)] \cdot \cos x \cdot \dfrac{\sin[\pi f(n)]}{\cos[\pi f(n)]}} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \operatorname{ctg}\left[\frac{x}{2f(n)} - \frac{\pi}{2}\right]\right\} = - \lim_{x\to\pi f(n)} \frac{\sin(x - \pi f(n))}{\cos x \cdot \sin[\pi f(n)]} \cdot$$

$$\cdot \frac{\cos\left[\dfrac{x - \pi f(n)}{2f(n)}\right]}{\sin\left[\dfrac{x - \pi f(n)}{2f(n)}\right]} = - \lim_{x\to\pi f(n)} \frac{\cos\left[\dfrac{x - \pi f(n)}{2f(n)}\right]}{\cos x \cdot \sin[\pi f(n)]} \cdot$$

$$\cdot \lim_{x\to\pi f(n)} \frac{\sin(x - \pi f(n))}{\sin\left[\dfrac{x - \pi f(n)}{2f(n)}\right]} = - \frac{2}{\sin 2\pi f(n)} \cdot$$

$$\cdot \lim_{x\to\pi f(n)} \left\{ \frac{\sin(x - \pi f(n))}{x - \pi f(n)} \cdot 2f(n) \cdot \frac{\dfrac{x - \pi f(n)}{2f(n)}}{\sin\left[\dfrac{x - \pi f(n)}{2f(n)}\right]} \right\} =$$

$$= - \frac{4 f(n)}{\sin[2\pi f(n)]}.$$

Prin urmare:

$$\lim_{x\to\pi f(n)} \left\{ x \cdot \left(\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}[\pi f(n)]} \right)^{\operatorname{tg} \frac{x}{2f(n)}} \right\} = \frac{\pi f(n)}{e^{\frac{4f(n)}{\sin[2\pi f(n)]}}}.$$



Capitolul III

FUNCȚII CONTINUE

Definiția 1. Fie f o funcție definită pe $E \subseteq R$ și $x_0 \in E$. Spunem că funcția f este continuă în punctul x_0 dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, $(\exists)\delta(\varepsilon) > 0$, astfel încît oricare ar fi $x \in E$ cu proprietatea $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$ avem: $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Definiția 2. Spunem că funcția $f: E \subseteq R \to R$ este continuă în punctul $x_0 \in E$ dacă pentru orice șir $\{x_n\}_{n \in N}$ convergent către x_0 șirul valorilor funcției $\{f(x_n)\}_{n \in N}$ converge către $f(x_0)$.

Definiția 3. Spunem că funcția f definită pe o vecinătate a punctului x_0 este continuă în x_0 dacă f are limită în punctul $x_0 \in E$ și dacă această limită este egală cu $f(x_0)$.

Continuitate la stînga

Fie x_0 un punct de acumulare pentru mulțimea E.

Definiția 1. Fie $f: E \subseteq R \to R$ și $x_0 \in E$. Spunem că funcția f este continuă la stînga în punctul x_0 dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, $(\exists)\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încît oricare ar fi $x \in E$ cu proprietatea $0 < x_0 - x < \delta(\varepsilon)$, avem: $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Definiția 2. Spunem că funcția $f: E \subseteq R \to R$ este continuă la stînga în punctul $x_0 \in E$ dacă pentru orice șir$\{x_n\}_{n \in N}$, $(x_n \leqslant x_0, x_n \in E)$ convergent către x_0 șirul valorilor $\{f(x_n)\}_{n \in N}$ este convergent către $f(x_0)$.

Definiția 3. Spunem că funcția $f: E \subseteq R \to R$ este continuă la stînga în punctul x_0, (x_0, punct de acumulare pentru E), dacă sînt îndeplinite simultan condițiile:

1°. limita la stînga $f(x_0 - 0)$ în punctul x_0 există și este finită.

2°. limita la stînga este egală cu valoarea funcției în punctul x_0, adică:

$$f(x_0 - 0) = f(x_0).$$

Continuitate la dreapta

Definiția 1. Fie $f : E \subseteq R \to R$ și $x_0 \in E$. Spunem că funcția f este continuă la dreapta în punctul x_0 dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, $(\exists)\delta(\varepsilon) > 0$, astfel încît oricare ar fi $x \in E$ cu proprietatea $0 < x - x_0 < \delta(\varepsilon)$ avem:

$$| f(x) - f(x_0) | < \varepsilon.$$

Definiția 2. Spunem că funcția $f : E \subseteq R \to R$ este continuă la dreapta în punctul $x_0 \in E$ dacă pentru orice șir $\{x_n\}_{n \in N}$, $(x_n \geqslant x_0, \quad x_n \in E)$ convergent către x_0 șirul valorilor $\{f(x_n)\}_{n \in N}$ este convergent către $f(x_0)$.

Definiția 3. Spunem că funcția $f : E \subseteq R \to R$ este continuă la dreapta în punctul x_0 (x_0 punct de acumulare pentru E) dacă sînt îndeplinite simultan condițiile:

1°. limita la dreapta în punctul x_0, $f(x_0 + 0)$ există și este finită.

2°. limita la dreapta este egală cu valoarea funcției în punctul x_0, adică:

$$f(x_0 + 0) = f(x_0).$$

Teoremă. O funcție $f : E \subseteq R \to R$ este continuă în $x_0 \in E$ dacă și numai dacă este continuă la stînga și la dreapta în x_0.

Definiție. Spunem că o funcție este continuă pe o mulțime dacă este continuă în fiecare punct al ei.

Definiție. Fie $f : E \subseteq R \to R$ o funcție și $x_0 \in E$. Punctul x_0 se numește punct de discontinuitate dacă funcția f nu este continuă în x_0.

Definiție. Vom spune că un punct de discontinuitate pentru funcția f este un punct de discontinuitate de prima speță dacă limitele laterale în punctul x_0 există și sînt finite.

Definiție. Orice punct de discontinuitate în care cel puțin una din limitele laterale este infinită sau nu există îl vom numi punct de discontinuitate de speța a doua.

Teoremă. Dacă f este o funcție continuă pe un interval I, atunci oricare ar fi punctele $a < b$ din I, și oricare ar fi numărul λ cuprins între $f(a)$ și $f(b)$, există cel puțin un punct c_λ între a și b, astfel încît să avem $f(c_\lambda) = \lambda$.

Proprietatea pusă în evidență pentru funcțiile continue de teorema precedentă se numește *proprietatea lui Darboux.*

Propoziție. Fie funcția $f : I \to R$ și $a < b$ două puncte din I. Dacă f are proprietatea lui Darboux și dacă $f(a) \cdot f(b) < 0$, atunci există cel puțin un punct c cuprins între a și b în care funcția f se anulează.

Corolar. Dacă funcția $f : I \to R$ are proprietatea lui Darboux și nu se anulează în nici un punct din I, atunci funcția păstrează același semn pe tot intervalul I.

Propoziție. O funcție $f : I \to R$ are proprietatea lui Darboux dacă și numai dacă transformă orice interval $J \subset I$, tot într-un interval, $f(J)$.

Corolar. Dacă funcția $f : I \to R$ are proprietatea lui Darboux, atunci $f(I)$ este interval.

Observație. Deoarece orice funcție continuă pe un interval are proprietatea lui Darboux, toate propozițiile relative la funcțiile cu proprietatea lui Darboux rămîn valabile și pentru funcții continue pe un interval.

Operații cu funcții continue

Teoremă. Dacă funcțiile f și g definite pe mulțimea E sînt continue într-un punct $x_0 \in E$, atunci:

1°. $f + g$ este continuă în x_0.

2°. αf este continuă în x_0, oricare ar fi $\alpha \in R$.

3°. $f \cdot g$ este continuă în x_0.

4°. dacă $g(x_0) \neq 0$, funcția $\frac{f}{g}$ este continuă în x_0.

Continuitatea funcțiilor compuse

Fie funcțiile $f : E \to F$ și $g : F \to R$. Să considerăm funcția compusă $h = g \circ f : E \to R$.

Teoremă. Dacă funcția f este continuă într-un punct $x_0 \in E$ și dacă funcția g este continuă în punctul corespunzător $f_0 = f(x_0) \in F$, atunci funcția compusă $h = g \circ f$ este continuă în punctul $x_0 \in E$.

Continuitatea funcțiilor inverse

Propoziție. Dacă funcția $f : E \subseteq R \to R$ este monotonă și dacă mulțimea valorilor, $f(E)$, este un interval, atunci f este continuă pe E.

Teoremă. Dacă f este o aplicație strict monotonă a unui interval I pe un interval J, atunci funcția f și inversa sa $\overset{-1}{f}$ sînt continue.

Continuitatea funcțiilor elementare

Pentru funcțiile elementare, limita într-un punct x_0 *din domeniul de definiție* se obține înlocuind direct pe x cu x_0 adică:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Deci funcțiile elementare sînt continue în orice punct *din domeniul lor de definiție*.

PROBLEME

3.1. Să se arate că funcția $f : R \rightarrow R$ dată de legea $f(x) = \sin x$ este continuă oricare ar fi $x \in R$.

3.2. Să se studieze continuitatea pe R a funcției $f(x) = | x^2 - 1 |$.

3.3. Să se arate că funcția $f : R \rightarrow R$ dată de legea:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \text{ pentru } x \in (-\infty, 0] \\ x \text{ pentru } x \in (0,2] \\ 18 - x^4 \text{ pentru } x \in (2, +\infty) \end{cases}$$

este continuă pe R.

3.4. Se consideră funcția f definită astfel:

$$f(x) = \begin{cases} a \sin x + \cos x \text{ pentru } x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \\ \operatorname{tg} x + 2a \operatorname{ctg} x \text{ pentru } x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

unde a este un număr real.

Pentru ce valoare a parametrului a funcția f este continuă în $\frac{\pi}{4}$?

3.5. Să se studieze continuitatea funcției $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow R$ dată de:

$$f(x) = \begin{cases} \sin x \text{ pentru } x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \\ x^2 - \frac{\pi^2}{16} + \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ pentru } x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]. \end{cases}$$

3.6. Să se studieze continuitatea funcției $f: R \to R$ dată de:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^n - a^n}{x - a} & \text{pentru } x \in R - \{a\} \\ m & \text{pentru } x = a. \end{cases}$$

unde $n \in N$ iar m este un parametru real.

3.7. Se consideră funcția:

$$f(x) = \begin{cases} e^{3x} & \text{pentru } x \in [0,1] \\ a \cdot \dfrac{\sin(x-1)}{x^2 - 5x + 4} & \text{pentru } x \in (1, \pi]. \end{cases}$$

Să se determine a astfel încît funcția f să fie continuă pe $[0, \pi]$.

3.8. Să se studieze continuitatea funcției dată de legea:

$$f(x) = \arcsin \frac{|x|}{1 + |x|}.$$

3.9. Se consideră funcția $f: E \to R$ definită prin

$$f(x) = |x^2 - 4x| \arcsin \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

a) Să se găsească domeniul maxim de definiție E.
b) Să se studieze continuitatea funcției f.

(Concurs elevi, 1970)

3.10. Fie R dreapta reală și $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ segmentul definit prin $I = \left\{x \mid 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\right\}$. Să considerăm funcția $f: I \to R$ definită prin:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} & \text{dacă } x \neq 0 \\ 1 & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$$

Să se decidă dacă f este continuă în toate punctele segmentului I.

(Facultatea de Matematică-Mecanică, București, 1972)

3.11. Se consideră o funcție $f : R \to R$ strict monotonă. Să se arate că $f \circ f : R \to R$ este strict crescătoare.

3.12. Să se arate că dacă funcția injectivă $f : I \to R$ are proprietatea lui Darboux, atunci f este strict monotonă.

3.13. Dacă $f, g : [0, 1] \to [0, 1]$ sînt două funcții continue dintre care f este surjecție, să se arate că există cel puțin un punct $x_0 \in [0, 1]$ astfel încît $f(x_0) = g(x_0)$.

3.14. Să se rezolve inecuația:

$$(x + 1)(x + 2)(x^2 - 2x - 4) \leqslant 0.$$

3.15. Să se rezolve inecuația:

$$(\log_3 x + 2)(e^x - e)(x - 3) \geqslant 0.$$

3.16. Să se arate că ecuația $(x + 1)2^{x+1} = 1$ admite cel puțin o rădăcină reală cuprinsă în intervalul $[-1, 0]$.

3.17. Se consideră funcția continuă $f: [0, 2\pi] \to R$, astfel încît $f(0) = f(2\pi)$. Să se arate că există un punct $c \in (0, 2\pi)$, astfel încît

$$f(c) = f(c + \pi).$$

3.18. Fie o funcție continuă $f: [-a, a] \to [-a, a]$. Să se arate că există cel puțin un punct $b \in [-a, a]$, astfel încît $f(b) = b$ și cel puțin un punct $c \in [-a, a]$, astfel încît $f(c) = -c$.

(Concurs elevi, etapa județeană, 1972).

3.19. Fie funcțiile continue:

$$f: [a, b] \to [a, b] \text{ și } g: [a, b] \to [a, b]$$

cu proprietatea: $g(a) = a$, $g(b) = b$.

Să se arate că ecuația $f(x) = g(x)$ are cel puțin o rădăcină.

(R.M.T., 887, 1972)

3.20. Să se demonstreze că ecuația în x:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{b_i}{x - a_i} = 0,$$

unde $b_i > 0$; $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n$ admite $n - 1$ rădăcini $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}$ astfel că:

$$a_1 < x_1 < a_2 < x_2 < a_3 < x_3 < \ldots < x_{n-1} < a_n.$$

(G.M.B., 10926, 1971)

3.21. Să se arate că dacă f și g sînt două funcții continue pe mulțimea R a numerelor reale și egale pe mulțimea Q a numerelor raționale, atunci cele două funcții sînt egale pe mulțimea R a numerelor reale.

3.22. Se consideră funcția $f : [0, +\infty) \to R$, continuă. Să se arate că dacă $f(x) = f(x^2)$, $(\forall) x \geqslant 0$ atunci funcția f este constantă.

3.23. Fie f o funcție definită pe $[0, 1]$ cu valori reale, crescătoare. Se presupune că pentru orice x_1, x_2, x_3 cu $0 \leqslant x_1 < x_2 < x_3 < 1$ avem:

$$\frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} \geqslant \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

a). Să se arate că în orice punct x_0, $0 \leqslant x_0 < 1$ funcția f este continuă.

b). Se consideră funcția f exprimată prin:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} & \text{pentru } 0 \leqslant x < 1 \\ 1 & \text{pentru } x = 1. \end{cases}$$

Să se arate că f are toate proprietățile cerute și nu este continuă în punctul 1.

(*D. Voiculescu*, Concurs elevi, 1971)

3.24. Fie $f : R \to R$ o funcție continuă al cărei grafic G admite centrul de simetrie $A(x_0, y_0)$. Să se arate că $A \in G$.

3.25. Să se găsească bijecția $f : R \to R$ care satisface relațiile

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$
$$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$$

oricare ar fi $x, y \in R$.

3.26. Să se determine funcția $f : R \to R$ bijectivă, care satisface relațiile:

$$f(x + y) \geqslant f(x) + f(y) \qquad (1)$$
$$f(xy) \geqslant f(x) \cdot f(y) \qquad (2)$$

oricare ar fi $x, y \in R$.

(*M. Rădulescu*, G.M.B., 12575, 1972)

3.27. Să se găsească funcțiile continue $f : R \to R$ care satisfac relația:

$$f(f(x)) + x = 0.$$

3.28. Să se determine funcția continuă $f : R \to R$ știind că $f(x + y) = f(x) + f(y)$, $(\forall)x, \ y \in R$ și $f(1971) = 1971^{1970}$.

3.29. Să se găsească funcțiile $f : R \to R$ continue care verifică pentru orice $x, y \in R$ relația:

$$f(x + y) = f(x) + f(y) + a$$

unde a este un număr real dat.

3.30. Să se determine funcția continuă $f : R \to R$ care satisface următoarele proprietăți:

1) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{x - a} = e^a$, a = constant.

2) $(\forall)x, \ y \in R$, $(x - a)(y - a) \cdot f(x + y) = (x + y - a) \cdot f(x) f(y)$.

(*M. Vlada*, G.M.B., 13494, 1973)

3.31. Să se determine funcțiile continue definite pe R cu valori în $R^+ - \{0\}$ care verifică relația:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \sqrt{f(x) \cdot f(y)}.$$

3.32. a) Să se determine forma generală a funcțiilor continue de la R^+ la R^+ care verifică relația

$$f(x) + f(y) = f\left[(x^n + y^n)^{\frac{1}{n}}\right], \ (\forall) x, \ y \in R^+ \text{ și } n \in N.$$

b) Să se determine forma generală a funcțiilor continue de la R^+ la $R^+ - \{0\}$ care verifică relația

$$f(x) \cdot f(y) = f\left[(x^n + y^n)^{\frac{1}{n}}\right], \ (\forall) x, \ y \in R^+ \text{ și } n \in N.$$

3.33. Să se determine funcția continuă $f : R \to R$ care verifică ecuația funcțională:

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y).$$

3.34. Să se determine funcția continuă $f : (0, \infty) \to R$ care verifică ecuația funcțională.

$$f(x \cdot y) = f(x) + f(y).$$

3.35. Să se determine funcția $f : R \to R$ știind că:

a). f este continuă pe R,

b). $\lim\limits_{t \to \infty} [f(t) - t] = +\infty$,

c). oricare ar fi $x, y \in R$ avem:

$f(x+y) = f(x) \cdot f(y) - xf(y) - yf(x) + xy + x + y$.

$f(1) = e + 1$.

(*N. N. Teodorescu*, G.M.A. nr. 12, 1969)

3.36. Să se determine funcțiile reale continue φ, f, g, h astfel ca $(\forall)\ x, y, z \in R$, $\varphi(x+y+z) = f(x) + g(y) + h(z)$.

(*M. Vlada*, G.M.B., 13259, 1973)

3.37. Să se determine funcția $f : R \to R$ știind că:
a). f este continuă.

b). $\lim\limits_{t \to 0} \frac{f(t)}{t} = 1$.

c). $xy \cdot f(x+y) = (x+y) f(x) f(y)$ pentru orice x, $y \in R$.
d). $f(1) = e$.

(*N. N. Teodorescu*, G.M.A., 1969)

3.38. Găsiți funcțiile continue $f : (0, 1) \to R$ care satisfac relația:

$$f(xy) = xf(y) + yf(x), \quad (\forall)(x, y) \in R \times R.$$

(The American Mathematical Monthly, 1972)

3.39. Găsiți funcțiile continue $f : (0, 1) \to R$ care satisfac relația:

$$f(xy) = xf(x) + yf(y).$$

(The American Mathematical Monthly, 1972)

3.40. Fie $f: R \to R$ o funcție continuă, neconstantă și

$$M = \{t \in R - \{0\} \mid f(x+t) = f(x) \text{ pentru orice } x \in R\}.$$

Să se arate că M este vidă sau există o bijecție $h : Z - \{0\} \to M$.

(*D. Vuza*, G.M.B., 13355, 1973)

3.41. Fie $f : R \to R$ o funcție definită astfel:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{dacă } x \text{ este rațional,} \\ -x & \text{dacă } x \text{ este irațional.} \end{cases}$$

a). Să se arate că f nu este monotonă pe nici un interval.
b). Este f inversabilă?
c). Să se studieze continuitatea lui f.

(*C. Niță*, Concurs elevi, 1973)

3.42. Fie $f, g : R \to R$ două funcții periodice care îndeplinesc condiția:

$$\lim_{x\to\infty} [f(x) - g(x)] = 0.$$

Să se arate că:
1) f și g au perioade egale.
2) f și g sînt egale.

(Concurs elevi, 1973)

3.43. Fie o funcție f definită pe R și continuă pe R. Vom presupune că există un număr $k \in (0, 1)$ astfel încît

$$|f(x') - f(x'')| \leqslant k\,|x' - x''|$$

pentru orice $x', x'' \in R$. Fie șirul $\{x_n\}_{n\in N}$ definit prin termenul x_1 și relația de recurență $x_n = f(x_{n-1})$. Să se arate că acest șir este convergent și limita sa x verifică egalitatea $x = f(x)$.

3.44. Să se determine toate funcțiile continue $f : R - \{-1, 1\} \to R$ care satisfac relația:

$$f(x) + f(y) = f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$$

pentru $x, y \in R - \{-1, 1\}$ cu $1 + xy \neq 0$.

(G.M.A., 1971)

3.1. Fie $x_0 \in R$ avem:

$$\sin x - \sin x_0 = 2 \sin \frac{x - x_0}{2} \cos \frac{x + x_0}{2}.$$

Avem:

$$|\sin x - \sin x_0| = 2 \left| \sin \frac{x - x_0}{2} \right| \cdot \left| \cos \frac{x + x_0}{2} \right| <$$

$$< 2 \left| \sin \frac{|x - x_0|}{2} \right|.$$

sau:

$$|\sin x - \sin x_0| < 2 \cdot \frac{|x - x_0|}{2} = |x - x_0|.$$

Fie ε un număr pozitiv astfel încît $|x - x_0| < \varepsilon$. Rezultă că $|\sin x - \sin x_0| < \varepsilon$ adică funcția $f(x) = \sin x$ este continuă în punctul $x_0 \in R$.

3.2. Funcția f rezultă din compunerea a două funcții continue pe R, deci este o funcție continuă pe R.

3.3. Avem $f(0 - 0) = f(0) = 0$; $f(0 + 0) = 0$, deci funcția f este continuă în 0. În punctul 2 avem:

$f(2 - 0) = f(2) = 2$; $+ f(2 + 0) = 18 - 16 = 2$.

Deci f este continuă și în punctul 2. Pe celelalte mulțimi, funcția f este continuă deoarece este definită de polinoame.

3.4. Avem:

$$f\left(\frac{\pi}{4}-0\right)=\lim_{\substack{x\to\frac{\pi}{4}\\ x<\frac{\pi}{4}}} f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(a\sin x+\cos x)=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}(a+1),$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}+0\right)=\lim_{\substack{x\to\frac{\pi}{4}\\ x>\frac{\pi}{4}}} f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg} x+2a\operatorname{ctg} x)=$$

$$=1+2a.$$

Din condiția ca: $f\left(\frac{\pi}{4}-0\right)=f\left(\frac{\pi}{4}+0\right)=f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ rezultă $\frac{\sqrt{2}}{2}(a+1)=1+2a$ deci $a=\frac{\sqrt{2}-2}{4-\sqrt{2}}$.

3.5. Pe intervalul $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ funcția f este continuă, deoarece $g(x)=\sin x$ este continuă pe R.

Pe intervalul $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$ funcția f este continuă deoarece este definită de un polinom de gradul doi. Problema continuității se pune numai în punctul $x_0=\frac{\pi}{4}$. Avem:

$$\lim_{\substack{x\to\frac{\pi}{4}\\ x<\frac{\pi}{4}}} f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\sin x=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}=f\left(\frac{\pi}{4}\right);$$

$$\lim_{\substack{x\to\frac{\pi}{4}\\ x>\frac{\pi}{4}}} f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(x^2-\frac{\pi^2}{16}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Deoarece $f\left(\frac{\pi}{4}-0\right)=f\left(\frac{\pi}{4}+0\right)=f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ rezultă că funcția f este continuă și în punctul $x_0=\frac{\pi}{4}$.

3.6. Deoarece:

$$\frac{x^n-a^n}{x-a}=x^{n-1}+x^{n-2}\cdot a+x^{n-3}\cdot a^2+\ldots+xa^{n-2}+$$
$$+a^{n-1},\ (\forall)x\neq a,$$

rezultă că, pentru orice $x\in R-\{a\}$, funcția f este continuă deoarece este definită de un polinom.

Problema continuității se pune în punctul $x=a$. Aici avem:

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a}(x^{n-1}+x^{n-2}\cdot a+x^{n-3}\cdot a^2+\ldots+$$
$$+a^{n-1})=na^{n-1}.$$

Din condiția ca $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$ rezultă : $m=na^{n-1}$. Concluzia este că dacă $m=na^{n-1}$ funcția f este continuă pe R, iar dacă $m\neq na^{n-1}$ funcția f este continuă pe $R-\{a\}$.

3.7. Funcția f este continuă pe $[0, 1)\cup(1,\pi]$ pentru orice $a\in R$. Vom determina pe $a\in R$, astfel încît funcția f să fie continuă și în punctul $x_0=1$. Avem:

$$f(1-0)=\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=\lim_{x\to 1} e^{3x}=e^3,$$

$$f(1+0)=\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=\lim_{x\to 1} a\cdot\frac{\sin(x-1)}{(x-1)(x-4)}=-\frac{a}{3}.$$

Din condițiile $f(1-0)=f(1+0)=f(1)$ deducem că $a=-3e^3$.

3.8. Domeniul maxim de definiție al funcției este R. Funcțiile $g(x)=|x|$ și $h(x)=1+|x|$ sînt continue pe R, iar $\frac{g(x)}{h(x)}=\frac{|x|}{1+|x|}$ fiind cîtul a două

funcţii continue pe R este continuă pe R. Funcţia f este continuă pe R deoarece rezultă din compunerea a două funcţii continue pe R.

3.9. a). Condiţiile de existenţă ale funcţiei f sînt: $x > 0$ şi $-1 \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}} \leqslant 1$. Rezultă $x \geqslant 1$, deci domeniul maxim de definiţie E este $E = [1, \infty)$.

b). Explicitînd funcţia f avem:

$$f(x) = \begin{cases} (4x - x^2) \arcsin \frac{1}{\sqrt{x}}, & \text{dacă } x \in [1, 4) \\ 0, & \text{dacă } x = 4 \\ (x^2 - 4x) \arcsin \frac{1}{\sqrt{x}}, & \text{dacă } x \in (4, \infty). \end{cases}$$

Se observă că funcţia f este continuă pe subintervalele $[1, 4)$ şi $(4, \infty)$. De asemenea funcţia f este continuă în punctul $x = 4$ pentru că

$$\lim_{\substack{x \to 4 \\ x < 4}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 4 \\ x > 4}} f(x) = f(4) = 0.$$

Deci funcţia f este continuă pe tot domeniul de definiţie.

3.10. Pe intervalul $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ f este continuă, avînd operaţii cu funcţii continue pe acest interval şi $\sin x \neq 0$. Să cercetăm continuitatea în $x = 0$. Avem:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = \left(\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x}\right) \cdot \left(\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x}\right) = 1 \cdot 0 = 0.$$

Deoarece $f(0) = 1$ rezultă că în punctul 0, f nu este continuă.

3.11. Fie f strict crescătoare atunci:

$$x < y \Rightarrow f(x) < f(y) \Rightarrow f(f(x)) < f(f(y)) \Rightarrow (f \circ f)(x) < (f \circ f)(y)$$

ceea ce ne arată că $f \circ f$ este strict crescătoare.

Fie f strict descrescătoare, atunci:

$$x < y \Rightarrow f(x) > f(y) \Rightarrow f(f(x)) < f(f(y)) \Rightarrow (f \circ f)(x) < < (f \circ f)(y),$$

adică $f \circ f$ este strict crescătoare.

3.12. Să presupunem prin absurd că f nu este nici strict crescătoare, nici strict descrescătoare. Aceasta înseamnă că există trei puncte $x_1 < x_2 < x_3$ din I, astfel încît să nu avem nici $f(x_1) < f(x_2) < f(x_3)$ și nici $f(x_1) > f(x_2) > f(x_3)$, adică $f(x_2)$ nu se află cuprins între $f(x_1)$ și $f(x_3)$. Pentru a face o alegere, să presupunem că $f(x_1) < f(x_3)$. Atunci avem: sau $f(x_2) < f(x_1) < < f(x_3)$ sau $f(x_1) < f(x_3) < f(x_2)$. (Nu putem avea $f(x_2) = f(x_1)$ sau $f(x_2) = f(x_3)$ deoarece $x_2 \neq x_1$, $x_2 \neq \neq x_3$ și f este injectivă.) Deoarece f are proprietatea lui Darboux, în primul caz există un punct c_1 cuprins între x_2 și x_3 (deci $c_1 \neq x_1$), astfel ca $f(c_1) = f(x_1)$. În al doilea caz există un punct c_3 cuprins între x_1 și x_2 (deci $c_3 \neq x_3$), astfel ca $f(c_3) = f(x_3)$. În ambele cazuri funcția ia aceeași valoare în două puncte diferite, deci nu este injectivă, ceea ce contrazice ipoteza. Rezultă deci că f este strict monotonă pe I.

3.13. Fie $h : [0, 1] \to R$ definită de relația $h(x) = = f(x) - g(x)$ pentru orice $x \in [0, 1]$. Este evident că h este funcție continuă pe $[0, 1]$, deoarece este diferența a două funcții continue pe $[0, 1]$. Dacă $h(x) = 0$ pentru orice $x \in [0, 1]$, atunci evident că $f(x) = g(x)$ pentru orice $x \in [0, 1]$ și deci în acest caz teorema este adevărată. Să presupunem că $h(x) \neq 0$ $(\forall)$ $x \in [0, 1] = I$ adică $f(x) \neq g(x)$, $(\forall)$ $x \in I$. Deoarece h este o funcție continuă pe I, sînt posibile două situații:

a). $h(x) > 0$, $(\forall) x \in I$, adică $f(x) > g(x)$, $(\forall) x \in I$. Deoarece f este o surjecție, rezultă că $(\exists) x_0 \in I$, astfel încît $f(x_0) = 0$ și atunci pentru acest $x_0 \in I$ avem $f(x_0) = 0 > g(x_0)$, prin urmare $(\exists) x_0 \in I$, astfel încît $g(x_0) < 0$. Aceasta este în contradicție cu faptul că $g : I \to I$ adică $(\forall) x \in I \Rightarrow g(x) \in I$. Prin urmare este imposibil ca $h(x) > 0$, $(\forall) x \in I$.

b). $h(x) < 0$, $(\forall)x \in I$ adică $f(x) < g(x)$, $(\forall)x \in I$. Deoarece f este o surjecție rezultă că $(\exists)x_0 \in I$, astfel încît $f(x_0) = 1$ și atunci pentru acest x_0 avem $g(x_0) > f(x_0) = 1$, prin urmare există $x_0 \in I$, astfel încît $g(x_0) > 1$. Aceasta este în contradicție cu faptul că $g : I \to I$, adică $(\forall)x \in I \Rightarrow g(x) \in I$.

Prin urmare este imposibil ca $h(x) < 0$, $(\forall)x \in I$.

Deoarece h este o funcție continuă pe $[0, 1]$ și situațiile a) și b) sînt imposibile, rezultă că $(\exists)x_0 \in [0, 1]$, astfel încît $h(x_0) = 0$, adică $f(x_0) = g(x_0)$ și afirmația este demonstrată.

3.14. Considerăm funcția $f : R \to R$ dată de legea $f(x) = (x + 1)(x + 2)(x^2 - 2x - 4)$. Funcția f este continuă pe R fiind definită de un polinom de gradul 4 cu coeficienți reali. Zerourile funcției f sînt: $x_1 = -2$; $x_2 = 1 - \sqrt{5}$; $x_3 = -1$; $x_4 = 1 + \sqrt{5}$. Conform unei proprietăți a funcțiilor continue avem semnul funcției f dat de următorul tabel:

x	$-\infty \quad -2 \quad 1-\sqrt{5} \quad -1 \quad 1+\sqrt{5} \quad +\infty$
$f(x)$	$+ + 0 - - 0 + + 0 - - 0 + +$

Rezultă că $x \in [-2, 1 - \sqrt{5}] \cup [-1, 1 + \sqrt{5}]$.

3.15. Funcția $f(x) = (\log_3 x + 2)(e^x - e)(x - 3)$ este continuă pe $(0, +\infty)$. Zerourile funcției f sînt $x_1 = \frac{1}{9}$; $x_2 = 1$; $x_3 = 3$. Avem semnul funcției dat de următorul tabel:

x	$0 \quad \frac{1}{9} \quad 1 \quad 3 \quad +\infty$
$f(x)$	$- - 0 + + 0 - - 0 + + +$

Rezultă că: $x \in \left[\frac{1}{9}, 1\right] \cup [3, +\infty)$.

3.16. Să considerăm funcția $f:[-1, 0] \to R$ dată de legea $f(x) = (x+1)\,2^{x+1} - 1$. Avem $f(-1) = -1$; $f(0) = 1$. Deci $f(-1) \cdot f(0) < 0$ ceea ce ne arată că funcția f continuă pe $[-1, 0]$ are cel puțin un zero în acest interval.

3.17. Construim funcția $g:[0, \pi] \to R$ dată de legea $g(x) = f(x) - f(x+\pi)$. Să calculăm:

$$g(0) = f(0) - f(\pi);\ g(\pi) = f(\pi) - f(2\pi) = f(\pi) - f(0).$$

Deoarece g este funcție continuă cu proprietatea $g(0) \cdot g(\pi) < 0$, rezultă că $(\exists)\, c \in (0, \pi)$, astfel încît $g(c) = 0$ deci $f(c) = f(c+\pi)$.

3.18. Considerăm funcția $g:[-a, a] \to R$ dată de legea $g(x) = f(x) - x$, care este continuă, fiind diferență de funcții continue. Dar $g(a) = f(a) - a \leqslant 0$ deoarece $f(a) \leqslant a$, iar $g(-a) = f(-a) + a \geqslant 0$ deoarece $f(-a) \geqslant -a$. Deoarece g este o funcție continuă pe $[-a, a]$ și $g(-a) \cdot g(a) \leqslant 0$ rezultă că $(\exists) b \in [-a, a]$, astfel încît $g(b) = f(b) - b = 0$ adică $f(b) = b$.

În mod analog se arată existența punctului c, considerînd funcția ajutătoare $h(x) = f(x) + x$.

3.19. Se consideră funcția $h: [a, b] \to R$ dată de legea $h(x) = f(x) - g(x)$. Avem că: $h(a) = f(a) - g(a) = f(a) - a \geqslant 0$ și $h(b) = f(b) - g(b) = f(b) - b \leqslant 0$. Cum funcția h este continuă și $h(a) \cdot h(b) \leqslant 0$, rezultă că ecuația $h(x) = 0$ are cel puțin o rădăcină.

3.20. Fie funcția $f_n(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i}{x - a_i}$.

Formăm următorul tabel de variație:

x	$-\infty$	a_1	a_2	...	a_{n-1}	a_n	∞
$f(x)$	$0 \searrow -\infty$	$+\infty \searrow -\infty$	$+\infty \searrow -\infty$		$+\infty \searrow -\infty$	$+\infty \searrow 0$	

Pe intervalele (a_1, a_2), (a_2, a_3), ..., (a_{n-1}, a_n) funcția este continuă, deci conform tabelului ea trebuie să se anuleze cel puțin o dată. Observăm că ecuația $f_n(x) = 0$

are $n-1$ rădăcini, deci funcția $f_n(x)$ se va anula o dată în fiecare din cele $n-1$ intervale (a_1, a_2), (a_2, a_3),..., (a_{n-1}, a_n); $a_1 < x_1 < a_2 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < a_n$.

Ne-am folosit astfel de o consecință a proprietății lui Darboux.

3.21. Avem că $f(x) = g(x)$, $(\forall) x \in Q$ și vom arăta că $f(x) = g(x)$ $(\forall) x \in R - Q$. Într-adevăr, dacă considerăm un $x \in R - Q$, atunci există un șir $\{x_n\}_{n \in N} \subset \subset Q$, astfel încît $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Însă $f(x_n) = g(x_n)$, $(\forall) n \in N$ deoarece $\{x_n\}_{n\in N} \subset Q$. Trecînd la limită pentru $n \to \infty$ și ținînd seama de continuitatea pe R a funcțiilor f și g, obținem $f(\lim_{n\to\infty} x_n) = g(\lim_{n\to\infty} x_n)$ adică $f(x) = g(x)$, $(\forall) x \in R$.

3.22. Rezultă prin metoda inducției matematice complete că:

$$f(x) = f(x^2) = f(x^4) = f(x^8) = \ldots = f(x^{2n}), \qquad (\forall) n \in N.$$

Deci:

$$f(x) = f(\sqrt[2n]{x}).$$

Trecînd la limită pentru $n \to \infty$ și ținînd seama că funcția f este continuă avem:

$$f(\lim_{n\to\infty} x) = f(\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{x}),$$

adică

$$f(x) = f(1) = \text{constant}.$$

3.23. a). În intervalul $[0, 1)$ luăm în ordine punctele $0 \leqslant x < x_0 < x_3 < 1$ și conform inegalității din enunț avem:

$$\frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} \leqslant \frac{f(x_3) - f(x_0)}{x_3 - x_0},$$

sau deoarece funcția f este crescătoare și $x_0 - x > 0$ obținem:

$$0 \leqslant f(x_0) - f(x) \leqslant (x_0 - x)\frac{f(x_3) - f(x_0)}{x_3 - x_0}.$$

Rezultă că $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = f(x_0)$ adică funcția f are limită la stînga în punctul x_0 și valoarea acestei limite este $f(x_0)$.

Fie acum punctele $0 \leqslant x_0 < x < x_3 < 1$ pentru care au loc inegalitățile

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant \frac{f(x_3) - f(x)}{x_3 - x} \leqslant \frac{f(1) - f(x_3)}{1 - x_3},$$

deci

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant \frac{f(1) - f(x_3)}{1 - x_3}$$

și deoarece $f(x) - f(x_0) \geqslant 0$ iar $x - x_0 > 0$ avem:

$$0 \leqslant f(x) - f(x_0) \leqslant (x - x_0)\frac{f(1) - f(x_3)}{1 - x_3}.$$

Trecînd la limită pentru $x \to x_0$ avem:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = f(x_0).$$

Rezultă că oricare ar fi $x_0 \in [0, 1)$ avem:

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0)$$

adică funcția este continuă.

b). Funcția f nu este continuă în punctul 1. Într-adevăr, considerînd contraexemplul, obținem că funcția f verifică condițiile din ipoteza problemei, și totuși

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = \frac{1}{2}, \quad \text{iar} \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = f(1) = 1$$

ceea ce arată că funcția f nu este continuă în punctul 1.

3.24. Fie $M(x, f(x))$ un punct oarecare aparținind graficului și $M'(x', y')$ simetricul său față de punctul $A(x_0, y_0)$. Avem deci, $x' = 2x_0 - x$ și $y' = 2y_0 - f(x)$. Dar, $A(x_0, y_0)$ fiind centru de simetrie, trebuie ca $M' \in G$, adică:

$$f(2x_0 - x) = 2y_0 - f(x). \qquad (1)$$

Ținînd seama că f este continuă și trecînd la limită în egalitatea (1) avem succesiv:

$$\lim_{x \to x_0} f(2x_0 - x) = \lim_{x \to x_0} (2y_0 - f(x)) \Rightarrow f(2x_0 -$$

$$- x_0) = 2y_0 - f(x_0) \Rightarrow f(x_0) = 2y_0 - f(x_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_0 = f(x_0) \Rightarrow A(x_0, y_0) \in G.$$

3.25. Punînd în prima relație $x = y = 0$, iar în cea de-a doua $x = y = 1$, rezultă imediat $f(0) = 0$ și $f(1) = 1$ (faptul că $f(1) = 1$ rezultă din aceea că $f(1)$ trebuie să verifice ecuația $[f(1)]^2 - f(1) = 0$, iar $f(1) = 0$ nu se poate, deoarece f este o aplicație injectivă). Un raționament asemănător ne conduce la aceea că $f(-1) = -1$.

Folosind aceste rezultate și procedînd prin inducție, găsim că pentru orice număr întreg m are loc egalitatea $f(m) = m$. De asemenea, pentru orice număr întreg $n \neq 0$ au loc relațiile:

$$1 = f(1) = f\left(n \cdot \frac{1}{n}\right) = f(n) \cdot f\left(\frac{1}{n}\right) = nf\left(\frac{1}{n}\right).$$

Rezultă că $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$ și, ca o consecință imediată, faptul că pentru orice număr rațional $\frac{m}{n}$ are loc egalitatea: $f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m}{n}$.

Să arătăm acum că pentru orice $\varepsilon > 0$ este satisfăcută inegalitatea $f(\varepsilon) > 0$. Într-adevăr, deoarece $\varepsilon > 0$, există $\alpha \in R$ astfel ca $\varepsilon = \alpha^2$. Vom avea atunci:

$$f(\varepsilon) = f(\alpha^2) = f(\alpha \cdot \alpha) = [f(\alpha)]^2 > 0.$$

Această observație de mai sus ne permite să arătăm că f este o funcție strict crescătoare. Fie $x_1, x_2 \in R$,

$x_1 < x_2$, atunci $x_2 = x_1 + \varepsilon$ unde $\varepsilon > 0$. Rezultă imediat:

$$f(x_2) = f(x_1 + \varepsilon) = f(x_1) + f(\varepsilon)$$

și cum $f(\varepsilon) > 0$, putem conchide că $f(x_1) < f(x_2)$.

Fie acum $x \in R - Q$, iar $(p_n)_{n\in N}$ și $(q_n)_{n\in N}$ două șiruri de numere raționale convergente către x și astfel încît pentru orice $n \in N$ au loc inegalitățile $p_n < x < q_n$. Cum am demonstrat că f este strict crescătoare, rezultă că $f(p_n) < f(x) < f(q_n)$. Dar $f(p_n) = p_n$ și $f(q_n) = q_n$. Trecînd la limită în inegalitatea care se obține găsim:

$$x = \lim_{n\to\infty} p_n \leqslant f(x) \leqslant \lim_{n\to\infty} q_n = x.$$

Rezultă că singura bijecție $f: R \to R$ care satisface relațiile din enunț este aplicația identică a lui R pe R:

$$f(x) = x.$$

3.26. Punînd în (1) și (2) $x = y = 0$, rezultă $f(0) \leqslant 0$ și $f(0) \geqslant [f(0)]^2$ sau $f(0)[1 - f(0)] \geqslant 0$, de unde $1 - f(0) \leqslant 0$, adică $1 \leqslant f(0)$. Cum inegalitățile $f(0) \leqslant 0$ și $1 \leqslant f(0)$ sînt contradictorii, rezultă cu necesitate $f(0) = 0$.

Înlocuind în (2) $x = y = 1$ obținem $f(1) \geqslant [f(1)]^2 > 0$ și în același timp $f(1)[1 - f(1)] \geqslant 0$, de unde rezultă că $0 < f(1) \leqslant 1$.

Fie acum $x = 1$, $y = -1$ în (1) și $x = y = -1$ în (2). Rezultă $0 = f(0) = f(-1 + 1) \geqslant f(1) + f(-1)$, deci $f(-1) \leqslant -f(1) < 0$, adică $f(-1) < 0$ și $1 \geqslant f(1) = f[(-1)\cdot(-1)] \geqslant [f(-1)]^2 \Rightarrow -1 \leqslant f(-1) \leqslant 1$ de unde obținem $-1 \leqslant f(-1) < 0$.

Punînd acum $x = -1$; $y = 1$ în (2) găsim: $f(-1) \geqslant f(1)\cdot f(-1) \Leftrightarrow f(-1)\ [1 - f(1)] \geqslant 0$. Însă $1 - f(-1) \geqslant 0$ și $f(-1) < 0$. Rezultă cu necesitate că $1 = f(1)$ și în acest caz rezultă din (1) scris cu $x = 1$; $y = -1$ că $f(-1) \leqslant -1$. Cum avem și $f(-1) \geqslant -1$ rezultă $f(-1) = -1$.

Atunci, punînd în (1) $x \to x$; $y \to -x$ și în (2) $x \to x$; $y \to -1$, vom obține: $0 \geqslant f(-x) + f(x)$, deci

$-f(-x) \geqslant f(x)$ și $f(-x) \geqslant f(x) \cdot f(-1) = -f(x)$. De aici rezultă că $f(x) = -f(-x)$.

Să arătăm acum că $(\forall)x, y \in R$, avem:

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \tag{3}$$

$$f(xy) = f(x) \cdot f(y). \tag{4}$$

Într-adevăr, punînd în (1) $x \to x + y$ și $y \to -y$ obținem $f(x) \geqslant f(x + y) + f(-y)$, de unde: $f(x) + f(y) = f(x) - f(-y) \geqslant f(x + y)$ și ținînd seama de (1) rezultă (3).

În sfîrșit, punînd $x \to -x$ și $y \to y$ în (2), rezultă:

$$f(-xy) \geqslant f(-x) \cdot f(y) \text{ sau } -f(xy) \geqslant -f(x) \cdot f(y),$$

de unde $f(xy) \leqslant f(x) \cdot f(y)$ și ținînd seama de (2) rezultă (4).

Însă (vezi problema 3.25) singura bijecție care satisface relațiile (3) și (4) este $f : R \to R$ dată de $f(x) = x$. Rezultă că aceeași funcție este singura bijecție care satisface (1) și (2).

3.27. Vom presupune că există o funcție f care satisface relația din enunț. Arătăm că f este injectivă. Într-adevăr $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f(f(x_1)) = f(f(x_2)) \Rightarrow -x_1 = -x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$.

Funcția f fiind continuă și injectivă, rezultă că f este strict monotonă. Însă dacă f este strict monotonă, rezultă că $f \circ f$ este strict crescătoare. Ținînd seama de relația pe care o verifică f, rezultă că trebuie să avem:

$$f \circ f = -i_R.$$

adică o funcție strict crescătoare egală cu o funcție strict descrescătoare, rezultat absurd. Deci nu există funcții f continue care să satisfacă relația din enunț.

3.28. Se demonstrează prin metoda inducției matematice complete că $(\forall)x \in R$ și $q \in Q$ avem $f(qx) = qf(x)$, iar pentru $x = 1$ avem $f(q) = kq$ unde $k = f(1)$.

Fie acum un număr oarecare p irațional. Se știe că orice $p \in R - Q$ este limita unui șir $\{p_r\}_{r \in N}$ de

numere raționale, deci $p = \lim_{r\to\infty} p_r$. Ținînd seama de continuitatea funcției considerate, avem:

$$f(px) = f(\lim_{r\to\infty} p_r x) = \lim_{r\to\infty} f(p_r x) = \lim_{r\to\infty} [p_r f(x)] =$$

$$= pf(x).$$

Punînd $x = 1$ avem că: $f(p) = pf(1) = kp$. Avem deci că funcțiile continue care satisfac ecuația funcțională din enunț sînt de forma $f(x) = kx$ unde $k \in R$. Ținînd seama de condiția suplimentară din enunțul problemei, rezultă $k = 1971^{1969}$, deci funcția cerută este $f : R \to R$ dată de legea $f(x) = 1971^{1969} \cdot x$.

3.29. Dacă punem $f(x) = g(x) - a$ avem:

$$g(x + y) = f(x + y) + a = f(x) + f(y) + 2a =$$

$$= g(x) + g(y).$$

Însă soluțiile ecuației:

$$g(x + y) = g(x) + g(y),$$

g fiind funcție continuă, sînt de forma $g(x) = cx$ unde $c \in R$, arbitrar. Deci soluțiile ecuației din enunț sînt $f(x) = cx - a$.

3.30. Construim funcția $\varphi : R \to R$ astfel

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{x - a} & \text{pentru } x \neq a \\ e^a & \text{pentru } x = a. \end{cases}$$

Conform 1) conchidem că φ este continuă pe R. Ținînd seama de 2) avem:

$$\varphi(x + y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y).$$

Dacă notăm $\varphi(x) = e^{\psi(x)}$ obținem ecuația funcțională:

$$\psi(x + y) = \psi(x) + \psi(y).$$

Această ultimă ecuație este una din ecuațiile funcționale ale lui Cauchy,

Avem:

$$\psi(x) = kx, \text{ deci } \varphi(x) = e^{kx}.$$

Cum $\varphi(a) = e^a$ obținem $k = 1$.

Prin urmare $e^x = \dfrac{f(x)}{x - a}$, adică

$$f(x) = (x - a) \cdot e^x.$$

3.31. Făcînd în relația din enunț înlocuirile: $x \to x + y$, $y \to 0$, obținem:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \sqrt{f(x+y) \cdot f(0)},$$

de unde

$$f^2\left(\frac{x+y}{2}\right) = f(x+y) \cdot f(0) = f(x) \cdot f(y).$$

Ținînd seama că $f(x) > 0$, $(\forall) x \in R$, are loc egalitatea

$$\ln [f(x+y) \cdot f(0)] = \ln [f(x) \cdot f(y)]$$

sau

$$\ln f(x+y) + \ln f(0) = \ln f(x) + \ln f(y),$$

ceea ce se mai poate scrie

$$[\ln f(x+y) - \ln f(0)] = [\ln f(x) - \ln f(0)] + [\ln f(y) - \ln f(0)].$$

Notînd $F(x) = \ln f(x) - \ln f(0)$, funcția $F\colon R \to R$ va fi continuă și va satisface relația

$$F(x+y) = F(x) + F(y), \quad (\forall) x, y \in R.$$

Însă după cum se știe singura funcție continuă care verifică egalitatea de mai sus este

$$F(x) = ax, \ a = F(1) = \text{const.}$$

Rezultă:

$$F(x) = ax = \ln\frac{f(x)}{f(0)}, \quad \text{deci: } \frac{f(x)}{f(0)} = e^{ax}, \quad \text{adică}$$

$f(x) = \alpha e^{ax}$, unde $\alpha = f(0)$ și $a = \ln\dfrac{f(1)}{f(0)}$.

3.32. a). Făcînd $x \to \sqrt[n]{x}$ și $y \to \sqrt[n]{y}$ prima relație se mai scrie

$$f(\sqrt[n]{x}) + f(\sqrt[n]{y}) = f(\sqrt[n]{x+y}), \ (\forall)x, y \in R^+. \quad (1)$$

Considerăm funcția g, $g: R^+ \to R^+$, astfel încît:

$$g(x) = f(\sqrt[n]{x}), \ (\forall)x \in R^+.$$

Funcția f fiind continuă și funcția g este continuă. Relația (1) devine:

$$g(x) + g(y) = g(x+y), \ (\forall)x, y \in R^+. \quad (2)$$

Dar singura funcție continuă, pozitivă care verifică relația (2) este funcția $g(x) = ax$, $a \geqslant 0$. Din felul cum am definit funcția g rezultă ușor că funcția f are forma generală:

$$f: R^+ \to R^+.$$

$$f(x) = ax^n \text{ unde } a \geqslant 0.$$

b). Făcînd $x \to \sqrt[n]{x}$ și $y \to \sqrt[n]{y}$ relația de la punctul a) devine

$$f(\sqrt[n]{x}) \cdot f(\sqrt[n]{y}) = f(\sqrt[n]{x+y}), \quad (\forall), x, y \in R^+. \quad (3)$$

Fie funcția $g, g: R^+ \to R$, astfel încît

$$f(x) = a^{g(x^n)}, \ (\forall) \ x \in R^+ \text{ unde } a > 0 \text{ și } a \neq 1.$$

Funcția f fiind continuă și funcția g este continuă. Relația (3) devine

$$a^{g(x)+g(y)} = a^{g(x+y)} \Rightarrow g(x) + g(y) = g(x+y),$$

$$(\forall)x, y \in R^+.$$

Ca şi la punctul (a) deducem: $g(x) = bx$ şi de aici rezultă uşor că

$$f\colon R^+ \to R^+ - \{0\}$$

$$f(x) = c^{x^n} \text{ unde } c > 0.$$

3.33. Punînd $x = y = \frac{t}{2}$ obţinem: $f(t) = f^2\left(\frac{t}{2}\right) \geqslant 0$. Deci funcţia f este pozitivă pe tot domeniul de definiţie. Putem face substituţia:
$f(x) = a^{g(x)}$, $a \geqslant 0$; $a \neq 1$ şi $g\colon R \to R$. Ecuaţia funcţională din enunţ devine:

$$a^{g(x+y)} = a^{g(x)+g(y)}.$$

Pentru $a = 0$ se obţine funcţia constantă $f(x) = 0$.
Pentru $a > 0$ rezultă:

$$g(x + y) = g(x) + g(y). \qquad (1)$$

Funcţia f este continuă, şi din $f(x) = e^{g(x)}$ deducem că şi funcţia g este continuă. Însă singura funcţie continuă care verifică ecuaţia (1) este funcţia

$$g(x) = bx \text{ unde } b = g(1).$$

Deci singura funcţie continuă $f\colon R \to R$ care verifică ecuaţia funcţională din enunţ este

$$f(x) = a^{bx} \text{ cu } a \geqslant 0, \text{ unde } a^b = f(1).$$

3.34. Se observă că funcţia constantă $f(x) = 0$ verifică ecuaţia funcţională din enunţ. Considerăm acum funcţia f diferită de funcţia constantă $f(x) = 0$. Definim funcţia $g\colon (0, \infty) \to (0, \infty)$ dată de: $g(x) = a^{f(x)}$ cu $a \in (0,1) \cup (1, \infty)$. Se observă că funcţia y este continuă pentru că şi f este continuă.

Din $g(x) = a^{f(x)}$ cu $a \in (0,1) \cup (1, \infty)$ rezultă $f(x) = \log_a g(x)$.

Ecuaţia funcţională din enunţ devine

$$\log_a g(x \cdot y) = \log_a g(x) \cdot g(y).$$

De unde deducem

$$g(x \cdot y) = g(x) \cdot g(y). \qquad (1)$$

Dar singura funcție continuă g: $(0, \infty) \to (0, \infty)$ care verifică ecuația (1) este funcția identică

$$g(x) = x.$$

Deci funcțiile continue f: $(0, \infty) \to R$ care verifică ecuația funcțională din enunț sînt:

a). funcția constantă $f(x) = 0$.

b). funcția $f(x) = \log_a x$ cu $a \in (0,1) \cup (1, +\infty)$.

3.35. Notînd $f(x) = \varphi(x) + x$ obținem:

$$\varphi(x + y) = \varphi(x)\varphi(y).$$

Punînd $\varphi(x) = e^{\psi(x)}$ rezultă $\psi(x + y) = \psi(x) + \psi(y)$.

Dar această ecuație nu are altă soluție decît $\psi(x) = kx$, deoarece este continuă. Deci $f(x) = e^{kx} + x$.

Din condiția b) rezultă $k \neq 0$ iar din $f(1) = e + 1$ obținem $k = 1$, deci $f(x) = e^x + x$.

3.36. Punînd în relația dată $x = y = z = 0$ rezultă $\varphi(0) = f(0) + g(0) + h(0)$. De asemenea, luînd $y = z = 0$, apoi $x = z = 0$ și după aceea $x = y = 0$, obținem relațiile

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= f(x) + g(0) + h(0) \\ \varphi(y) &= g(y) + f(0) + h(0) \qquad (\forall)\ x, y, z \in R. \\ \varphi(z) &= h(z) + f(0) + g(0) \end{aligned}$$

care, adunate membru cu membru, conduc la relația

$$\varphi(x) + \varphi(y) + \varphi(z) = f(x) + g(y) + h(z) + \\ + 2[f(0) + g(0) + h(0)]$$

sau

$$\varphi(x) + \varphi(y) + \varphi(z) = \varphi(x + y + z) + 2\varphi(0), \\ (\forall)\ x, y, z \in R.$$

Înlocuind în relația de mai sus pe z cu 0, obținem:

$$\varphi(x) + \varphi(y) = \varphi(x + y) + \varphi(0), \ (\forall)\ x, y \in R. \quad (1)$$

Vom considera acum funcția auxiliară $\psi : R \to R$ dată de

$$\psi(x) = \varphi(x) - \varphi(0).$$

Atunci funcția ψ este continuă pe R și din (1) obținem:

$$\psi(x) + \psi(y) = \psi(x + y), \quad (\forall)\ \ x, y \in R.$$

Însă singura funcție continuă $\psi : R \to R$ care satisface ecuația funcțională de mai sus este (vezi problema 3.28):

$$\psi(x) = ax,$$

unde $a = \psi(1)$ este o constantă reală.

De aici obținem $\varphi(x) = ax + b$, $b = \varphi(0)$. Notînd $f(0) = b_1$, $g(0) = b_2$, $h(0) = b_3$, rezultă că singurele funcții care îndeplinesc condiția din enunț sînt de forma $\varphi(x) = ax + b$; $f(x) = ax + b_1$; $g(x) = ax + b_2$; $h(x) = ax + b_3$ unde $b_1 + b_2 + b_3 = b$.

3.37. Considerăm funcția

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{x} & \text{dacă } x \neq 0 \\ 1 & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$$

Din condițiile a) și b) rezultă că φ este continuă pe R. Obținem:

$$\varphi(x + y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y),$$

de unde rezultă $\varphi(x) = e^{kx}$ deci $f(x) = xe^{kx}$, iar din condiția d) rezultă $k = 1$, deci $f(x) = x \cdot e^{x}$.

3.38. Fie $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$. Atunci $g(xy) = g(x) + g(y)$, $(\forall)\ x, y \in (0, 1)$. Dar singura funcție continuă care satisface ecuația în g este $g(x) = \log_a x$. Rezultă că $f(x) = x \log_a x = \log_a x^x$.

3.39. Funcția $f(x)$ trebuie să fie identic zero și pentru aceasta nu trebuie asigurată continuitatea a priori. Într-adevăr, luînd succesiv $y = x, x^2, x^3$ avem:

$$f(x^2) = 2xf(x);$$

$$f(x^3) = xf(x) + x^2f(x^2) = (x + 2x^3)\ f(x);$$

$$f(x^4) = xf(x) + x^3f(x^3) = (x + x^4 + 2x^6)\, f(x). \quad (1)$$

Însă $x^4 = x^2 \cdot x^2$, astfel încît rezultă:

$$f(x^4) = 2x^3f(x^2) = 4x^3 \cdot f(x). \quad (2)$$

Din (1) și (2) rezultă $f(x) = 0$, exceptînd posibilitatea cînd x este o rădăcină a ecuației $2x^6 + x^4 + x = 4x^3$, adică $f(x) = 0$ cu cel mult un număr finit de excepții. Dar dacă $f(t) \neq 0$ atunci $f(t^2) \neq 0$ și aceasta arată că o infinitate de puncte au proprietatea $f(x) \neq 0$, o contradicție.

3.40. 1°. Dacă nu există $t \in R - \{0\}$, astfel încît $f(x + t) = f(x)$ pentru $(\forall)x \in R$, atunci evident $M = \emptyset$.

2°. Dacă există $t' \in R - \{0\}$ astfel ca $f(x + t') = f(x)$ pentru $(\forall)x \in R$, atunci f este periodică și va admite pe lîngă perioada t' și perioadele $k \cdot t'$ unde $k \in R - \{0\}$. Rezultă că $M = \{kt' \in R - \{0\} \mid k \in Z - \{0\}\}$.

Definind funcția $h: Z - \{0\} \to M$ prin relația $h(z) = z \cdot t'$, am obținut bijecția căutată.

3.41. a). Într-un interval pozitiv există sigur un punct irațional α și două puncte raționale a, b astfel încît $a < \alpha < b$. Evident $f(a) > f(\alpha) < f(b)$, pentru că $f(\alpha)$ este negativ și $f(a), f(b)$ pozitive. Dacă intervalul este negativ, atunci $f(a) < f(\alpha) > f(b)$. Dacă intervalul conține pe 0 atunci putem alege fie un subinterval pozitiv, fie unul negativ și problema este aceeași. Deci funcția nu este monotonă.

b). Vom compune pe f cu ea însăși

$$(f \circ f)\ (x) = \begin{cases} x \text{ dacă } x \text{ e rațional} \\ -(-x) \text{ dacă } x \text{ e irațional.} \end{cases}$$

În fond $(f \circ f)(x) = x$, adică obținem funcția identică. Deci f este inversabilă.

c). Să tindem spre x_0 pe două șiruri, unul de numere raționale, celălalt de numere iraționale. Pe primul șir limita va fi x_0, pe al doilea șir, $-x_0$. Ori $x_0 = -x_0$ numai dacă $x_0 = 0$. Deci f este continuă în 0 și discontinuă în orice alt punct.

3.42. 1) Fie t_1 perioada lui f și t_2 perioada lui g. Vom arăta că g admite perioada t_1. Fie x_0 un număr real. Vom avea, $k \in Z$:

$$0 \leqslant |g(x_0 + t_1) - g(x_0)| = |g(x_0 + kt_2 + t_1) - $$
$$- g(x_0 + kt_2)| = |g(x_0 + kt_2 + t_1) - f(x_0 +$$
$$+ kt_2 + t_1) + f(x_0 + kt_2 + t_1) - g(x_0 + kt_2)| \leqslant$$
$$\leqslant |g(x_0 + kt_2 + t_1) - f(x_0 + kt_2 + t_1)| +$$
$$+ |f(x_0 + kt_2 + t_1) - g(x_0 + kt_2)|.$$

Trecînd la limită pentru $k \to \infty$ obținem:

$$0 \leqslant g(x_0 + t_1) - g(x_0) \leqslant 0 \text{ deci } g(x_0 + t_1) = g(x_0)$$

Analog se arată că t_2 este perioadă a lui f.

2) Fie $x_0 \in R$, T fiind perioada comună avem: $f(x_0) - g(x_0) = f(x_0 + kT) - g(x_0 + kT)$ și deoarece membrul doi al egalității cînd $k \to \infty$ tinde către 0, rezultă că $(\forall) x_0 \in R$ avem $f(x_0) = g(x_0)$.

3.43. Fie $|x_1 - x_2| = \alpha$ avem succesiv:

$$|x_2 - x_3| = |f(x_1) - f(x_2)| \leqslant k\ |x_1 - x_2| = k\alpha$$

$$|x_3 - x_4| = |f(x_2) - f(x_3)| \leqslant k\ |x_2 - x_3| \leqslant k^2\alpha$$

. . . .

$$|x_{n+1} - x_{n+2}| \leqslant k^n\alpha.$$

De aici rezultă:

$$|x_{n+1}-x_{n+p}| \leqslant |x_{n+1}-x_{n+2}| + |x_{n+2}- \\ - x_{n+3}| + \ldots + |x_{n+p-1}-x_{n+p}| \leqslant (k^n + \\ + k^{n+1} + \ldots + k^{n+p-2})\,\alpha < \frac{k^n}{1-k}\alpha. \qquad (1)$$

Dar $k^n \to 0$ cînd $n \to \infty$, deci șirul $\{x_n\}$ este șir fundamental (șir Cauchy) și deci este convergent. Fie x limita acestui șir. Inegalitatea (1) se mai poate scrie:

$$|x_{n+1}-x_{n+p}| < \frac{k^n}{1-k}\cdot\alpha.$$

Trecînd la limită pentru $p \to \infty$ avem:

$$|x_{n+1}-x| \leqslant \frac{k^n}{1-k}\cdot\alpha$$

sau

$$|f(x_n)-x| \leqslant \frac{k^n}{1-k}\cdot\alpha.$$

Trecînd acum la limită pentru $n \to \infty$ obținem:

$$|f(x)-x| = 0$$

adică $f(x) = x$.

Să arătăm că punctul x obținut este unic. Pentru aceasta să mai presupunem că ar mai exista încă un punct $x' \neq x$ pentru care $f(x') = x'$.
Dar:

$$|x'-x| = |f(x') - f(x)| \leqslant k\,|x'-x|, \text{ deci}$$

$$|x'-x| \leqslant k\,|x'-x|$$

relație imposibilă deoarece $|x'-x| \neq 0$ și $k < 1$.

3.44. Să considerăm aplicația g, $g: R \to R - \{-1, 1\}$ dată de relația:

$$g(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}.$$

Aplicația g este injectivă căci presupunînd că $g(z_1) = g(z_2)$ rezultă imediat $z_1 = z_2$. De asemenea, se poate arăta cu ușurință că g este și surjecție, deoarece ecuația

$$\frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} = a$$

pentru $a \in R - \{-1, 1\}$ admite o soluție unică, anume:

$$z = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + a}{1 - a} \right|.$$

Din bijectivitatea lui g rezultă că pentru orice $x, y \in \in R - \{-1, 1\}$, există $u, v \in R$ astfel încît $x = = g(u)$, $y = g(v)$. Mai mult decît atît,

$$1 + xy = 1 + g(u) \cdot g(v) \neq 0.$$

Să considerăm acum aplicația compusă $f \circ g$, $f \circ g$: $R \to R$. Vom observa că relația din enunț se transcrie echivalent astfel:

$$(f \circ g)(u) + (f \circ g)(v) = (f \circ g)\ (u + v), \quad u, v \in R.$$

Dar egalitatea de mai sus nu reprezintă altceva decît ecuația lui Cauchy și, ținînd seama că funcția $f \circ g$ este continuă, urmează că singurele soluții sînt:

$$(f \circ g)_k\ (z) = kz, \text{ unde } k \in R.$$

De aici deducem imediat că singurele soluții continue ale ecuației din enunț sînt:

$$f_k(x) = k \cdot g^{-1}(x) = \frac{k}{2} \ln \left| \frac{1 + x}{1 - x} \right|, \quad k \in R.$$

Capitolul IV

FUNCȚII DERIVABILE. DERIVATE

Fie f o funcție definită pe un interval I și $x_0 \in I$. Pentru fiecare $x \in I - \{x_0\}$ să considerăm raportul

$$R(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Definiție. Spunem că funcția $f : I \to R$ este derivabilă în punctul $x_0 \in I$, dacă raportul $R(x)$ are în punctul x_0 limită finită. Limita însăși se numește derivata funcției f în punctul x_0 și se notează cu $f'(x_0)$, deci:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Pentru derivata $f'(x_0)$ se mai folosește notația:

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0}.$$

Dacă limita raportului este infinită ($+\infty$ sau $-\infty$), ea se numește de asemenea derivata funcției f în punctul x_0 și se notează tot cu $f'(x_0)$. În acest caz nu mai spunem că funcția este derivabilă în x_0. Vom distinge expresia „funcția f are derivată (finită sau infinită)" de expresia „funcția f este derivabilă".

Teoremă. Dacă funcția $f : I \to R$ este derivabilă în punctul $x_0 \in I$, atunci f este continuă în x_0.

Derivate laterale

Definiție. Spunem că funcția f este derivabilă la stînga în punctul x_0, dacă raportul $R(x)$ are limită la

stînga finită în x_0. Această limită se numește derivata la stînga a funcției f în punctul x_0 și se notează cu $f_s'(x_0)$ deci:

$$f_s'(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Vom scrie că $f_s'(x_0) = +\infty$ sau $f_s'(x_0) = -\infty$ dacă

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty \text{ (sau } -\infty).$$

Definiție. Spunem că funcția f este derivabilă la dreapta în punctul x_0, dacă raportul $R(x)$ are limită la dreapta finită în x_0. Această limită se numește derivata la dreapta a funcției f în punctul x_0 și se notează cu $f_d'(x_0)$ deci:

$$f_d'(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Vom scrie că $f_d'(x_0) = +\infty$ sau $f_d'(x_0) = -\infty$ dacă

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty \text{ (sau } -\infty).$$

Propoziție. O funcție $f : I \to R$ are derivată într-un punct interior $x_0 \in I$, dacă și numai dacă are derivate laterale egale în x_0. În acest caz:

$$f'(x_0) = f_s'(x_0) = f_d'(x_0).$$

Definiție. Spunem că funcția $f : I \to R$ este derivabilă pe o submulțime $A \subset I$, dacă este derivabilă în fiecare punct din A.

Exemple de funcții derivabile

1°. Funcția constantă $f(x) = c$ definită pe R este derivabilă pe R și $f'(x) = 0$.

2°. Funcția $f(x) = x^n$, $(n \in N)$ este derivabilă pe R și $f'(x) = nx^{n-1}$.

3°. Funcţia $f(x) = \sqrt{x}$ este definită pe $[0, +\infty)$, derivabilă pe $(0, +\infty)$ şi $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

4°. Funcţia $f(x) = \sin x$ este derivabilă pe R şi $f'(x) = \cos x$.

5°. Funcţia $f(x) = \cos x$ este derivabilă pe R şi $f'(x) = -\sin x$.

6°. Funcţia $f(x) = \ln x$ este derivabilă pe $(0, +\infty)$ şi $f'(x) = \frac{1}{x}$.

7°. Funcţia $f(x) = e^x$ este derivabilă pe R şi $f'(x) = e^x$.

Operaţii cu funcţii derivabile

Propoziţia 1. Dacă funcţiile f şi g definite pe un interval I sînt derivabile într-un punct $x_0 \in I$, atunci funcţia $f + g$ este derivabilă în x_0 şi:

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

Propoziţia 2. Dacă funcţiile f şi g definite pe I sînt derivabile într-un punct $x_0 \in I$, atunci funcţia $f \cdot g$ este derivabilă în x_0 şi:

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0).$$

Propoziţia 3. Dacă funcţiile f şi g definite pe I sînt derivabile într-un punct $x_0 \in I$ şi dacă $g(x_0) \neq 0$, atunci funcţia $\frac{f}{g}$ este derivabilă în x_0 şi:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}.$$

Fie funcţiile $u : I \to J$ şi $\varphi : J \to R$, I şi J fiind intervale. Să considerăm funcţia compusă $f = \varphi \circ u$.

Teoremă. Dacă funcţia u este derivabilă într-un punct $x_0 \in I$ şi funcţia φ este derivabilă în $y_0 = u(x_0) \in J$, atunci funcţia compusă $f = \varphi \circ u$ este derivabilă în x_0 şi

$$f'(x_0) = \varphi'(u(x_0)) \cdot u'(x_0).$$

Fie f o aplicație strict monotonă a unui interval I pe un interval J

$$f : I \to J \text{ și } f(I) = J$$

și fie $\varphi = f^{-1}$ funcția inversă a lui f

$$\varphi : J \to I.$$

Teoremă. Dacă funcția f este derivabilă într-un punct $x_0 \in I$ și dacă $f'(x_0) \neq 0$, atunci funcția sa inversă $\varphi = f^{-1}$ este derivabilă în punctul $y_0 = f(x_0) \in J$ și

$$\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Alte exemple de funcții derivabile

1°. Funcția $f(x) = a^x$ definită pe R este derivabilă pe R și $f'(x) = a^x \ln a$ (s-a presupus că $a \in (0,1) \cup (1, +\infty)$).

2°. Funcția $f(x) = x^\alpha$ definită pe $(0, +\infty)$ este derivabilă și $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$.

3°. Dacă funcțiile u și v sînt derivabile pe un interval I și dacă $u(x) > 0$ pentru orice $x \in I$, atunci funcția u^v este derivabilă pe I și

$$(u^v)' = vu^{v-1} \cdot u' + u^v \cdot \ln u \cdot v'.$$

4°. Funcția $f(x) = \arcsin x$ este derivabilă pe $(-1, +1)$ și

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

5°. Funcția $f(x) = \arccos x$ este derivabilă pe $(-1, +1)$ și

$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

6°. Funcția $f(x) = \operatorname{arctg} x$ este derivabilă pe R și

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

7°. Funcția $f(x) = \text{arcctg}\, x$ este derivabilă pe R și

$$f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Derivate de ordin superior

Fie f o funcție definită pe un interval I (sau pe o reuniune de intervale) și x_0 un punct din I. Presupunem că derivata întîia f' există pe o întreagă vecinătate a lui x_0.

Definiție. Dacă derivata f' este derivabilă în punctul x_0 se spune că funcția f este derivabilă de două ori în punctul x_0, derivata lui f' în x_0 se notează $f''(x_0)$ sau $\left.\frac{d^2f}{dx^2}\right|_{x=x_0}$ și se numește derivata a doua (sau derivata de ordinul 2) a funcției f în punctul x_0, deci:

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}.$$

Se definește prin recurență derivata de un ordin n oarecare $(n \in N)$.

Definiție. Dacă funcția f este derivabilă de $(n-1)$ ori pe o vecinătate V a lui x_0, și dacă derivata $f^{(n-1)}$ este derivabilă în x_0, se spune că funcția f este derivabilă de n ori în x_0, derivata lui $f^{(n-1)}$ în punctul x_0 se notează cu $f^{(n)}(x_0)$ sau $\left.\frac{d^nf}{dx^n}\right|_{x=x_0}$ și se numește derivata de ordinul n a funcției f în punctul x_0, deci:

$$f^{(n)}(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in V}} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0}.$$

PROBLEME

4.1. Să se cerceteze continuitatea și derivabilitatea funcției $f(x) = x + \frac{1}{x}$ și să se calculeze derivata $f'(x)$ pornind de la definiție.

4.2. Să se calculeze derivata funcției

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x - 6}{2x^2 + x - 3}$$

în punctul $x_0 = -1$, aplicînd definiția.

4.3. Să se calculeze cu ajutorul definiției, derivata funcției $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$ în punctul $x_0 = 1$.

4.4. Să se calculeze derivata funcției $f : R \to R$ dată de legea:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 17} - \sqrt{x^2 - 4x + 4}$$

în punctul $x_0 = 2$.

(*C. Ionescu-Țiu*, G.M.B., 14417, 1974)

4.5. Se consideră funcția f definită de

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 4}{3}}.$$

Să se studieze derivabilitatea funcției.

4.6. Să se studieze derivabilitatea funcției f unde $f(x) = e^x - 3x$ și să se calculeze derivata $f'(x)$ pornind de la definiția derivatei.

4.7. 1°. Să se calculeze derivata funcției

$$f(x) = \arcsin x - \arccos\sqrt{1 - x^2}$$

pentru $x \in (-1, +1)$.

2°. Să se exprime $f'\left(+\frac{1}{2}\right)$ și $f'\left(+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

4.8. Se consideră funcția $f: R \to R$ dată prin relația:

$$f(x) = x + |x - a|$$

unde $a \in R$.

1°. Să se studieze continuitatea funcției f pe tot domeniul ei de definiție.

2°. Să se studieze derivabilitatea funcției f în punctul $x_0 = a$.

4.9. Se consideră funcția $f: R \to R$ dată de legea:

$$f(x) = x^2 - 2x + 1 + 3|x - 2|.$$

1°. Să se calculeze derivata funcției în punctul $x_0 = 3$.

2°. Să se calculeze derivata funcției în punctul $x_0 = -1$.

3°. Să se calculeze derivatele laterale ale funcției f în punctul $x_0 = 2$.

4.10. Se consideră funcția $f: E_{\max} \subseteq R \to R$ dată de legea:

$$f(x) = \frac{|2 + x| - |3 - x|}{|1 + x| + |4 - x|}.$$

1°. Să se determine domeniul de definiție $E_{\max}$.

2°. Să se determine domeniul în care funcția f este continuă.

3°. Funcția f este derivabilă pentru orice $x \in R$?

4.11. Să se calculeze derivata funcției $f: R \to R$ cu

$$f(x) = \sqrt[3]{|x|}.$$

4.12. Să se calculeze derivata funcției

$$f(x) = \ln\sqrt{\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}} \text{ unde } |x| > 1.$$

4.13. Fie funcția $f: R \to R$ dată de

$$f(x) = \cos|x|.$$

Să se studieze derivabilitatea funcției f și să i se calculeze derivata.

4.14. Să se calculeze derivata funcției

$$f(x) = \text{tg}\, |x|.$$

4.15. Se consideră funcția $f : R - \{1\} \to R$, dată de

$$f(x) = \cos \sqrt{\left(\frac{x}{x-1}\right)^2}.$$

1°. Să se studieze derivabilitatea funcției f.
2°. Să se calculeze derivata funcției f.

· **4.16.** Se consideră funcția $f : R \to R$ dată de

$$f(x) = \sin \sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}}.$$

1°. Să se studieze derivabilitatea funcției f.
2°. Să se calculeze derivata funcției f.

4.17. Se dă funcția

$$f(t) = \begin{cases} -\dfrac{t^2+1}{2} & \text{pentru } t < -1 \\ t & \text{pentru } t \in [-1, 1] \\ \dfrac{t^2+1}{2} & \text{pentru } t > 1. \end{cases}$$

Să se arate că funcția f are derivata continuă pe R.

4.18. Se consideră funcția

$$f(x) = \begin{cases} \max\,(x, x^2, x^3) & \text{pentru } x \leqslant 0 \\ \min\,(x, x^2, x^3) & \text{pentru } x > 0. \end{cases}$$

Să se studieze derivabilitatea funcției f pe mulțimea R.

(*C. Ottescu*, G.M.B., 12112, 1972)

· **4.19.** Să se determine coeficienții α și β astfel încît funcția dată prin

$$f(x) = \begin{cases} (\log_a x)^4 & \text{dacă } 0 < x \leqslant a \\ \alpha x^2 + \beta x + 1 & \text{dacă } x > a \end{cases}$$

să fie derivabilă pentru orice $x > 0$.

4.20. Să se calculeze derivata funcției

$$f(x) = \sqrt{x + 3 - 4\sqrt{x-1}} - \sqrt{x + 8 - 6\sqrt{x-1}}$$

și domeniul ei de definiție.

4.21. Să se determine polinomul $P(x)$ care satisface relația $[P'(x)]^2 = P(x)$ și să se arate că este necesar ca polinomul $P(x)$ să fie de gradul II.

4.22. Să se arate că dacă un polinom $P(x)$ satisface relația $[P'(x)]^3 = [P(x)]^2$ atunci polinomul $P(x)$ este de gradul al treilea.

4.23. Se consideră funcția

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x^2 - \frac{3}{2}} & \text{pentru } x < 1 \\ ax^3 + bx + c & \text{pentru } x \geqslant 1. \end{cases}$$

Să se determine a, b, c astfel ca funcția f să fie de două ori derivabilă pe toată dreapta reală.

(G.M.B., 11482, 1971)

4.24. Se consideră funcția

$$f(x) = \begin{cases} \ln\ (2x + 1) & \text{dacă } -\frac{1}{2} < x \leqslant 0 \\ 2x & \text{dacă } x > 0. \end{cases}$$

Este funcția f derivabilă în $x = 0$?

4.25. Se consideră funcția

$$f(x) = 1 + \ln\frac{|x| + 1}{|x - 1|}.$$

Să se găsească domeniul maxim de existență al funcției f și apoi să se studieze continuitatea și derivabilitatea funcției f.

4.26. Se consideră funcția f, $f : R \to R$.

$$f(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{|\sin x|\, e^{nx} + |\cos x|}{e^{nx} + 1}.$$

Să se studieze continuitatea și derivabilitatea funcției f.

(Admitere, Institutul Politehnic, București, 1973)

4.27. Se consideră funcția f reală de variabilă reală definită în modul următor:

$$f(x) = \frac{2x-1}{x^3} \cdot e^{\frac{x-1}{x}}.$$

1°. Care este domeniul de definiție al funcției f?
2°. Să se calculeze $\lim_{x\to\infty} f(x)$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)$.

3°. Să se arate că funcția f este derivabilă în orice punct $x \neq 0$ și să se calculeze derivata.

(Bacalaureat, Franța, 1972).

4.28. Se consideră $f: R \to R$ dată de legea

$$f(x) = \frac{2|x-1|}{x^2-x+1}.$$

1°. Să se studieze continuitatea funcției f pe R.
2°. Să se studieze derivabilitatea funcției f în $x_0 = 1$.

4.29. Să se calculeze derivata funcției

$$f(x) = e^{e^x}$$

folosind definiția.

4.30. Să se calculeze derivata funcției $f(x) = \arcsin x$ pornind de la definiție.

4.31. Fie funcțiile $f, g: R \to R$, astfel încît $g(x) = xf(x)$ pentru orice $x \in R$. Presupunînd că funcția g este derivabilă pe R, să se arate că funcția f este derivabilă în punctul $x = 1$. Rezultă că funcția f este derivabilă pe R?

4.32. Se dă o funcție f, $f: R \to R$ pară și derivabilă. Fie și o altă funcție $g: R \to R$ dată prin relația

$$g(x) = \left(\frac{x^3}{3}+1\right)\cdot f(x) + x.$$ Să se demonstreze că $g'(0) = 1$.

(Concurs elevi, 1973)

4.33. Să se arate că dacă $P(x)$ este un polinom de gradul n în x; $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sînt rădăcinile sale reale (distincte sau confundate) și λ un număr diferit de x_i, $(i = 1, 2, \ldots, n)$, iar $P'(x)$ derivata lui $P(x)$, atunci:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda - x_i} = \frac{P'(\lambda)}{P(\lambda)}.$$

4.34. Se consideră funcția $f\colon R \to R$ dată de legea

$$f(x) = |x^2 - |1 - x^2| + 2|.$$

Să se calculeze derivatele laterale ale funcției f în punctele în care funcția f nu este derivabilă.

4.35. Se consideră funcția f definită în modul următor:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^n} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{pentru } x \neq 0 \\ 0 & \text{pentru } x = 0. \end{cases}$$

Să se arate că $f'(0) = 0$.

4.36. a). Să se cerceteze derivabilitatea funcțiilor

$$f(x) = \sqrt{5 + 4x} + 1 \text{ și } g(x) = -\sqrt{5 + 4x} + 1$$

b). Să se afle valorile lui x pentru care:

$$f'(x) = g'(x) \text{ și pentru care: } f'(x) + g'(x) = 0.$$

4.37. Să se calculeze derivata funcției

$$f(x) = (x^2 - 1)^{x^2}.$$

4.38. Să se scrie ecuația tangentei la curba reprezentată de funcția

$$f(x) = \sin(x^3 - 1) - \frac{4}{x}$$

în punctul de abscisă $x = 1$.

4.39. Să se scrie ecuația tangentei la curba de ecuație

$$f(x, y) = 3x^2 + 2y^2 - 5x - 3y - 11 = 0$$

în punctul $M(2, 3)$.

4.40. Să se determine a astfel încît curba reprezentată de funcția:

$$f(x) = \text{arc tg}\,\frac{x}{a} + \ln\,(x^2 + a^2)$$

să taie axa Oy sub un unghi de 45°.

4.41. Să se arate că graficele corespunzătoare funcțiilor $f(x) = x^2$ și $g(x) = x + 1 - \frac{1}{x}$ sînt tangente și să se scrie ecuația tangentei comune în punctul lor de contact.

4.42. Să se calculeze derivata funcției $f(x) = \ln \sin \sqrt[n]{x}$ pornind de la definiție.

4.43. Să se arate că o funcție $f:R \to R$ pară și derivabilă pe R, are derivata nulă în origine.

4.44. Să se determine condiția necesară și suficientă ca funcția $f:R \to R$, $f(x) = |P_n(x)|$ unde $P_n(x)$ este un polinom cu coeficienți reali, să fie derivabilă.

(*L. Panaitopol*, G.M.A., 43, 1970)

4.45. Să se studieze continuitatea funcției:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + |x|}{x^2 - x} & \text{dacă } x \neq 0 \\ 0 & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$$

Să se cerceteze dacă există $f'(0)$.

(Admitere, Institutul Politehnic, București, 1973)

4.46. Să se calculeze suma

$$\sum_{k=1}^{n} (3k - 2)x^{3k-3},$$

știind că $x \in R - \{1\}$.

4.47. Să se arate că dacă

$xy = c_1e^{ax} + c_2e^{-ax}$ atunci $xy'' + 2y' - a^2xy = 0$.

4.48. Să se calculeze primele două derivate ale funcției $f:(0, \infty) \to R$ cu

$$f(x) = \frac{x + \sqrt{x}}{\sqrt{x + \sqrt{x}}}.$$

4.49. Să se arate că dacă

$$xy = c_1 \cos ax + c_2 \sin ax$$

atunci

$$xy'' + 2y' + a^2 xy = 0.$$

4.50. Fie $f: R \to R$ definită prin

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } x \leqslant 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{pentru } x > 0. \end{cases}$$

Este funcția f de două ori derivabilă pe R?

4.51. Să se arate că derivata de ordinul n a funcției

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \text{ este de forma } [f(x)]^{(n)} = \frac{P_n(x)}{(1 + x^2)^{n+\frac{1}{2}}}$$

unde P_n este un polinom de gradul n.

4.52. Să se arate că dacă

$$y = (c_1 + c_2 x) \cos ax + (c_3 x + c_4) \sin ax,$$

atunci

$$y^{IV} + 2a^2 y'' + a^4 y = 0.$$

4.53. Să se arate că dacă

$$y = c_1(x + \sqrt{x^2 - 1})^n + c_2(x - \sqrt{x^2 - 1})^n$$

atunci

$$(x^2 - 1)y'' + xy' - n^2 y = 0.$$

4.54. Să se studieze derivabilitatea funcției $f:(0, \infty) \to R$, cu

$$f(x) = x^2 \ln x - \frac{x^2}{2}.$$

Să se calculeze f' și f''.

4.55. Să se studieze derivabilitatea funcției $f:(0, \infty) \to R$ cu

$$f(x) = \ln \frac{1}{1+x}.$$

Să se calculeze derivatele f', f'', f'''.

4.56. Să se arate că dacă

$y = C_1 \cos (\ln x) + C_2 \sin (\ln x)$, atunci

$$x^2y'' + xy' + y = 0.$$

4.57. Se consideră funcția

$$f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 - x^4} + \frac{1}{2}\arcsin \sqrt{x^2}.$$

a) Să se afle domeniul maxim de definiție al funcției f.

b) Să se determine a, b, c astfel încît funcția

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{dacă } -1 < x < 0 \\ ax^2 + bx + c & \text{dacă } x \geqslant 0 \end{cases}$$

să fie de două ori derivabilă pe domeniul considerat.

(*V. Băghină*, G.M.B., 6978, 1965)

4.58. Să se calculeze derivata de ordinul n a funcției

$$f(x) = \frac{1}{n!} x \ln (2 + \alpha x)$$

și să se stabilească domeniul de valabilitate al formulei găsite.

(Admitere, Institutul Politehnic, București, 1973)

4.59. Se consideră funcția $f: R - \{0\} \to R$ dată de legea:

$$f(x) = x^{n-1} e^{\frac{1}{x}}.$$

Să se calculeze $f^{(n)}(x)$.

4.60. Se consideră un polinom $P(x)$ de gradul n cu coeficienți reali. Să se arate că pentru orice $a \in R$ avem:

$$P(x) = P(a) + (x - a)\,P'(a) + \frac{(x-a)}{2!}P''(a) + \ldots + \\ + \frac{(x - a^n)^n}{n!}P^{(n)}(a).$$

4.61. Dacă u și v sînt două funcții reale de variabilă reală care admit derivate pînă la ordinul n inclusiv, să se arate că:

$$(u \cdot v)^{(n)} = u^{(n)} \cdot v^{(0)} + C_n^1 u^{(n-1)} \cdot v^{(1)} + \ldots + C_n^p u^{(n-p)} \cdot \\ \cdot v^{(p)} + \ldots + C_n^n u^{(0)} \cdot v^{(n)}.$$

4.62. Se consideră funcțiile $f_n : R \to R$ date de legea:

$$f_n(x) = \sin^n x - \cos^n x.$$

Să se arate că oricare ar fi $n \in N$, $n \geqslant 3$ are loc relația:

$$f_n''(x) + n^2 f_n(x) = n(n-1)f_{n-2}(x).$$

4.63. Fie $T_n(x) = a \sin\left(\alpha x + n\dfrac{\pi}{2}\right) + + b\cos\left(\alpha x + n\dfrac{\pi}{2}\right)$ cu $\alpha, a, b \in R, n \in N$. Dacă notăm $T_n^{(k)}(x)$ derivata de ordinul k a lui $T_n(x)$, să se arate că oricare ar fi $m \in N \cup \{0\}$ avem $T_n^{(m)}(x) = = \alpha^m T_{m+n}(x)$.

(*D. M. Bătinețu*, G.M.B., 10565)

4.64. Să se calculeze derivata de ordinul n a funcției

$$f(x) = \frac{1}{1-x}.$$

4.65. Se consideră funcția $f(x) = x^2 e^x$. Se cere să se arate că derivata de ordinul n a acestei funcții este de forma: $f^{(n)}(x) = (x^2 + a_n x + b_n)e^x$ și să se calculeze coeficienții a_n și b_n.

4.66. Pentru fiecare $x \in (0,1)$ și $k \in N$ considerăm suma:

$$S_k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^k x^n.$$

Să se arate că:

$$S_k(x) = \underbrace{x\frac{d}{dx}\,x\frac{d}{dx}\ldots x\frac{d}{dx}}_{\text{de } k \text{ ori}}\frac{x}{1-x}.$$

4.67. Fie $f: R \to R$ definită prin $f(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$. Să se calculeze suma $S_n(x) = 1 + 2^2x + 3^2 \cdot x^2 + \ldots + n^2x^{n-1}$ și $\lim_{n\to\infty} S_n(x)$ pentru $x \in (0, 1)$, folosind derivatele funcției f.

(Admitere, Institutul Politehnic, București, 1973)

4.68. Se dă funcția

$$f(x) = \frac{\arcsin x}{1-x^2}.$$

a). Pe baza definiției derivatei într-un punct, să se determine $f'(x)$, x fiind în domeniul de definiție.

b). Se dă funcția $g(x) = \dfrac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$. Să se calculeze $g'(x)$ și $g''(x)$.

(Concurs elevi, 1970)

4.69. Să se determine a și b astfel încît funcția $f: (0, +\infty) \to R$ dată de legea

$$f(x) = \begin{cases} \ln^3 x & \text{dacă } x \in (0, e] \\ ax + b & \text{dacă } x \in (e, +\infty) \end{cases}$$

să fie derivabilă în $x = e$.

(Admitere, Facultatea de Matematică-Mecanică, București, 1972)

4.70. Se dă funcția $f: [0,1] \to R$ definită în modul următor:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x = 0 \text{ sau } x = 1 \\ x \sin\dfrac{1}{x} & \text{dacă } 0 < x < \dfrac{1}{\pi} \\ 0 & \text{dacă } \dfrac{1}{\pi} \leqslant x \leqslant 1 - \dfrac{1}{\pi} \\ (1-x)\sin\dfrac{1}{1-x} & \text{dacă } 1 - \dfrac{1}{\pi} < x < 1. \end{cases}$$

1°. Să se determine mulțimea punctelor din segmentul $[0,1]$ în care f este continuă.

2°. Să se determine mulțimea punctelor din segmentul $[0,1]$ în care f este derivabilă.

(Admitere, Facultatea de Matematică-Mecanică, București, 1972)

4.71. Se dă funcția $f: R \to R$ dată de legea

$$f(x) = x\,|x - a| + |x - b.|$$

Să se determine a, b astfel încît f să fie derivabilă pe R.

(Admitere, Facultatea de Matematică-Mecanică, București, 1972)

4.72. Fie $f: R \to R$ o funcție reală cu valori reale și Γ_f graficul său, adică submulțimea planului R^2.

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in R\}.$$

Să considerăm aplicația $u: R^2 \to R^2$ a planului real R^2 în el însuși, dată prin relația $u((x, y)) = (2x + 1, 3x + 4y + 5)$, $(x, y) \in R^2$.

a). Să se arate că imaginea $u(\Gamma_f)$ a mulțimii Γ_f prin u este graficul unei funcții $g: R \to R$.

b). Să se arate că, dacă funcția f este derivabilă, atunci și funcția g este derivabilă și reciproc.

c). Să se găsească relația dintre funcțiile derivate f', g'.

d). Presupunînd că funcția f este definită prin $f(x) = \sin x$, $(\forall) x \in R$, să se determine $g'(1)$.

(Admitere, Facultatea de Matematică-Mecanică, București, 1973)

4.73. Se consideră intervalele (0,1), (2,3), (3,4) și funcțiile u: $(0,1) \to (2,3)$, v: $(2,3) \to (3,4)$ și w:$(0,1) \to (3,4)$ satisfăcînd relațiile:

(1) $w = v \circ u \qquad (w(x) = v(u(x)))$

(2) $$v(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 2 & \text{dacă } 2 < x \leqslant 2 + \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} & \text{dacă } 2 + \frac{1}{2} < x < 3 \end{cases}$$

(3) $w(x) = \sin x + 3, \qquad 0 < x < 1.$

a). Să se găsească punctele în care funcția u este continuă.

b). Să se găsească punctele în care funcția u este derivabilă.

(Admitere, Facultatea de Matematică-Mecanică, București, 1974)

4.74. Fie o funcție definită pe segmentul $[-1, 1]$ cu valori reale dată prin

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} \text{ dacă } & x = \frac{1}{n}; \\ 0 \text{ în toate celelalte puncte.} \end{cases}$$

Să se arate că f este derivabilă în $x = 0$ și să se calculeze $f'(0)$.

(Concurs elevi, 1971)

4.75. Fie $f(x)$ o funcție definită pe R astfel:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - x^2 & \text{cînd } x \text{ este rațional} \\ 0 & \text{cînd } x \text{ este irațional.} \end{cases}$$

a). Să se studieze continuitatea ei.

b). Să se studieze derivabilitatea ei.

(Concurs elevi, 1972)

4.76. Să se arate că funcția g definită prin

$$g(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{pentru } x \neq 0 \\ 0 & \text{pentru } x = 0 \end{cases}$$

admite în punctul $x = 0$ derivatele de orice ordin egale cu zero.

SOLUȚII

4.1. Funcția f este continuă pe $R - \{0\}$. Avem:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\left(x + \frac{1}{x}\right) - \left(x_0 + \frac{1}{x_0}\right)}{x - x_0} =$$

$= 1 - \frac{1}{x_0^2}$. Deci $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$ pentru orice $x \in R - \{0\}$.

4.2. Avem:

$$\frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \frac{\frac{x^2 - 4x - 6}{2x^2 + x - 3} - \frac{1}{2}}{x + 1} = -\frac{9}{2(2x^2 + x - 3)}.$$

Deci

$$f'(-1) = \lim_{x \to -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \frac{9}{4}.$$

4.3. Avem:

$$f'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{3}}{x - 1} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 2}{(x - 1)\left(\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{3}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{3}} = \frac{3}{2\sqrt{3}}.$$

4.4. Legea funcției f se mai poate scrie

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 2x + 17} - (x - 2) & \text{pentru } x > 2 \\ 5 & \text{pentru } x = 2 \\ \sqrt{x^2 + 2x + 17} - (2 - x) & \text{pentru } x < 2 \end{cases}$$

Avem pentru $x \in R - \{2\}$:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2 + 2x + 17}} - 1 & \text{pentru } x > 2 \\ \\ \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2 + 2x + 17}} + 1 & \text{pentru } x < 2 \end{cases}$$

În punctul $x_0 = 2$ funcția f nu este derivabilă deoarece:

$$\frac{3}{5} + 1 = f'_s(2) \neq f'_d(2) = \frac{3}{5} - 1.$$

4.5. Avem: $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 4}}$.

Rezultă că funcția f este derivabilă pe $R - [-2, 2]$.

4.6. Avem:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{(e^x - 3x) - (e^{x_0} - 3x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \left(\frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} - 3 \right) = e^{x_0} - 3.$$

Rezultă că f este derivabilă pe R și $f'(x) = e^x - 3$.

4.7. Avem:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} + \frac{\dfrac{-2x}{2\sqrt{1 - x^2}}}{\sqrt{1 - (1 - x^2)}},$$

sau

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} - \frac{x}{|x|\sqrt{1 - x^2}}.$$

Rezultă că $f'\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$ și $f'\left(+\dfrac{1}{2}\right) = 0$.

4.8. 1°. Funcția f este continuă pe R deoarece este suma a două funcții continue pe R.

2°. Legea funcției se mai poate scrie

$$f(x) = \begin{cases} a \text{ dacă } x \in (-\infty, a] \\ 2x - a \text{ dacă } x \in (a, +\infty). \end{cases}$$

$$f'_s(a) = \lim_{x \to a} \frac{a - a}{x - a} = 0, \quad f'_d(a) = \lim_{x \to a} \frac{2x - a - a}{x - a} = 2.$$

Funcția f nu este derivabilă în $x = a$.

4.9. 1°.2°. Legea funcției f se mai poate scrie

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 5 & \text{pentru } x > 2 \\ 1 & \text{pentru } x = 2 \\ x^2 - 5x + 7 & \text{pentru } x < 2 \end{cases}$$

$$\text{Deci } f'(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{pentru } x > 2 \\ 2x - 5 & \text{pentru } x < 2. \end{cases}$$

$$f'(3) = 7, \ f'(-1) = -7, \ f'_s(2) = -1, \ f'_d(2) = 5.$$

4.10. 1°.2°. Numărătorul și numitorul funcției sînt funcții definite și continue pentru orice $x \in R$, iar numitorul este diferit de zero pentru orice $x \in R$, deci funcția f este definită și continuă pe R.

3°. Legea funcției f se mai poate scrie

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-5}{2x - 3} & \text{pentru } x \in (-\infty, -2] \\ \dfrac{-2x + 1}{2x - 3} & \text{pentru } x \in (-2, -1] \\ \dfrac{2x - 1}{5} & \text{pentru } x \in (-1, 3] \\ 1 & \text{pentru } x \in (3, 4] \\ \dfrac{5}{2x - 3} & \text{pentru } x \in (4, +\infty). \end{cases}$$

Funcţia f este derivabilă pe mulţimea $R-\{-2, -1, 3, 4\}$. Pe mulţimea $\{-2, -1, 3, 4\}$ funcţia f nu este derivabilă, deoarece în fiecare punct al mulţimii derivatele laterale ale funcţiei sînt diferite.

4.11. Se observă că funcţia f nu este derivabilă în punctul $x = 0$. Ţinînd seama de regulile de derivare; avem:

$$f'(x) = \left(|x|^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}(|x|)' \cdot |x|^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}|x|^{-\frac{2}{3}}\frac{|x|}{x} =$$

$$= \frac{1}{3}\frac{\sqrt[3]{|x|}}{x}.$$

Unde $|x|'$ este funcţie cu domeniul restrîns faţă de $|x|$.

Altă soluţie. Fie $x_0 \in R$. Atunci

$$f'(x_0) = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{|x|} - \sqrt[3]{|x_0|}}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x\to x_0}\frac{|x| - |x_0|}{x - x_0}\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\sqrt[3]{|x|^2} + \sqrt[3]{|x|\,|x_0|} + \sqrt[3]{|x_0|^2}} =$$

$$= \frac{1}{3\sqrt[3]{|x_0|^2}}\lim_{x\to x_0}\frac{|x| - |x_0|}{x - x_0} = \frac{1}{3\sqrt[3]{|x_0|^2}}\cdot\frac{|x_0|}{x_0} = \frac{1}{3}\frac{\sqrt[3]{|x_0|}}{x_0}.$$

Cum x_0 a fost ales arbitrar avem în general

$$f'(x) = \frac{1}{3}\frac{\sqrt[3]{|x|}}{x}.$$

4.12. Funcţia f se mai scrie

$$f(x) = \ln\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}} = \ln\sqrt{x^2+1} - \ln\sqrt{x^2-1} =$$

$$= \frac{1}{2}[\ln(x^2+1) - \ln(x^2-1)].$$

De unde

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{2x}{x^2+1} - \frac{2x}{x^2-1}\right] = -\frac{2x}{x^4-1}.$$

4.13. Se verifică ușor că funcția f este derivabilă pe R. Ținînd seama de regulile de derivare, avem

$$f'(x) = -(|x|)' \sin|x| = -\frac{|x|}{x}\sin|x|.$$

Altă soluție: Fie $x_0 \in R$. Atunci

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{\cos|x| - \cos|x_0|}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x\to x_0}\frac{2\sin\frac{|x|+|x_0|}{2}\sin\frac{|x_0|-|x|}{2}}{x-x_0} =$$

$$= \sin|x_0| \lim_{x\to x_0}\frac{2\sin\frac{|x_0|-|x|}{2}}{\frac{|x_0|-|x|}{2}} \lim_{x\to x_0}\frac{|x_0|-|x|}{x-x_0} =$$

$$= -\sin|x_0|\lim_{x\to x_0}\frac{|x|-|x_0|}{x-x_0} = -\frac{|x_0|}{x_0}\sin|x_0|.$$

Cum x_0 a fost ales arbitrar, avem în general

$$f'(x) = -\frac{|x|}{x}\sin|x|.$$

4.14. Ținînd seama de regulile de derivare avem:

$$f'(x) = (|x|)'\frac{1}{\cos^2|x|} = \frac{|x|}{x}\cdot\frac{1}{\cos^2|x|}.$$

Altă soluție. Fie $x_0 \in R - \bigcup_{k\in Z}\left\{k\pi + \frac{\pi}{2}\right\}$. Avem

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{\operatorname{tg}|x| - \operatorname{tg}|x_0|}{x-x_0} =$$

$$= \lim_{x\to x_0}\frac{\sin(|x|-|x_0|)}{(x-x_0)\cos|x|\cos|x_0|} =$$

$$= \frac{1}{\cos^2|x_0|}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{\sin(|x|-|x_0|)}{x-x_0} =$$

$$= \frac{1}{\cos^2 |x_0|} \lim_{x \to x_0} \frac{\sin (|x| - |x_0|)}{|x| - |x_0|} \lim_{x \to x_0} \frac{|x| - |x_0|}{x - x_0} =$$

$$= \frac{1}{\cos^2 |x_0|} \lim_{x \to x_0} \frac{|x| - |x_0|}{x - x_0} = \frac{|x_0|}{x_0} \cdot \frac{1}{\cos^2 |x_0|}.$$

Cum x_0 a fost ales arbitrar avem în general

$$f'(x) = \frac{|x|}{x} \cdot \frac{1}{\cos^2 |x|}.$$

4.15. 1°. Funcția f se mai scrie

$$f(x) = \cos \left| \frac{x}{x-1} \right|.$$

Explicitînd funcția f obținem

$$f(x) = \begin{cases} \cos \dfrac{x}{x-1} & \text{dacă } x \in (-\infty, 0] \cup (1, +\infty) \\ \cos \dfrac{x}{1-x} & \text{dacă } x \in (0,1). \end{cases}$$

Funcția f este derivabilă pe $R - \{0,1\}$. Să cercetăm derivabilitatea în $x = 0$.

$$f_s'(0) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{\cos \dfrac{x}{x-1} - 1}{x} =$$

$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{-2 \sin^2 \dfrac{x}{2(x-1)}}{x} =$$

$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \left(\frac{\sin \dfrac{x}{2(x-1)}}{\dfrac{x}{2(1-x)}} \right)^2 \cdot \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{-2 \cdot \dfrac{x^2}{4(1-x)^2}}{x} = 0.$$

$$f'_d(0) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{\cos \frac{x}{1-x} - 1}{x} =$$

$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{-2\sin^2 \frac{x}{2(1-x)}}{x} =$$

$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \left[\frac{\sin \frac{x}{x(1-x)}}{\frac{x}{2(1-x)}} \right]^2 \cdot \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{-2x}{4(1-x)^2} = 0.$$

Deci funcția f este derivabilă pe $R - \{1\}$.

2°. Ținînd seama de regulile de derivare, avem

$$f'(x) = \left(\cos \left|\frac{x}{x-1}\right|\right)' = \left(\left|\frac{x}{x-1}\right|\right)' \sin \left|\frac{x}{x-1}\right| =$$

$$= \frac{\left|\frac{x}{x-1}\right|}{\frac{x}{x-1}} \left(\frac{x}{x-1}\right)' \sin \left|\frac{x}{x-1}\right| =$$

$$= \frac{|x|(x-1)}{x \cdot |x-1|} \cdot \frac{-1}{(x-1)^2} \sin \left|\frac{x}{x-1}\right| =$$

$$= -\frac{|x|}{x(x-1) \cdot (|x-1|)} \sin \left|\frac{x}{x-1}\right|.$$

4.16. Funcția f se mai scrie:

$$f(x) = \sin \frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Se observă că funcția f nu este derivabilă în punctul $x = 0$.

$$f'_s(0) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{\sin \frac{-x}{\sqrt{x^2+1}}}{x} =$$

$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{\sin \frac{-x}{\sqrt{x^2+1}}}{\frac{-x}{\sqrt{x^2+1}}} \lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{\frac{-x}{\sqrt{x^2+1}}}{x} = -1.$$

$$f'_d(0) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{\sin \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x} =$$

$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{\sin \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}} \cdot \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x} = 1.$$

Cum $-1 = f'_s(0) \neq f'_d(0) = 1$ rezultă că funcția f nu este derivabilă în punctul $x = 0$. Deci funcția f este derivabilă pe $R - \{0\}$.

2. Ținînd seama de regulile de derivare, avem

$$f'(x) = \left(\sin \frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}}\right)' = \left(\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}}\right)' \cos \frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}} =$$

$$= \frac{\frac{|x|}{x}\sqrt{x^2+1} + |x| \frac{x}{\sqrt{(x^2+1)}}}{x^2+1} \cos \frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}} =$$

$$= \frac{|x|}{x} \cdot \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} \cos \frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}}.$$

4.17. Se observă că funcția f este continuă și derivabilă pe R. Rezultă

$$f'(t) = \begin{cases} -t & \text{pentru } t < -1 \\ 1 & \text{pentru } t \in [-1,1] \\ t & \text{pentru } t > 1. \end{cases}$$

Se observă că funcția f' este continuă pe R. Deci funcția f este derivabilă cu derivata continuă pe R.

4.18. Dacă $x > 1$ atunci $x < x^2 < x^3$ deci $\min(x, x^2, x^3) = x$. Dacă $x \in (0,1)$ atunci $x > x^2 > x^3$ deci $\min(x, x^2, x^3) = x^3$. Deoarece $x < x^2$ și $x^3 < x^2$ pentru $x \in (-\infty, 0)$, rezultă că legea funcției se mai poate scrie:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{pentru } x \in (-\infty, 0] \\ x^3 & \text{pentru } x \in (0,1] \\ x & \text{pentru } x \in (1, \infty). \end{cases}$$

Funcția f este derivabilă pe mulțimea

$$(-\infty, 0) \cup (0,1) \cup (1, +\infty).$$

Rămîne să studiem derivabilitatea funcției f în punctele 0 și 1.

Avem: $f'_s(0) = 0$, $f'_d(0) = 0$, $f'_s(1) = 3$, $f'_d(1) = 1$, de unde rezultă că funcția f este derivabilă în $x_0 = 0$. În punctul $x'_0 = 1$, funcția nu este derivabilă.

4.19. Funcția f este evident derivabilă pe intervalele $(0, a) \cup (a, +\infty)$.

Din condiția ca f să fie continuă în $x = a$, $\lim\limits_{x \nearrow a} f(x) = \lim\limits_{x \searrow a} f(x) = f(a)$, obținem:

$$(\log_a a)^4 = 1 = \alpha a^2 + \beta a + 1 = 1, \text{ deci } a(\alpha a + \beta) = 0.$$

Pentru ca f să fie derivabilă în $x = a$, va trebui ca

$$f'_s(a) = 4(\log_a a)^3 \cdot \frac{1}{a \cdot \ln a} = f'_d(a) = 2\alpha a + \beta.$$

Sistemul care ne dă coeficienții α, β este:

$$\begin{cases} a(\alpha a + \beta) = 0 \\ 2\alpha a + \beta = \dfrac{4}{a\ln a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha a + \beta = 0 \\ \alpha a + (\alpha a + \beta) = \dfrac{4}{a\ln a} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -\alpha a \\ \alpha a = \dfrac{4}{a\ln a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{4}{a^2\ln a} \\ \beta = \dfrac{-4}{a\ln a}. \end{cases}$$

Din enunț rezultă că $a \neq 1$ și $a \neq 0$.

4.20. Funcția este definită pe $[1, \infty)$, iar legea ei se mai poate scrie

$$f(x)=\sqrt{x-1-4\sqrt{x-1}+4}-\sqrt{x-1-6\sqrt{x-1}+9}=$$
$$=\sqrt{(\sqrt{x-1}-2)^2}-\sqrt{(\sqrt{x-1}-3)^2}=$$
$$=|\sqrt{x-1}-2|-|\sqrt{x-1}-3|,$$

deci:

$$f(x)=\begin{cases}-1 & \text{dacă } x\in[1,\ 5)\\ 2\sqrt{x-1}-5 & \text{dacă } x\in[5,\ 10)\\ 1 & \text{dacă } x\in[10,\ \infty).\end{cases}$$

De aici se observă că f este continuă pe $[1, \infty)$ și derivabilă pe $[1,\ 5) \cup (5,\ 10) \cup (10,\ \infty)$. Derivata este:

$$f'(x)=\begin{cases}0 & \text{dacă } x\in[1,\ 5)\cup(10,\ \infty)\\ \dfrac{1}{\sqrt{x-1}} & \text{dacă } x\in(5,\ 10).\end{cases}$$

4.21. Dacă notăm $n = \text{gr}\cdot P(x)$, relația din enunț conduce la egalitatea:

$$2(n-1)=n \Rightarrow n=2.$$

Fie $P(x)=ax^2+bx+c$.
$[P'(x)]^2 = P(x) \Leftrightarrow (2\,ax+b)^2 = ax^2+bx+c \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 4a^2x^2+4\,abx+b^2=ax^2+bx+c$, de unde rezultă sistemul de ecuații:

$$\begin{cases}4a^2=a\\ 4ab=b\\ c=b^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a(4a-1)=0\\ b(4a-1)=0\\ c=b^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=0\\ b=0\\ c=0\end{cases} \text{ sau } \begin{cases}a=\dfrac{1}{4}\\ b=b\\ c=b^2\end{cases}$$

Prima soluție a sistemului nu convine. A doua conduce la polinomul $P(x)=\dfrac{1}{4}x^2+bx+b^2$.

4.22. Fie $n = \text{gr} \cdot P(x)$. Atunci $\text{gr} \cdot P'(x) = n - 1$, iar egalitatea din enunț, interpretată ca egalitate a gradelor polinoamelor din cei doi membri ai ei, conduce la relația

$$3(n-1) = 2n \Rightarrow n = 3,$$

deci polinomul este de gradul trei.

4.23. Funcția f este de două ori derivabilă pe $R - \{1\}$. Constantele a, b, c se determină din condițiile ca funcția f să fie de două ori derivabilă în punctul $x = 1$.

Din condiția ca funcția f să fie continuă în $x = 1$, obținem

$$a + b + c = e^{-\frac{5}{2}}. \tag{1}$$

Punem condiția ca f să fie derivabilă în $x = 1$.

$$f'_s(1) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} =$$

$$= \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \frac{e^{-x^2 - \frac{3}{2}} - (a + b + c)}{x - 1} = -2e^{-\frac{5}{2}}.$$

$$f'_d(1) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} =$$

$$= \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \frac{ax^3 + bx + c - (a + b + c)}{x - 1} = 3a + b.$$

Deci a doua condiție este:

$$3a + b = -2e^{-\frac{5}{2}}. \tag{2}$$

Calculînd f', obținem

$$f'(x) = \begin{cases} -2xe^{-x^2 - \frac{3}{2}} & \text{pentru } x < 1 \\ 3ax^2 + b & \text{pentru } x \geqslant 1. \end{cases}$$

Funcția f' este continuă pe R prin condițiile puse. Punem condiția ca f' să fie derivabilă în $x = 1$.

$$f''_s(1) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{-2xe^{-x^2-\frac{3}{2}} - (3a+b)}{x-1} =$$

$$= \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{-2xe^{-x^2-\frac{3}{2}} + 2e^{-\frac{5}{2}}}{x-1} = 2e^{-\frac{5}{2}}.$$

$$f''_d(1) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{3ax^2 + b - (3a+b)}{x-1} = 6a.$$

Deci a treia condiție este

$$3a = e^{-\frac{5}{2}}$$

Din (1), (2) și (3) găsim $a = \frac{1}{3} e^{-\frac{5}{2}}$,

$$b = -3e^{-\frac{5}{2}}, \quad c = \frac{11}{3} e^{-\frac{5}{2}}.$$

4.24. Funcția f este continuă în $x = 0$ și:

$$f'_s(0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{\ln(2x+1)}{x} = 2 \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{\ln(1+2x)}{2x} = 2.$$

$$f'_d(0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{2x}{x} = 2.$$

Deci funcția f este derivabilă în $x=0$ avînd: $f'_s(0)=f'_d(0)$.

4.25. Domeniul maxim de existență al funcției f este $R - \{1\}$. Explicitînd funcția f, obținem

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } x \in (-\infty, 0] \\ 1 + \ln\dfrac{1+x}{1-x} & \text{dacă } x \in (0,1) \\ 1 + \ln\dfrac{x+1}{x-1} & \text{dacă } x \in (1, \infty). \end{cases}$$

Se observă că funcția f este continuă și derivabilă pe $R - \{0,1\}$. Rămîne să studiem continuitatea și derivabilitatea funcției f în punctul $x = 0$. Funcția f este continuă în punctul $x = 0$. Într-adevăr

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = f(0) = 1.$$

Funcția f nu este derivabilă în punctul $x = 0$. Avem

$$f'_s(0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1 - 1}{x} = 0.$$

$$f'_d(0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\ln \frac{1+x}{1-x}}{x} =$$

$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\ln(1 + x)}{x} + \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\ln(1 - x)}{-x} = 1 + 1 = 2.$$

Deci $0 = f'_s(0) \neq f'_d(0) = 2$. Deci funcția f este continuă pe $R - \{1\}$ și derivabilă pe $R - \{0,1\}$.

4.26. Se obține ușor că:

$$f(x) = \begin{cases} |\sin x| & \text{dacă } x > 0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{dacă } x = 0 \\ |\cos x| & \text{dacă } x < 0. \end{cases}$$

Funcția f este discontinuă în 0.

$$f(0) = \frac{1}{2}, \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = 0, \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = 1.$$

Funcția f nu este derivabilă în punctele $x = k\pi$, $(\forall) k \in N \cup \{0\}$.

Într-adevăr, pentru $k \in N$ avem

$$\lim_{\substack{x\to 2k\pi\\ x>2k\pi}} f'(x) = 1 \quad \text{și} \quad \lim_{\substack{x\to 2k\pi\\ x<2k\pi}} f'(x) = -1.$$

Analog pentru punctele $x = (2k + 1)\pi$ cu $k \in N$.

De asemenea, funcția f nu este derivabilă în punctele $x = (2k - 1)\frac{\pi}{2}$ cu $k \in Z - N$. Pentru $k \in Z - N$ avem

$$\lim_{\substack{x \to (4k-1)\frac{\pi}{2} \\ x > (4k-1)\frac{\pi}{2}}} f'(x) = 1, \quad \lim_{\substack{x \to (4k-1)\frac{\pi}{2} \\ x < (4k-1)\frac{\pi}{2}}} f'(x) = -1.$$

Analog și pentru punctele $x = (4k - 3)\frac{\pi}{2}$, $k \in Z - N$.

Deci funcția f este continuă pe $R - \{0\}$ și derivabilă pe $R - [\{0\} \cup \{k\pi \mid k \in N\} \cup \{(2k - 1)\frac{\pi}{2} \mid k \in Z - N\}]$.

4.27. 1°. Domeniul maxim de definiție al funcției f este $R - \{0\}$.

2°. $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$, $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = \infty$.

3°. $$f'(x) = \left(\frac{2x - 1}{x^3}\right)' e^{\frac{x-1}{x}} + \frac{2x - 1}{x^3}\left(e^{\frac{x-1}{x}}\right)' =$$

$$= \frac{-4x + 3}{x^4} \cdot e^{\frac{x-1}{x}} + \frac{2x - 1}{x^3} \cdot \frac{1}{x^2} \cdot e^{\frac{x-1}{x}} =$$

$$= -\frac{(x - 1)(4x - 1)}{x^5} e^{\frac{x-1}{x}}.$$

4.28. Funcția f este continuă pe R deoarece este cîtul a două funcții continue pe R și $x^2 - x + 1 \neq 0$.

2. Deoarece $f'_s(1) = \lim_{x \to 1} \dfrac{\frac{2(1 - x)}{x^2 - x + 1}}{x - 1} = -2$ și $f'_d(1) = 2$ rezultă că funcția f nu este derivabilă în punctul $x_0 = 1$.

4.29. Avem:

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{e^{e^x} - e^{e^{x_0}}}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \left(\frac{e^{e^x} - e^{e^{x_0}}}{e^x - e^{x_0}} \cdot \frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} \right) =$$

$$= \lim_{u\to u_0} \frac{e^u - e^{u_0}}{u - u_0} \cdot \lim_{x\to x_0} \frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} = e^{u_0} \cdot e^{x_0} = e^{e^{x_0}} \cdot e^{x_0}$$

(S-a notat $u = e^x$ și $u_0 = e^{x_0}$).

4.30. Avem:

$$f'(x_0) = \lim \frac{\arcsin x - \arcsin x_0}{x - x_0}.$$

Notăm $\arcsin x = u$ și $\arcsin x_0 = u_0$ și cînd $x \to x_0$ atunci $u \to u_0$. Deci:

$$f'(x_0) = \lim_{u\to u_0} \frac{u - u_0}{\sin u - \sin u_0} = \lim_{u\to u_0} \frac{u - u_0}{2\sin\frac{u-u_0}{2}\cos\frac{u+u_0}{2}} =$$

$$= \lim_{u\to u_0} \frac{1}{\cos\frac{u+u_0}{2}} = \frac{1}{\cos u_0} = \frac{1}{\sqrt{1-x_0^2}}.$$

4.31. Ținînd seama că funcția g este derivabilă în punctul $x = 1$ și că $g(1) = f(1)$ avem

$$g'(1) = \lim_{x\to 1} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{xf(x) - f(1)}{x - 1} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{xf(x) - xf(1) + xf(1) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} + f(1).$$

Deci: $\lim\limits_{x\to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = g'(1) - f(1) = g'(1) - g(1).$

Rezultă că $\lim\limits_{x\to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ există și este finită deci funcția f este derivabilă în punctul $x = 1$.
Nu rezultă că funcția f este derivabilă pe R.

Vom da un contraexemplu. Fie $f(x) = |x|$. Atunci $g(x) = x|x|$.
Funcția g este derivabilă pe R, însă funcția f nu este derivabilă în punctul $x = 0$.
Mai mult, nu rezultă că funcția f este continuă pe R. Funcția g este continuă pe R. Deci $\lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$ pentru orice $x_0 \in R$. Atunci $x_0 f(x_0) = \lim_{x \to x_0} xf(x) = x_0 \lim_{x \to x_0} f(x) \Rightarrow x_0(f(x_0) - \lim_{x \to x_0} f(x)) = 0$.
Pentru $x_0 \neq 0$ rezultă $f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x)$.
Pentru $x_0 = 0$ nu este obligatoriu ca $f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x)$.
Deci s-ar putea ca funcția f să aibă un punct de discontinuitate în $x = 0$.

4.32. Funcția f fiind pară, avem $f(x) = f(-x)$, $(\forall) x \in R$, de unde $f'(x) = (-x)' \cdot f'(-x) = -f'(-x)$ sau $f'(x) + f'(-x) = 0$, $(\forall) x \in R$. Punînd $x = 0$ rezultă $f'(0) = 0$.
Atunci, deoarece funcția g este evident derivabilă, avem:

$$g'(x) = \left(\frac{x^3}{3} + 1\right)' \cdot f(x) + \left(\frac{x^3}{3} + 1\right) f'(x) +$$

$$+ 1 = x^2 \cdot f(x) + \left(\frac{x^3}{3} + 1\right) \cdot f'(x) + 1 \text{ și prin urmare}$$

$g'(0) = 1$.

4.33. $P(x) = A(x - x_1)\ (x - x_2) \ldots (x - x_n)$,
$P'(x) = A[(x - x_2)\ (x - x_3) \ldots (x - x_n) + (x - x_1) \cdot (x - x_3) \ldots (x - x_n) + \ldots + (x - x_1)\ (x - x_2) \ldots (x - x_{n-1})]$.

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \frac{1}{x - x_1} + \frac{1}{x - x_2} + \ldots + \frac{1}{x - x_n}.$$

Pentru $x = \lambda$ obținem

$$\frac{P'(\lambda)}{P(\lambda)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda - x_i}, \text{ unde } \lambda \text{ este diferit de } x_i.$$

4.34. Explicitînd funcția f obținem:

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{pentru } x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \\ 2x^2 + 1 & \text{pentru } x \in (-1, 1). \end{cases}$$

Funcția f este derivabilă pe $R - \{-1, 1\}$. Pentru punctele $x = -1$ și $x = 1$ avem

$$f'_s(-1) = \lim_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} \frac{3 - 3}{x - 1} = 0.$$

$$f'_d(-1) = \lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} \frac{2x^2 + 1 - 3}{x + 1} =$$

$$= \lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} 2(x - 1) = -4.$$

$$f'_s(1) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \frac{2x^2 + 1 - 3}{x - 1} =$$

$$= \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} 2(x + 1) = 4.$$

$$f'_d(1) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \frac{3 - 3}{x - 1} = 0.$$

4.35. Avem

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^{\frac{1}{n}} e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^{n+1} e^{\frac{1}{x^2}}}.$$

Facem substituția $\frac{1}{x^2} = y > 0$, pentru $x \to 0$ avem $y \to +\infty$. Deci

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^{n+1} e^{\frac{1}{x^2}}} = \lim_{y \to \infty} \frac{y^{\frac{n+1}{2}}}{e^y} = 0.$$

Deci $f'(0) = 0$.

4.36. a) Domeniul maxim de definiție al funcțiilor

$$f \text{ și } g \text{ este } \left[-\frac{5}{4}, \infty\right).$$

Se verifică ușor că funcțiile f și g sînt derivabile pe intervalul $\left(-\frac{5}{4}, \infty\right)$. Într-adevăr, fie $x_0 \in \left(-\frac{5}{4}, \infty\right)$; atunci:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\sqrt{5 + 4x} - \sqrt{5 + 4x_0}}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{4(x - x_0)}{x - x_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{5 + 4x} + \sqrt{5 + 4x_0}} = \frac{2}{\sqrt{5 + 4x_0}}.$$

Analog se obține pentru $x_0 \in \left(-\frac{5}{4}, \infty\right)$,

$$g'(x_0) = -\frac{2}{\sqrt{5 + 4x_0}}.$$

Pentru $x = -\frac{5}{4}$ avem:

$$f'\left(-\frac{5}{4}\right) = \lim_{x \to -\frac{5}{4}} \frac{f(x) - f\left(-\frac{5}{4}\right)}{x + \frac{5}{4}} = \lim_{x \to -\frac{5}{4}} \frac{\sqrt{5 + 4x}}{x + \frac{5}{4}} =$$

$$= \lim_{x \to -\frac{5}{4}} \frac{4}{\sqrt{5 + 4x}} = \infty.$$

Analog se obține $g'\left(-\frac{5}{4}\right) = -\infty$.

Deci funcțiile f și g nu sînt derivabile în punctul

$$x = -\frac{5}{4}.$$

b) Am arătat că pentru $x_0 \in \left(-\frac{5}{4}, \infty\right)$ avem

$$f'(x_0) = \frac{2}{\sqrt{5+4x_0}}.$$

Cum x_0 a fost ales arbitrar, avem în general $f'(x) = = \frac{2}{\sqrt{5+4x}}$ pe intervalul $\left(-\frac{5}{4}, \infty\right)$. Analog pe intervalul $\left(-\frac{5}{4}, \infty\right)$, $g'(x) = -\frac{2}{\sqrt{5+4x}}$.

Se observă că $f'(x) \neq g'(x)$, $(\forall)x \in \left(-\frac{5}{4}, \infty\right)$ și

$$f'(x) + g'(x) = 0, \qquad (\forall)x \in \left(-\frac{5}{4}, \infty\right)$$

4.37. Ținînd seama de regulile de derivare avem:
$f'(x) = 2x^3(x^2-1)^{x^2-1} + 2x(x^2-1)^{x^2} \ln (x^2-1)$.
Se observă că f' este definită pentru $x \in (-\infty, -1) \cup \cup (1, +\infty)$.

4.38. Avem:

$$f'(x) = 3x^2 \cos (x^3-1) + \frac{4}{x^2} \Rightarrow f'(1) = 7, \text{ iar } f(1) = -4.$$

Deci ecuația tangentei în punctul de abscisă $x = 1$ este

$$y + 4 = 7(x-1).$$

4.39. Funcția $y(x)$ fiind dată sub formă implicită în raport cu x, are derivata dată de formula

$$y' = -\frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dy}} = -\frac{6x-5}{4y-3},$$

sau derivînd: $6x + 4yy' - 5 - 3y' = 0$.

Deci panta tangentei la curba dată în punctul $M(2,3)$

$$\text{este } m = -\frac{7}{9}.$$

Ecuația tangentei la curba dată în punctul $M(2, 3)$ este

$$y - 3 = -\frac{7}{9}(x-2) \quad \text{sau} \quad 7x + 9y - 41 = 0.$$

4.40. Avem:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{a}}{\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + 1}} + \frac{2x}{x^2 + a^2} \Rightarrow f'(0) = \frac{1}{a}.$$

Curba reprezentată de funcția f taie axa Oy sub un unghi de 45° dacă:

$$f'(0) = 1 \Rightarrow \frac{1}{a} = 1 \Rightarrow a = 1.$$

4.41. Din ecuația $f(x) = g(x) \Rightarrow x_1 = 1$ sau $x_2 = -1$. Avem: $f(1) = g(1) = 1$, $f(-1) = g(-1) = 1$.

Punctele A, B de intersecție ale graficelor celor două funcții au coordonatele: $A(1,1)$, $B(-1,1)$.

Rezultă $f'(1) = g'(1) = 2$ iar $f'(-1) \neq g'(-1)$. Ecuația tangentei comune celor două curbe în punctul de contact $A(1,1)$ este $2x - y - 1 = 0$.

4.42. Avem:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\ln \sin \sqrt[n]{x+h} - \ln \sin \sqrt[n]{x}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \ln \left(\frac{\sin \sqrt[n]{x+h}}{\sin \sqrt[n]{x}}\right)^{\frac{1}{h}} = \ln \lim_{h\to 0} e^{\frac{\sin \sqrt[n]{x+h} - \sin \sqrt[n]{x}}{h \sin \sqrt[n]{x}}} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin \sqrt[n]{x+h} - \sin \sqrt[n]{x}}{h \sin \sqrt[n]{x}} =$$

$$= \frac{1}{\sin \sqrt[n]{x}} \cdot \lim_{h \to 0} \frac{2\sin \frac{\sqrt[n]{x+h} - \sqrt[n]{x}}{2} \cos \frac{\sqrt[n]{x+h} + \sqrt[n]{x}}{2}}{h} =$$

$$= \frac{\cos \sqrt[n]{x}}{\sin \sqrt[n]{x}} \lim_{h \to 0} \left(\frac{2\sin \frac{\sqrt[n]{x+h} - \sqrt[n]{x}}{2}}{\frac{\sqrt[n]{x+h} - \sqrt[n]{x}}{2}} \cdot \frac{\sqrt[n]{x+h} - \sqrt[n]{x}}{2h} \right) =$$

$$= \frac{\cos \sqrt[n]{x}}{\sin \sqrt[n]{x}} \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt[n]{x+h} - \sqrt[n]{x}}{h} =$$

$$= \mathrm{ctg} \sqrt[n]{x} \lim_{h \to 0} \frac{h}{h\left[(x+h)^{\frac{n-1}{n}} + \ldots + x^{\frac{n-1}{n}}\right]} =$$

$$= \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n} - 1} \cdot \mathrm{ctg} \sqrt[n]{x}.$$

4.43. Avem:

$$f'_s(0) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{-y \to 0 \\ (-y) < 0}} \frac{f(-y) - f(0)}{-y - 0} =$$

$$= -\lim_{\substack{y \to 0 \\ y > 0}} \frac{f(y) - f(0)}{y - 0} = -f'_d(0). \text{ Deci } f'_s(0) + f'_d(0) = 0$$

și cum $f'_s(0) = f'_d(0)$, rezultă:
$f'_s(0) = f'_d(0) = 0$, deci $f'(0) = 0$.

4.44. Dacă $P_n(x)$ nu are rădăcini reale, atunci:

$$|P_n(x)| = \varepsilon P_n(x), \qquad (\text{unde } \varepsilon = \pm 1)$$

deci f este derivabilă pe R.

Fie x_0 o rădăcină cu ordin de multiplicitate k pentru $P_n(x)$. Raportul

$$\frac{|P_n(x)| - |P_n(x_0)|}{x - x_0} = \frac{|(x - x_0)^k Q(x)|}{x - x_0}$$

are limite laterale egale în x_0 dacă și numai dacă avem $k \geqslant 2$.

4.45. Legea funcției $f:R - \{1\} \to R$, definită în enunț, se mai poate scrie:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x}{x^2 - x} & \text{dacă } x < 0 \\ 0 & \text{dacă } x = 0 \\ \dfrac{x^2 + x}{x^2 - x} & \text{dacă } x > 0,\ x \neq 1 \end{cases}$$

$$\text{sau } f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } x < 0 \\ 0 & \text{dacă } x = 0 \\ \dfrac{x + 1}{x - 1} & \text{dacă } x > 0,\ x \neq 1 \end{cases}$$

Acum este evident că funcția f este continuă pe mulțimea $(-\infty, 0) \cup (0,1) \cup (1, \infty)$ și că f nu este continuă în punctul 0, deci nederivabilă.
Avem:

$$f'_s(0) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{1 - 0}{x - 0} = -\infty \text{ și } f'_d(0) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{\dfrac{x+1}{x-1} - 0}{x} = +\infty$$

rezultă că $f'(0)$ nu există.

4.46. Considerăm identitatea

$$x + x^4 + x^7 + \ldots + x^{3n-2} = \frac{x^{3n+1} - x}{x^3 - 1}. \quad (1)$$

Într-adevăr

$$x + x^4 + x^7 + \ldots + x^{3n-2} = x(1 + x^3 + x^6 + \ldots$$

$$\ldots + x^{3(n-1)}) = x \cdot \frac{x^{3n} - 1}{x^3 - 1} = \frac{x^{3n+1} - x}{x^3 - 1}.$$

Derivînd în ambii membri ai identității (1), găsim:

$$\sum_{k=1}^{n} (3k - 2)x^{3k-3} =$$

$$= \frac{(3n - 2)x^{3(n+1)} - (3n + 1)x^{3n} + 2x^3 + 1}{(x^3 - 1)^2}.$$

4.47. Din enunț rezultă:

$$y = \frac{c_1e^{ax} + c_2e^{-ax}}{x}.$$

Calculînd succesiv derivatele I și a II-a, obținem

$$y' = a\frac{c_1e^{ax} - c_2e^{-ax}}{x} - \frac{c_1e^{ax} + c_2e^{-ax}}{x^2},$$

$$y'' = a^2\frac{c_1e^{ax} + c_2e^{-ax}}{x} - 2a\frac{c_1e^{ax} - c_2e^{-ax}}{x^2} +$$

$$+ 2\frac{c_1e^{ax} + c_2e^{-ax}}{x^3}.$$

Ținînd seama de acestea, obținem

$$xy'' + 2y' - a^2xy = 0.$$

4.48. Considerăm funcția $g:(0, \infty) \to (0, \infty)$ dată de legea $g(x) = x + \sqrt{x}$.

Atunci $f(x) = \dfrac{g(x)}{\sqrt{g(x)}}$. Ținînd seama de regulile de derivare, avem:

$$f'(x) = \frac{g'(x)\sqrt{g(x)} - \dfrac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}g(x)}{g(x)} = \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}.$$

$$f''(x) = \left[\frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}\right]' = \frac{1}{2}\cdot\frac{g''(x)\sqrt{g(x)} - \dfrac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}g'(x)}{g(x)} =$$

$$= \frac{2g(x)g''(x) - [g'(x)]^2}{4g(x)\sqrt{g(x)}}.$$

Dar cum $g(x) = x + \sqrt{x}$ rezultă:

$$g'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} \text{ și } g''(x) = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}}.$$

Înlocuind, obținem

$$f'(x) = \frac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+\sqrt{x}}} \text{ și } f''(x) =$$

$$= -\frac{4x\sqrt{x}+6x+3\sqrt{x}}{16x\sqrt{x}(x+\sqrt{x})\sqrt{x+\sqrt{x}}}.$$

4.49. Derivînd ambii membri ai egalității din enunț și ținînd seama că y este funcție de x, vom obține:

$$y + xy' = -ac_1 \sin ax + ac_2 \cos ax.$$

Derivînd din nou în egalitatea de mai sus, obținem:

$y' + xy'' + y' = -a^2 c_1 \cos ax - a^2c_2 \sin ax$, de unde

$$xy'' + 2y' + a^2xy = -a^2c_1 \cdot \cos ax - a^2c_2 \sin ax +$$
$$+ a^2c_1 \cos ax + a^2c_2 \sin ax = 0.$$

4.50. Se observă că funcția f este de două ori derivabilă pe subintervalele $(-\infty, 0]$ și $(0, +\infty)$. Trebuie să studiem dacă funcția f este de două ori derivabilă în punctul $x = 0$. Funcția f este continuă în punctul $x = 0$. Avem:

$$f'_s(0) = 0 \text{ și } f'_d(0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{e^{-\frac{1}{x}} - 0}{x - 0} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{xe^{\frac{1}{x}}}.$$

Facem substituția $x = \frac{1}{y}$; cînd $x \to 0$ cu $x > 0$, atunci $y \to +\infty$. Deci

$$f'_d(0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{xe^{\frac{1}{2}}} = \lim_{y\to\infty} \frac{y}{e^y} = 0.$$

Rezultă că funcţia f este derivabilă pe tot domeniul de definiţie cu derivata continuă. Avem:

$$f'(x) = \begin{cases} 0 \text{ pentru } x \leqslant 0 \\ \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} \text{ pentru } x > 0. \end{cases}$$

Studiind derivabilitatea funcţiei f' în punctul $x = 0$, obţinem

$$f_s''(0) = 0 \text{ şi } f_d''(0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} - 0}{x - 0} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x^3 e^{\frac{1}{x}}}.$$

Efectuînd aceeaşi substituţie $x = \frac{1}{y}$, găsim

$$f_d''(0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x^3 e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{y\to\infty} \frac{y^3}{e^y} = 0.$$

4.51. Procedăm prin inducţie matematică completă. Avem:

$$f'(x) = \frac{x}{(1+x^2)^{1+\frac{1}{2}}}.\ \text{Presupunem } [f(x)]^{(n)} = $$

$$= \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+\frac{1}{2}}}.$$

Atunci:

$$[f(x)]^{n+1} = \left[\frac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+\frac{1}{2}}}\right]' =$$

$$= \frac{P_n'(x)(1+x^2)^{n+\frac{1}{2}} - (2n+1)x(1+x^2)^{n-\frac{1}{2}} P_n(x)}{(1+x^2)^{2n+1}} =$$

$$= \frac{(1+x^2)P_n'(x) - (2n+1)xP_n(x)}{(1+x^2)^{n+1+\frac{1}{2}}} = \frac{P_{n+1}(x)}{(1+x^2)^{n+1+\frac{1}{2}}}.$$

Polinomul $(1 + x^2)P'_n(x) - (2n + 1)xP_n(x)$ este de gradul $n + 1$.
Fie într-adevăr $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n \Rightarrow$
$\Rightarrow P'_n(x) = na_0x^{n-1} + ... + a_{n-1}$. Atunci

$$(1 + x^2)\, P'_n(x) - (2n + 1)\, xP_n\, (x) = na_0x^{n+1} + ... + a_{n-1} - [(2n + 1)\, a_0x^{n+1} + ... + a_nx] = -(n + 1)a_0x^{n+1} + ... + a_{n-1} = P_{n+1}\, (x).$$

Cu aceasta am demonstrat că

$$[f(x)]^{(n)} = \frac{P_n(x)}{(1 + x^2)^{n+\frac{1}{2}}}.$$

4.52. Avem:

$$y' = c_2 \cdot \cos ax - a(c_1 + c_2x) \sin ax + c_3 \sin ax + a\,(c_3x + c_4) \cos ax;$$

$$y'' = -ac_2 \sin ax - ac_2 \sin ax - a^2(c_1 + c_2x) \cdot \cos ax + ac_3 \cos ax - a^2\,(c_3x + c_4) \sin ax + ac_3 \cos ax = 2\,ac_3 \cos ax - 2\,ac_2 \sin ax - a^2 \cdot y;$$

$$y''' = -2a^2c_3 \sin ax - 2a^2c_2 \cos ax - a^2y';$$

$$y^{IV} = -2a^3c_3 \cos ax + 2a^3c_2 \sin ax - a^2y'',$$ de unde:

$$y^{V} + 2a^2y'' + a^4y = -2a^3c_3 \cos ax + 2a^3c_2 \sin ax + a^2y'' + a^4y = -2a^3c_3 \cos ax + 2a^3c_2 \sin ax + 2a^3c_3 \cos ax - 2a^3c_2 \sin ax - a^4y + a^4y = 0.$$

4.53. Avem:

$$y' = nc_1\,(x + \sqrt{x^2 - 1})^{n-1} \cdot \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}\right) + nc_2\,(x - \sqrt{x^2 - 1})^{n-1} \cdot \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}\right) =$$

$$= \frac{n}{\sqrt{x^2 - 1}} \cdot [c_1\,(x + \sqrt{x^2 - 1})^n - c_2\,(x - \sqrt{x^2 - 1})^n]$$

și

$$y'' = \frac{n}{\sqrt{x^2-1}}\left[nc_1(x+\sqrt{x^2-1})^{n-1}\cdot\right.$$

$$\cdot\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right) - nc_2(x-\sqrt{x^2-1})^{n-1}\cdot$$

$$\left.\cdot\left(1-\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right)\right] - n\cdot\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x^2-1}[c_1(x+$$

$$+\sqrt{x^2-1})^n - c_2(x-\sqrt{x^2-1})^n] = \frac{n^2}{x^2-1}\cdot y -$$

$$-\frac{x}{x^2-1}\cdot y', \text{ de unde}$$

$$(x^2-1)y'' + xy' - n^2y = 0.$$

4.54. Se verifică ușor că funcția f este derivabilă pe $(0, \infty)$. Ținînd seama de regulile de derivare, avem:

$$f'(x) = 2x \ln x + x - x = 2x \ln x.$$

De asemenea, funcția f' este derivabilă pe $(0, \infty)$ și

$$f''(x) = [f'(x)]' = 2(\ln x + 1).$$

4.55. Se observă că funcția f este compusa funcțiilor $v(x) = \ln x$ și $u(x) = \frac{1}{1+x}$. Dar atît funcția v cît și funcția u sînt derivabile pe $(0, \infty)$. Deci funcția f este derivabilă pe $(0, \infty)$. Avem $f(x) = -\ln(1+x)$. Calculînd succesiv avem

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{1+x}\right)'}{\frac{1}{1+x}} = \frac{-\frac{1}{(1+x)^2}}{\frac{1}{1+x}} = -\frac{1}{1+x}.$$

$$f''(x) = [f'(x)]' = \left(-\frac{1}{1+x}\right)' = \frac{1}{(1+x)^2}.$$

$$f'''(x) = [f''(x)]' = \left(\frac{1}{(1+x)^2}\right)' = \frac{-2}{(1+x)^3}.$$

Și în general avem

$$[f(x)]^{(n)} = \frac{(-1)^n\ (n-1)!}{(1+x)_n}.$$

4.56. Calculînd succesiv avem:

$$y' = -C_1 \sin(\ln x)\cdot\frac{1}{x} + C_2 \cos(\ln x)\cdot\frac{1}{x},$$

$$y'' = -C_1 \cos(\ln x)\cdot\frac{1}{x^2} + C_1\ \sin\ (\ln x)\ \frac{1}{x^2} -$$

$$-C_2 \sin(\ln x)\cdot\frac{1}{x^2} - C_2 \cos(\ln x)\cdot\frac{1}{x^2}.$$

și, înlocuind, obținem

$$x^2y'' + xy' + y = 0.$$

4.57. a). Se găsește ușor că domeniul maxim de definiție este $[-1,1]$.

b). funcția g se mai scrie

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\sqrt{x^2 - x^4} + \frac{1}{2}\arcsin(-x) & \text{dacă } -1<x<0 \\ ax^2 + bx + c & \text{dacă } x \geqslant 0. \end{cases}$$

Funcția g este de două ori derivabilă pentru $x \in (-1,0) \cup \cup (0, +\infty)$.

Se pune problema ca funcția g să fie de două ori derivabilă în punctul $x = 0$. Funcția g trebuie să fie continuă pentru $x = 0$, deci limitele laterale în zero ale funcției g trebuie să fie egale. Dar

$$g_s(0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} g(x) = 0 \text{ iar } g_d(0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x) = c;$$

rezultă $c = 0$.

Funcția g trebuie să fie derivabilă în zero, deci derivatele laterale în zero trebuie să fie egale.

Dar

$$g_s'(0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{\frac{1}{2}\sqrt{x^2 - x^4} + \frac{1}{2}\arcsin(-x)}{x} =$$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\left[\sqrt{1-x^2} + \frac{\arcsin(-x)}{-x}\right] = -1.$$

$$g_d'(0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{ax^2 + bx}{x} = b.$$

Rezultă $b = -1$. Funcția g fiind derivabilă pe tot domeniul de definiție, avem

$$g'(x) = \begin{cases} -\sqrt{1-x^2} & \text{dacă } -1 < x < 0 \\ 2ax - 1 & \text{dacă } x \geqslant 0. \end{cases}$$

Funcția g trebuie să fie de două ori derivabilă în zero, deci trebuie ca derivatele laterale ale funcției g' să fie egale pentru $x = 0$.

$$g_s''(0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{g'(x) - g'(0)}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{x} = 0$$

iar

$$g_d''(0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{g'(x) - g'(0)}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{2ax}{x} = 2a.$$

În final găsim: $c = 0$, $b = -1$, $a = 0$.

4.58. Avem succesiv:

$$f'(x) = \frac{1}{n!}\left[\ln(2 + \alpha x) + \frac{\alpha x}{2 + \alpha x}\right] =$$

$$= \frac{1}{n!}\left[\ln(2 + \alpha x) + 1 - \frac{2}{2 + \alpha x}\right].$$

$$f''(x) = \frac{1}{n!}\left[\frac{\alpha}{2 + \alpha x} + \frac{2}{(2 + \alpha x)^2}\right].$$

Fie $g(x) = \frac{1}{2+\alpha x} = (2+\alpha x)^{-1}$ și $h(x) = \frac{1}{(2+\alpha x)^2} = (2+\alpha x)^{-2}$.

Se obține ușor că $g^{(n-2)}(x) = (-1)^n \frac{(n-2)!}{(2+\alpha x)^{n-1}}$ și

$h^{(n-2)}(x) = (-1)^n \frac{(n-1)!}{(2+\alpha x)^n}$.

Dar $f''(x) = \frac{1}{n!}[\alpha g(x) + 2h(x)] \Rightarrow f^{(n)}(x) = \frac{1}{n!}[\alpha g^{(n-2)}(x) + 2h^{(n-2)}x]$.

Se obține:

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{\alpha^2 x + 2(\alpha + n - 1)}{n(n-1)\,(2+\alpha x)^n}. \qquad (1)$$

Din condițiile de existență a funcției f găsim că $x \in \left(-\frac{2}{\alpha}, +\infty\right)$ dacă $\alpha > 0$, $x \in \left(-\infty, -\frac{2}{\alpha}\right)$ dacă

$$\alpha < 0$$

$$\text{și } x \in R \text{ dacă } \alpha = 0.$$

Deci formula (1) este valabilă pentru $(\forall) x \in \left(-\frac{2}{\alpha}, +\infty\right)$ dacă $\alpha > 0$, $(\forall) x \in \left(-\infty, -\frac{2}{\alpha}\right)$ dacă $\alpha < 0$.

Pentru $\alpha = 0$ avem $x \in R$, dar formula (1) nu mai este valabilă în acest caz. Pentru $\alpha = 0$ avem $f(x) = \frac{1}{n!}(\ln 2) \cdot x$. Deci

$$f'(x) = \frac{1}{n!}\ln 2 \text{ și } f^{(n)}(x) = 0, \quad (\forall) n \geqslant 2.$$

4.59. Avem:

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n x^{-n-1} e^{\frac{1}{x}}.$$

4.60. Deoarece mulțimea

$$\{1, (x-a), (x-a)^2, \ldots, (x-a)^n\}$$

constituie o bază pentru spațiul vectorial al polinoamelor de gradul n, rezultă că se poate scrie:

$$P(x) = P_0 + P_1(x-a) + \ldots + P_p(x-a)^p + \\ + \ldots + P_n(x-a)^n \qquad (1)$$

unde $P_0, P_1, \ldots, P_n$ sînt niște constante pe care le vom determina. Avem $P(a) = P_0$.
Derivînd în ambii membri ai egalității (1), rezultă

$$P'(x) = P_1 + 2(x-a)P_2 + \ldots + nP_n(x-a)^{n-1} \qquad (2)$$

Făcînd în (2) $x = a$ obținem că $P'(a) = P_1$.
Se demonstrează din aproape în aproape că:

$$P_2 = \frac{P''(a)}{2!}, \ldots, P_p = \frac{P^{(p)}(a)}{p!}, \ldots, P_n = \frac{P^{(n)}(a)}{n!}.$$

Înlocuind valorile coeficienților în formula (1) obținem egalitatea din enunț. Formula din enunț se numește formula lui Taylor pentru polinoame.

4.61. Se va demonstra prin metoda inducției matematice. Formula din enunț se numește formula lui Leibniz.

4.62. Se verifică prin calcul direct.

4.63. Demonstrația se face prin inducție completă. Pentru $m = 1$ obținem:

$$T'_n(x) = a\alpha \cos\left(\alpha x + n\frac{\pi}{2}\right) - b\alpha \sin\left(\alpha x + n\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= \alpha\left[a \sin\left(\alpha x + \frac{n+1}{2}\pi\right) + b \cos\left(\alpha x + \frac{n+1}{2}\pi\right)\right] =$$

$$= \alpha T_{n+1}(x).$$

Presupunem că $T_n^{(m)} = \alpha^m T_{m+n}(x)$ și să demonstrăm că $T_n^{(m+1)}(x) = \alpha^{m+1} T_{m+n+1}(x)$.

$$T_n^{(m+1)}(x) = [T_n^{(m)}(x)]' = [\alpha^m T_{n+m}(x)]' =$$

$$= \alpha^{m+1}\left[a\cos\left(\alpha x + \frac{m+n}{2}\pi\right) - b\sin\left(\alpha x + \frac{m+n}{2}\pi\right)\right] =$$

$$= \alpha^{m+1} T_{n+m+1}(x).$$

4.64. Se arată prin metoda inducției matematice că:

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}.$$

4.65. Se va arăta prin metoda inducției matematice.

$$a_n = 2n \text{ și } b_n = n(n-1).$$

4.66. Avem succesiv:

$$S_k(x) = 1^k \cdot x + 2^k \cdot x^2 + \ldots + n^k \cdot x^n + \ldots =$$

$$= x\,(1^k + 2^k \cdot x + \ldots + n^k \cdot n^{n-1} + \ldots) =$$

$$= x \cdot \frac{d}{dx}(1^{k-1} \cdot x + 2^{k-1} \cdot x^2 + 3^{k-1} \cdot x^3 + \ldots + n^{k-1} \cdot x^n + \ldots) =$$

$$= x\frac{d}{dx}\, x\frac{d}{dx}(1^{k-2} \cdot x + 2^{k-2} \cdot x^2 + 3^{k-2} \cdot x^3 + \ldots +$$

$$+ n^{k-2} \cdot x^n + \ldots) = \ldots = \underbrace{x\frac{d}{dx}\, x\frac{d}{dx} \ldots x\frac{d}{dx}}_{\text{de } k \text{ ori}}(1^{k-k} \cdot x +$$

$$+ 2^{k-k}x^2 + 3^{k-k}x^3 + \ldots) =$$

$$= \underbrace{x\frac{d}{dx}\, x\frac{d}{dx} \ldots x\frac{d}{dx}}_{\text{de } k \text{ ori}}(x + x^2 + x^3 + \ldots).$$ Deoarece

$x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots = \dfrac{x}{1-x}$ rezultă ușor enunțul.

4.67. Observăm că

$$f(x) = 1 + x + \ldots + x^n = \begin{cases} \dfrac{x^{n+1} - 1}{x - 1} & \text{pentru } x \neq 1 \\ n + 1 & \text{pentru } x = 1 \end{cases}$$

și deci

$$f'(x) = 1 + 2x + \ldots + nx^{n-1} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{nx^n(x-1) - (x^n - 1)}{(x-1)^2} & \text{pentru } x \neq 1 \\ \dfrac{n(n+1)}{2} & \text{pentru } x = 1, \end{cases}$$

iar

$$f''(x) = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2x + \ldots + n(n-1)x^{n-2} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{(n^2+n)x^{n-1}(x-1)^2 - 2nx^n(x-1) + 2(x^n - 1)}{(x-1)^3} & \text{pentru } x \neq 1 \\ \dfrac{n(n^2-1)}{3} & \text{pentru } x = 1. \end{cases}$$

Pe de altă parte $xf'(x) = x + 2x^2 + \ldots + nx^n$ și prin derivare găsim:

$$S_n(x) = f'(x) + xf''(x) = \sum_{k=1}^{n} k^2 x^{k-1} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{(n^2+2n)x^n(x-1)^2 - 2nx^{n+1}(x-1) + (x^n - 1)(x+1)}{(x-1)^3} & \text{pentru } x \neq 1 \\ \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} & \text{pentru } x = 1 \end{cases}$$

Pentru $x \in (0,1)$ avem $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = \dfrac{-x-1}{(x-1)^3}$.

4.68. a). Fie $x_0 \in (-1,1)$, un punct din domeniul de definiție al funcției f. Avem:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\dfrac{\arcsin x}{1-x^2} - \dfrac{\arcsin x_0}{1-x_0^2}}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{(1-x_0^2)\arcsin x - (1-x^2)\arcsin x_0}{(1-x^2)(1-x_0^2)(x-x_0)} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{\arcsin x - \arcsin x_0}{(1-x^2)(1-x_0^2)(x-x_0)} +$$

$$+ \lim_{x \to x_0} \frac{x^2\arcsin x_0 - x^2\arcsin x + x^2\arcsin x - x_0^2\arcsin x}{(1-x^2)(1-x_0^2)(x-x_0)} =$$

$$= \frac{1}{(1-x_0^2)^2} \lim_{x \to x_0} \frac{\arcsin x - \arcsin x_0}{x - x_0} -$$

$$- \frac{x_0^2}{(1-x_0^2)^2} \lim_{x \to x_0} \frac{\arcsin x - \arcsin x_0}{x - x_0} +$$

$$+ \arcsin x_0 \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{x_0 + x}{(1-x^2)(1-x_0^2)} =$$

$$= \frac{1}{1-x_0^2} \lim_{x \to x_0} \frac{\arcsin x - \arcsin x_0}{x - x_0} + \frac{2x_0}{(1-x_0^2)^2} \cdot$$

$$\cdot \arcsin x_0 = \frac{1}{1-x_0^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x_0^2}} + \frac{2x_0}{(1-x_0^2)^2} \arcsin x_0,$$

deci:

$$f'(x) = \frac{\sqrt{1-x^2} + 2x\arcsin x}{(1-x^2)^2}.$$

b). Avem:

$$g'(x) = \left(\frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\right)' = -[(\arccos x)\cdot(\arccos x)']' =$$

$$= -[(\arccos x)']^2 - (\arccos x)\cdot(\arccos x)'' =$$

$$= -\frac{1}{1-x^2} - \arccos x\cdot\left(-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) =$$

$$= \frac{x\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{1-x^2}$$

și

$$g''(x) = -\{[(\arccos x)']^2\}' - [\arccos x\cdot(\arccos x)'']' =$$

$$= -2(\arccos x)'\cdot(\arccos x)'' - (\arccos x)'\cdot(\arccos x)'' -$$

$$-\arccos x(\arccos x)''' = -3(\arccos x)'(\arccos x)'' -$$

$$-\arccos x\cdot(\arccos x)''' = -3\cdot\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot$$

$$\cdot\frac{-x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} - \arccos x\cdot\frac{-(2x^2+1)}{(1-x^2)^2\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \frac{-3x}{(1-x^2)^2} + \frac{(2x^2+1)\arccos x}{(1-x^2)^2\cdot\sqrt{1-x^2}}.$$

4.69. Avem:

$$f'_s(e) = \lim_{\substack{x\to e\\ x<e}}\frac{f(x)-f(e)}{x-e} = \lim_{x\to e}\frac{\ln^3 x - 1}{x-e} = \frac{3}{e}.$$

$f'_d(e) = a$. Deoarece f este derivabilă în $x = e$ rezultă $f'_s(e) = f'_d(e)$. Punem condiția ca f să fie continuă în $x = e$ și obținem $ae + b = 1$.

Rezolvînd sistemul:

$$\begin{cases} ae + b = 1 \\ a = \dfrac{3}{e} \end{cases} \quad \text{obținem: } a = \frac{3}{e};\ b = -2.$$

4.70. 1°. Pe fiecare interval deschis, funcția f este continuă. Să cercetăm continuitatea la capetele acestor intervale.

$$f_d(0) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x \sin \frac{1}{x} = 0 \text{ și } f(0) = 0.$$

Deci f este continuă în 0.

Avem:

$$f_s\left(\frac{1}{\pi}\right) = f_d\left(\frac{1}{\pi}\right) = f\left(\frac{1}{\pi}\right) = 0 \text{ deci } f \text{ este continuă în } \frac{1}{\pi}.$$

La fel se arată că funcția f este continuă și în punctele $1 - \frac{1}{\pi}$, 1. Deci funcția f este continuă pe $[0,1]$.

2°. $f'_d(0) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \sin \frac{1}{x}$ și deoarece limita din membrul doi nu există, rezultă că f nu e derivabilă în 0.

$$f'_s\left(\frac{1}{\pi}\right) = \pi \text{ și } f'_d\left(\frac{1}{\pi}\right) = 0 \text{ deci } f \text{ nu e derivabilă în } \frac{1}{\pi}.$$

În mod analog se arată că f nu este derivabilă nici în punctele $1 - \frac{1}{\pi}$, 1. Deci mulțimea punctelor în care f este derivabilă este

$$[0, 1] - \left\{0, \frac{1}{\pi}, 1 - \frac{1}{\pi}, 1\right\}.$$

4.71. Presupunem că $a \neq b$ și, fără a restrînge generalitatea problemei, putem presupune că $a < b$. În acest caz, funcția f se mai poate scrie:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + (a - 1)x + b & \text{dacă } x < a \\ b - a & \text{dacă } x = a \\ x^2 - (a + 1)x + b & \text{dacă } x \in (a, b) \\ b(b - a) & \text{dacă } x = b \\ x^2 - (a - 1)x - b & \text{dacă } x > b. \end{cases}$$

f este derivabilă pentru $x \in (-\infty, a) \cup (a, b) \cup (b, +\infty)$, fiind exprimată pe această mulțime prin funcții elementare.

Să cercetăm derivabilitatea lui f în punctele $x = a$ și $x = b$,

$$f'_s(a) = \lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} \frac{-x^2 + (a-1)x + b - b + a}{x - a} = -a - 1,$$

$$f'_d(a) = \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} \frac{x^2 - (a+1)x + b - b + a}{x - a} = a - 1.$$

Însă $f'_s(a) = f'_d(a) \Rightarrow -a - 1 = a - 1 \Rightarrow a = 0$. Deci pentru $a = 0$, f este derivabilă în $x = a = 0$.

$$f'_s(b) = 2b - a - 1 \text{ și } f'_d(b) = 2b - a + 1.$$

Deoarece

$$(\forall)\ b \in R;\ f'_s(b) \neq f'_d(b)$$

rezultă că în $x = b$, funcția f nu este derivabilă.

Dacă $a = b$ atunci $f(x) = (x+1)\,|x - a|$, deci

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + (a-1)x + a & \text{pentru } x < a \\ 0 & \text{pentru } x = a \\ x^2 - (a-1)x - a & \text{pentru } x > a \end{cases}$$

$$f'_s(a) = -a - 1,\ f'_d(a) = a + 1,\ f'_s(a) = f'_d(a) \Rightarrow a = -1.$$

În concluzie, $f : R \to R$ dată de legea $f(x) = (x+1)\,|x+1|$ este derivabilă pe R.

4.72. a). Pentru ca submulțimea $\Gamma \subset R \times R$ să fie graficul unei funcții $g : R \to R$, trebuie, conform definiției funcției, ca pentru orice $t \in R$ să existe un element $u \in R$ (acest u va fi chiar $g(t)$) astfel încît $(t, u) \in \Gamma$. În cazul nostru

$$\Gamma = u(\Gamma_f) = \{u(x, f(x)) \mid x \in R\} = \\ = \{(2x + 1,\ 3x + 4f(x) + 5) \mid x \in R\}.$$

Dacă $t \in R$, pentru ca (t,u) să aparțină lui $u(\Gamma_f)$ va trebui să existe un x, astfel încît $t = 2x + 1$ și $u = 3x + 4f(x) + 5$. Așadar, pentru un număr real t dat, luînd

$$u = 3\frac{t-1}{2} + 4f\left(\frac{t-1}{2}\right) + 5 = \frac{3t+7}{2} + 4f\left(\frac{t-1}{2}\right)$$

vom avea $\left(t, \frac{3t+7}{2} + 4f\left(\frac{t-1}{2}\right)\right) \in u(\Gamma_f)$, căci

$$\left(t, \frac{3t+7}{2} + 4f\left(\frac{t-1}{2}\right)\right) = u\left(\frac{t-1}{2}, f\left(\frac{t-1}{2}\right)\right).$$

Elementul u căutat, și care depinde de t este

$$u = g(t) = \frac{3t+7}{2} + 4f\left(\frac{t-1}{2}\right).$$

În acest fel, u este unic și funcția $g: R \to R$ este găsită.

b). Funcția g este suma funcției $g_1(t) = \frac{3t+7}{2}$ cu funcția compusă $4f \circ h$ unde $h(t) = \frac{t-1}{2}$. Așadar, dacă f este derivabilă, g este derivabilă, conform unor proprietăți cunoscute ale funcțiilor derivabile. Analog, pentru că

$$f(x) = \frac{g(2x+1) - 3x - 5}{4},$$

dacă g este derivabilă, atunci f este derivabilă.

c). Relația dintre derivatele f' și g' se obține derivînd relațiile de mai sus și ținînd seama de regula de derivare a funcțiilor compuse

$$f' = \frac{1}{4}(2g' - 3) \text{ sau } f' = \frac{1}{2}g' - \frac{3}{4}.$$

d). Dacă $f(x) = \sin x$, avem $g(x) = \frac{3x+7}{2} + 4\sin\frac{x-1}{2}$,

$g'(x) = \frac{3}{2} + 2\cos\frac{x-1}{2}$, de unde $g'(1) = \frac{3}{2} + 2 = \frac{7}{2}$.

4.73. Funcția u, ținînd seama de condițiile 1,2,3, are legea:

$$u(x) = \begin{cases} 2\sin x + 2 & \text{dacă} \quad x \in \left(0, \ \arcsin\frac{1}{4}\right] \\ \frac{2}{3}\sin x + \frac{7}{3} & \text{dacă} \quad x \in \left(\arcsin\frac{1}{4}, \ 1\right]. \end{cases}$$

a). Studiul continuității funcției u(x) se impune doar în punctul $x_0 = \arcsin\frac{1}{4}$, în rest ea fiind continuă.

Avem:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} u(x) = \lim_{x \to x_0} (2\sin x + 2) = 2 + \frac{1}{2} = u\left(\arcsin\frac{1}{4}\right) \text{ și}$$

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} u(x) = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{2}{3}\sin x\right) + \frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{2}.$$

Rezultă că u este continuă în punctul $x = \arcsin\frac{1}{4}$. Cu aceasta putem afirma că u este continuă pe (0,1).

b). Funcția u este derivabilă pe mulțimea $(0,1) - \left\{\arcsin\frac{1}{4}\right\}$. În punctul $x_0 = \arcsin\frac{1}{4}$ funcția u nu este derivabilă, deoarece:

$$u'_s\left(\arcsin\frac{1}{4}\right) = 2\cos\left(\arcsin\frac{1}{4}\right) = \frac{\sqrt{15}}{2}.$$

$$u'_d\left(\arcsin\frac{1}{4}\right) = \frac{2}{3}\cos\left(\arcsin\frac{1}{4}\right) = \frac{\sqrt{15}}{6}.$$

4.74. Funcția f este derivabilă în punctul $x = 0$ și $f'(0) = 0$, dacă pentru orice șir $x_n \to 0$, ($x_n \in [-1, 1]$, $x_n \neq 0$), avem:

$$f'(0) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(0)}{x_n - 0} = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{x_n} = 0, \qquad (f(0) = 0).$$

Însă, datorită particularității funcției, în cadrul limitei de mai sus expresia lui $f(x_n)$ depinde de forma termenilor șirului $x_n \to 0$. Astfel:

$$f(x_n) = \begin{cases} 0 \text{ dacă șirul } x_n \to 0 \text{ are proprietatea că } x_n \neq \dfrac{1}{n}; \\ (\forall)\ n \in N, \\ \dfrac{1}{2^n} \text{ pentru șirul } \left\{x_n = \dfrac{1}{n}\right\}_{n\in N} \cdot \end{cases}$$

În primul caz vom avea $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(x_n)}{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{0}{x_n} = 0$, iar în cel de-al doilea:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0.$$

Dacă șirul $\{x_n\}_{n\in N}$, $x_n \to 0$ are în componența sa un număr finit de termeni de forma $\dfrac{1}{n}$ (sau un număr finit de termeni care nu au această formă), atunci va exista un rang $n_0 \in N$, astfel încît pentru $n > n_0$ șirul x_n să se încadreze în primul caz (respectiv al doilea) tratat mai sus și deci $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(x_n)}{x_n} = 0$.

Dacă ambele forme de termeni sînt în număr infinit, șirul se poate separa în două subșiruri pentru care limita respectivului raport este tot 0. Din cele de mai sus rezultă că funcția este derivabilă în punctul $x = 0$ și că $f'(0) = 0$.

4.75. a). Pentru ca funcția $f(x)$ să fie continuă într-un punct $\alpha \in R$, trebuie ca pentru orice șir $\alpha_n \to \alpha$ să avem:

$$\lim_{n\to\infty} f(\alpha_n) = f(\alpha).$$

Considerăm următoarele șiruri convergente către α:

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \to \alpha; \quad x_i \in Q$$
$$y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots \to \alpha; \quad y_i \in C_R Q, \qquad (i \in N).$$

Va trebui ca $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(y_n) = f(\alpha)$ 0, deci: $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} (x_n^3 - x_n^2) = \alpha^3 - \alpha^2 = 0$. Ultima relație este satisfăcută doar pentru $\alpha = 0$ și $\alpha = 1$. Problema continuității funcției se pune doar în punctele $\alpha = 0$ și $\alpha = 1$. În aceste puncte, pentru orice șir $x_n \to \alpha$, $x_n \in Q$, $(\forall) n \in N$ și pentru orice șir $y_n \to \alpha$, $y_n \in C_R Q$, $(\forall) n \in N$, avem:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(y_n) = f(\alpha) = 0.$$

Dacă șirul $\alpha_n \to \alpha$, $\alpha \in \{0, 1\}$ are un număr finit de termeni raționali (iraționali), atunci de la un anumit rang n_0 toți termenii șirului vor fi iraționali (raționali) și ne vom încadra în unul din cazurile de mai sus. Deci $\lim_{n\to\infty} f(\alpha_n) = 0$.

Dacă $\alpha_n \to \alpha$ are atît termeni raționali cît și termeni iraționali în număr infinit, șirul α_n se poate despărți în două subșiruri distincte, convergente către α și formate numai din termeni raționali respectiv iraționali, șirul valorilor funcției va fi convergent către $f(\alpha) = 0$ (căci $\alpha = 0$ sau $\alpha = 1$).

Prin urmare:

$$f(x) \text{ este} \begin{cases} \text{continuă în punctele } x = 0 \text{ și } x = 1 \\ \text{discontinuă în mulțimea } R - \{0, 1\}. \end{cases}$$

b). În punctele în care e derivabilă, o funcție este și continuă. Negînd această implicație va rezulta că o funcție discontinuă într-un punct este nederivabilă în

acel punct. Derivabilitatea funcției din enunț se impune a fi studiată doar în punctele 0 și 1.

Fie $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \to 0 \quad ; x_i \in Q,$

$y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots \to 0 \quad ; y_i \in C_R Q,$

$x'_1, x'_2, \ldots, x'_n, \ldots \to 1 \quad ; x'_i \in Q,$

$y'_1, y'_2, \ldots, y'_n, \ldots \to 1 \quad ; y'_i \in C_R Q, \qquad (i \in N),$

Vom avea:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x'_n) - f(1)}{x'_n - 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{(x'_n)^3 - (x'_n)^2}{x'_n - 1} = \lim_{n\to\infty} (x'_n)^2 = 1 \text{ și}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(y'_n) - f(1)}{y'_n - 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{0 - 0}{y'_n - 1} = 0.$$

Deoarece pentru două șiruri diferite (ambele convergente către 1) limita raportului $\frac{f(\alpha_n) - f(1)}{\alpha_n - 1}$ depinde de alegerea șirului α_n, nu există $f'(1)$.

În schimb:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(0)}{x_n - 0} = \lim_{n\to\infty} \frac{(x_n)^3 - (x_n)^2}{x_n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} [(x_n)^2 - x_n] = 0$$

și $$\lim_{n\to\infty} \frac{f(y_n) - f(0)}{y_n - 0} = \lim_{n\to\infty} \frac{0 - 0}{y_n} = 0.$$

Considerații analoage cu cele de la punctul precedent ne vor conduce la concluzia că pentru orice șir

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots \to 0,$$

avem $\lim_{n\to\infty} \frac{f(\alpha_n) - f(0)}{\alpha_n - 0} = 0$, deci f este derivabilă în $x = 0$ și $f'(0) = 0$.

Funcția nu este derivabilă în mulțimea $R - \{0\}$.

4.76. Pentru $x \neq 0$ funcţia g este infinit derivabilă şi

$$g'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}; \quad g''(x) = \left(\frac{-6}{x^4} + \frac{2^2}{x^6}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

În continuare procedăm prin inducţie matematică completă. Fie

$$g[(x)]^{(n)} = \left(\frac{A_1}{x^{n+2}} + \frac{A_2}{x^{n+4}} + \dots + \frac{A_n}{x^{n+2n}}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}, \quad \text{cu}$$

$$A_i \in R, \quad (\forall) i \in \{1, \dots, n\}.$$

Atunci

$$[g(x)]^{(n+1)} = \left(\frac{B_1}{x^{n+3}} + \frac{B_2}{x^{n+5}} + \dots + \frac{B_n}{x^{3n+1}}\right) e^{-\frac{1}{x^2}} +$$

$$+ \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} \left(\frac{A_1}{x^{n+2}} + \frac{A_2}{x^{n+4}} + \dots + \frac{A_n}{x^{3n}}\right) =$$

$$= \left(\frac{C_1}{x^{n+3}} + \frac{C_2}{x^{n+5}} + \dots + \frac{C_{n+1}}{x^{3n+3}}\right) e^{-\frac{1}{x^2}} \quad \text{cu}$$

$$C_i \in R, \quad (\forall) i \in \{1, \dots, n+1\}.$$

Deci

$$[g(x)]^{(n)} = \left(\frac{A_1}{x^{n+2}} + \frac{A_2}{x^{n+4}} + \dots + \frac{A_n}{x^{3n}}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

Derivata de ordinul n în punctul $x = 0$ este

$$g^{(n)}(0) = \lim_{x \to 0} \frac{g^{(n-1)}(x) - g^{(n-1)}(0)}{x - 0}.$$

Pentru $n = 1$ avem:

$$g'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = 0.$$

Presupunem prin inducție că $g^{n}(0) = 0$. Atunci

$$g^{(n+1)}(0) = \lim_{x\to 0} \frac{g^{(n)}(x) - g^{(n)}(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{g^{(n)}(x)}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{A_1}{x^{n+2}} + \ldots + \frac{A_n}{x^{3n}}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{A_1 e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{n+3}} + \ldots +$$

$$+ \lim_{x\to 0} \frac{A_n e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{3n+1}} = 0.$$

S-a ținut seama că $(\forall) m \in N$, avem $\lim_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^m} = 0$.

Rezultă deci că $g^{(n)}(0) = 0$, $(\forall) n \in N$.

Capitolul V

STUDIUL FUNCȚIILOR CU AJUTORUL DERIVATELOR. TEOREMELE LUI FERMAT, ROLLE, LAGRANGE, CAUCHY. REGULA LUI L'HOSPITAL. DIFERENȚIALA

Fie funcția $f: I \to R$ și $x_0 \in I$ unde I este un interval.

Definiție. Spunem că x_0 este un *punct de maxim relativ* (local) al funcției f, dacă există o vecinătate V a lui x_0, astfel încît să avem:

$$f(x) \leqslant f(x_0) \quad \text{pentru orice } x \in V \cap I.$$

Definiție. Spunem că x_0 este punct de *minim relativ* (local) al funcției f, dacă există o vecinătate V a lui x_0, astfel încît să avem

$$f(x_0) \leqslant f(x) \quad \text{pentru orice } x \in V \cap I.$$

Punctele de maxim și minim relativ ale funcției f se numesc puncte de extrem relativ (local) ale lui f.

Dacă x_0 este punct de maxim (relativ) al funcției f, atunci punctul $(x_0, f(x_0))$ de pe grafic se numește punct de maxim (relativ) al graficului.

Dacă x_0 este punct de minim (relativ) al funcției f, atunci punctul $(x, f(x_0))$ de pe grafic se numește punct de minim (relativ) al graficului. În continuare vom renunța la cuvîntul „relativ".

Teorema lui Fermat. Dacă funcția f are derivată într-un punct de extrem x_0 din interiorul intervalului I, atunci derivata sa este nulă în acest punct, adică $f'(x_0) = 0$.

Reciproca teoremei lui Fermat nu este adevărată.

Teorema lui Fermat dă condiții suficiente (dar nu necesare) pentru ca derivata într-un punct să fie nulă.

Teorema lui Rolle. Fie f o funcţie definită pe un interval I şi $a < b$ două puncte din I. Dacă:

1) funcţia f este continuă pe intervalul închis $[a,b]$;

2) funcţia f este derivabilă pe intervalul deschis (a, b);

3) $f(a) = f(b)$,

atunci există cel puţin un punct $c \in (a, b)$, în care derivata se anulează, adică $f'(c) = 0$.

Observaţie. Teorema lui Rolle rămîne adevărată dacă se presupune că pe intervalul deschis (a,b) funcţia f are derivată finită sau infinită.

Consecinţe ale teoremei lui Rolle

1°. Între două rădăcini ale funcţiei se află cel puţin o rădăcină a derivatei.

2°. Între două rădăcini consecutive ale derivatei se află cel mult o rădăcină a funcţiei.

Teorema lui Lagrange. (Prima teoremă a creşterilor finite.) Fie f o funcţie definită pe un interval I şi $a < b$ două puncte din I. Dacă:

1) funcţia f este continuă pe intervalul închis $[a,b]$;

2) funcţia f este derivabilă pe intervalul deschis (a,b), atunci există cel puţin un punct $c \in (a,b)$ astfel încît să avem

$$f(b) - f(a) = (b - a)\,f'(c).$$

Corolar. Dacă funcţia f este derivabilă pe intervalul I, atunci pentru orice a şi x din I există un punct ξ astfel ca

$$f(a) - f(x) = (a - x)f'(\xi).$$

Consecinţe ale teoremei lui Lagrange

1°. Dacă f are derivata nulă pe un interval I, atunci funcţia f este constantă pe acest interval.

2°. Dacă f şi g sînt două funcţii derivabile pe un interval I, şi dacă derivatele lor sînt egale pe intervalul I, atunci diferenţa lor este constantă pe acest interval.

3°. Fie f o funcţie derivabilă pe un interval I. Dacă f' este strict pozitivă pe I, atunci f este strict crescătoare pe I. Dacă f' este strict negativă pe I, atunci f este strict descrescătoare pe I.

4°. Dacă f este derivabilă pe $I - \{x_0\}$ și dacă derivata sa f' are limită (finită sau infinită) în punctul x_0, atunci $f'(x_0)$ există și

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} f'(x).$$

Teorema lui Cauchy. Fie f și g două funcții definite pe un interval I și $a < b$ două puncte din I. Dacă:

1°). f și g sînt continue pe intervalul închis $[a,b]$,
2°). f și g sînt derivabile pe intervalul deschis (a,b),
3°). $g'(x) \neq 0$ pentru orice $x \in (a,b)$,

atunci $g(a) \neq g(b)$ și există un punct $c \in (a,b)$, astfel încît să avem

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Regula lui l'Hospital

Teorema 1. (Regula lui l'Hospital pentru cazul $\left.\frac{0}{0}\right)$.

Fie x_0 un punct de acumulare (finit sau infinit) al unui interval I, f și g două funcții definite pe I, cu excepția, eventual, a lui x_0. Dacă:

1°). $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ și $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$;

2°). f și g sînt derivabile pe I, cu excepția eventual a lui x_0;

3°). $g'(x) \neq 0$ pentru orice $x \neq x_0$ din I.

4°). există $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$ (finită sau infinită).

Atunci:

a). $g(x) \neq 0$ pentru orice $x \neq x_0$ din I.

b). funcția $\dfrac{f}{g}$ are limită în x_0 și

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Observație. Reciproca regulei lui *l'Hospital* nu este adevărată.

Teorema 2. (Cauchy) Fie f și g două funcții definite pe un interval I și un punct $x_0 \in I$. Dacă:
1°). $f(x_0) = 0$ și $g(x_0) = 0$.
2°). f și g sînt derivabile în punctul x_0 și $g'(x_0) \neq 0$
atunci
a). există o vecinătate V a lui x_0, astfel ca $g(x) \neq 0$ pentru $x \neq x_0$ din V și
b). $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$.
Există situații în care regula lui l'Hospital să nu se poată aplica și teorema lui Cauchy să se poată aplica.

Teorema 3. $\left(\text{Regula lui l'Hospital pentru cazul } \dfrac{\infty}{\infty}\right)$.

Fie x_0 un punct de acumulare (finit sau infinit) al unui interval I, f și g două funcții definite pe I, cu excepția, eventual, a lui x_0.
Dacă
1°). $\lim\limits_{x \to x_0} |g(x)| = +\infty$.
2°). f și g sînt derivabile pe I, cu excepția, eventual, a lui x_0;
3°). $g'(x) \neq 0$ pentru orice $x \neq x_0$ din I;
4°). există $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$ (finită sau infinită).
Atunci: funcția $\dfrac{f}{g}$ are limită în x_0 și

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Regula lui l'Hospital se poate aplica de mai multe ori, fie pentru cazul $\dfrac{0}{0}$, fie pentru cazul $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Corolarul 1. Fie x_0 un punct de acumulare (finit sau infinit) al unui interval I, f și g două funcții definite pe I, cu excepția eventual a lui x_0. Dacă
1°). funcțiile f și g sînt derivabile de n ori pe I, cu excepția, eventual, a lui x_0;
2°). $g^{(n)}(x) \neq 0$ pentru orice $x \neq x_0$ din I;

3°). $\lim_{x\to x_0} f^{(i)}(x) = 0$ și $\lim_{x\to x_0} g^{(i)}(x)$ sau $\lim_{x\to x_0} |g^{(i)}(x)| = +\infty$, $i = 0,1,2,\dots (n-1)$;

4°). există $\lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)} = A$ (finită sau infinită).

Atunci:

a). $g(x) \neq 0$; $g'(x) \neq 0, \dots, g^{(n-1)}(x) \neq 0$ pentru orice $x \neq x_0$ din I;

b). $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \dots = \lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x)}{g^{(n-1)}(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$.

Corolarul 2. Dacă

1°). funcțiile f și g sînt derivabile de n ori în punctul $x_0 \in I$;

2°). $f(x_0) = f'(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$.

$$g(x_0) = g'(x_0) = \dots = g^{(n-1)}(x_0) \text{ și } g^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Atunci

a). există o vecinătate V a lui x_0 astfel ca pentru orice $x \neq x_0$ din V să avem $g(x) \neq 0$

$$g'(x) \neq 0, \dots, g^{(n-1)}(x) \neq 0;$$

b). $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \dots = \lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x)}{g^{(n-1)}(x)} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{g^{(n)}(x_0)}$.

Celelalte operații fără sens $0\cdot\infty$; $\infty - \infty$; 0^0; 1^∞; ∞^0,

se pot reduce la una din operațiile fără sens $\frac{0}{0}$ sau $\frac{\infty}{\infty}$ la care am studiat cum se aplică regula lui l'Hospital.

De exemplu:

Cazul $0\cdot\infty$. Fie f și g două funcții definite și derivabile pe I sau $I - \{x_0\}$, x_0 un punct de acumulare pentru I. Dacă

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 \quad \text{și} \quad \lim_{x\to x_0} |g(x)| = +\infty$$

atunci pentru $f(x) \cdot g(x)$ cînd $x \to x_0$ sîntem în cazul operației fără sens $0 \cdot \infty$.

Vom scrie

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{g_1(x)}$$

unde $g_1(x) = \frac{1}{g(x)}$ și deci $\lim_{x \to x_0} g_1(x) = 0$.

Mai trebuie să punem condiția ca

$$g_1'(x) = -\frac{g'(x)}{g^2(x)} \neq 0 \text{ pentru } x \in I - \{x_0\} \text{ și}$$

sîntem în condițiile de aplicabilitate ale regulei lui l'Hospital în cazul $\frac{0}{0}$.

Cazul 0^0. Fie f și g două funcții definite și derivabile pe I sau $I - \{x_0\}$, x_0 fiind un punct de acumulare al lui I. Dacă

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0, \ \lim_{x \to x_0} g(x) = 0, \ f(x) > 0, \ \forall x \in I - \{x_0\}$$

atunci pentru funcția $[f(x)]^{g(x)}$ cînd $x \to x_0$ sîntem în cazul 0^0.

Vom scrie $[f(x)]^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}$

și ținînd seama de această egalitate am redus cazul 0^0 la cazul $0 \cdot \infty$. Celelalte cazuri rămîn în studiul cititorului.

Diferențiala

Fie f o funcție definită pe un interval I și $x_0 \in I$.

Definiție. Se spune că funcția f este diferențiabilă în punctul $x_0 \in I$, dacă există un număr $A \in R$, și o funcție α definită pe I, continuă în x_0 și nulă în x_0, astfel încît, pentru orice $x \in I$, să avem:

$$f(x) - f(x_0) = A(x - x_0) + \alpha(x)(x - x_0).$$

Propoziție. Funcția f este diferențiabilă în $x_0 \in I$ dacă și numai dacă este derivabilă în x_0.

Din egalitatea care definește diferențiabilitatea rezultă:

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)\ (x - x_0) + \alpha(x)\ (x - x_0).$$

Pentru valori ale lui x suficient de apropiate de x_0 avem

$$f'(x_0) + \alpha(x) \approx f'(x_0)$$

deci

$$f(x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\,(x - x_0) \text{ pentru } x \approx x_0,\ x \in I.$$

Dacă notăm $x - x_0 = h$ avem

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \approx f'(x_0)h.$$

Definiție. Funcția liniară $f'(x_0) \cdot h$ definită pentru orice $h \in R$ se numește diferențiala funcției f în punctul x_0 și se notează $\mathrm{d}f(x_0, h)$ deci

$$\mathrm{d}f(x_0,h) = f'(x_0)h, \text{ echivalent cu } \mathrm{d}f(x) = f'(x)\mathrm{d}x.$$

Pentru h se mai folosește notația $\mathrm{d}x$.
Deci avem egalitatea:

$$\mathrm{d}f(x) = f'(x)\mathrm{d}x.$$

PROBLEME

5.1. Să se afle minimul funcției

$$f(x) = (x^2 + 1)\sqrt{x} - 12\,\mathrm{arctg}\sqrt{x}.$$

5.2. Să se găsească valorile extreme ale funcției

$$f(x) = \sin^6 x + \cos^6 x + \sin^4 x + \cos^4 x.$$

(*I. Popescu*, G.M.B., 13962, 1974)

5.3. Să se afle maximul relativ al funcției

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{(x - 1)^2}$$

unde $x \in R - \{1\}$.

5.4. Să se calculeze extremele relative ale funcției

$$f(x) = \frac{x(x - 3)}{x^2 - 2x + 2}$$

unde $x \in R$.

5.5. Într-o sferă de rază R să se înscrie un cilindru de volum maxim.

5.6. Să se arate că funcția $f(x) = 9 \sin x + \sin 3x$ admite pentru $x = \frac{\pi}{2}$ un maxim, iar funcția $g(x) = 3\sin x - \sin 3x$ pentru $x = \pi$ nu admite extrem și este descrescătoare în acest punct.

5.7. Să se arate că

$$(\sin x)^{2^n} + (\cos x)^{2^n} \geqslant 2^{1-2^{n-1}}.$$

(Matematica v škole, 1968)

5.8. Să se determine maximele și minimele funcției $f : E \subset [0, 2\pi] \to R$ dată de legea

$$f(x) = \text{tg}a \cdot \text{tg}\, x + \text{ctg}\, a \cdot \text{ctg}\, x$$

știind că a este un unghi ascuțit.

5.9. O piramidă are ca bază un triunghi echilateral de latură x variabilă și muchie dată k. În ce caz volumul piramidei este maxim?

5.10. Pentru fabricarea unei cutii de bomboane se folosesc trei bucăți de tablă: o bucată dreptunghiulară pentru corpul lateral și două bucățele în formă de disc circular pentru fund și capac. Diametrul discului din care se confecționează fundul este cu 20 mm mai mare decît diametrul cutiei; diametrul discului din care se confecționează capacul este cu 80 mm mai mare decît diametrul cutiei. Lungimea bucății dreptunghiulare este cu 2 mm mai mare decît lungimea cercului de bază al cutiei gata confecționate, iar înălțimea bucății dreptunghiulare este cu 8 mm mai mare decît cea a cutiei. Să se determine dimensiunile bucăților din care se confecționează o cutie cu volumul de 1 dm³, astfel încît consumul de material să fie minim.

(*A. Halanay*, G.M.F.B., 3882, 1959)

5.11. Demonstrați că dacă M și m sînt maximul respectiv minimul funcției $y = ax^3 + px + q$, $(a \neq 0)$, atunci $Mm = q^2 + \frac{4}{27} \cdot \frac{p^3}{a}$.

(Matematika v škole, 1964)

5.12. Să se determine valoarea minimă a funcției

$$f(x) = n\ \text{tg}^m x + m\text{ctg}^n x$$

știind că $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ iar $m, n \in N$.

(*N. Bebea*, G.M.B., 10558)

5.13. Se dă funcția

$$f(x) = \frac{3x^2 + 4x}{2x - 1}$$

unde $x \in R - \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

1°. Să se calculeze diferențiala lui $f(x)$.

2°. Să se calculeze $f(1{,}001)$ cu aproximație mai mică decît 0,0001.

5.14. Se consideră funcția $f: R \to R$ dată de legea

$$f(x) = \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{7 - x}.$$

1°. Să se determine intervalele de monotonie ale funcției f.

2°. Utilizînd monotonia funcției pe aceste intervale să se arate care dintre numerele $A = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{5}$ și $B = \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{4}$ este mai mare.

(*L. Pîrșan*, Concurs elevi, 1974)

5.15. Să se arate că pentru orice x cu proprietatea $0 < x < \alpha < \frac{\pi}{2}$ are loc inegalitatea:

$$\frac{\cos x}{\cos \alpha} > \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} \alpha}$$

unde α este o constantă.

5.16. Să se afle maximul funcției $f: (0, +\infty) \to R$ dată de legea $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, apoi să se deducă inegalitatea:

$$e^x \geqslant x^e \text{ pentru orice } x \in (0, +\infty).$$

5.17. Să se arate că

$$x \cos x < \sin x$$

pentru $x \in \left(0, \frac{5\pi}{4}\right)$.

5.18. Să se arate că dacă $x \in (0, 1)$ atunci

$$e^{\frac{x}{x+1}} < 1 + x < e^{x}.$$

5.19. Să se arate că pentru $0 < x < \frac{\pi}{2}$ avem:

$$\sin x > x \sqrt[3]{\cos x}.$$

(Matematika v şkole, 1967)

5.20. Să se arate că dacă $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ admite trei puncte de extrem distincte, atunci $3b^2 - 8ac \neq 0$.

5.21. Să se separe cu ajutorul şirului lui Rolle rădăcinile reale ale ecuaţiei

$$3x^4 - 4\alpha x^3 - 6x^2 + 12\alpha x + 7\alpha^2 - 36 = 0$$

unde $\alpha \in R$.

(*N. Negoescu*, G.M.B., 9329)

5.22. Se dă funcţia

$$f(x) = \frac{x^2 + |x^2 + x - 2|}{x + |x + 1|}.$$

a). Să se stabilească domeniul de definiţie al funcţiei.

b). Să se verifice valabilitatea condiţiilor de aplicare a teoremei creşterilor finite pe intervalul $[1, 2]$ şi să se aplice efectiv această teoremă, dacă este cazul.

5.23. Fie funcţia

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + mx + n & \text{pentru} \quad x \in [-1, 0] \\ px^2 + 4x + 4 & \text{pentru} \quad x \in [0, 1] \end{cases}$$

definită pe intervalul $[-1, 1]$; $m, n, p, \in R$.

Să se determine parametrii m, n, p astfel încît funcţiei date să i se poată aplica teorema lui Rolle pe intervalul $[-1, 1]$.

5.24. Să se aplice teorema creşterilor finite funcţiei $y = \sqrt{2px}$ între a şi b, unde $0 < a < b$.

Caz particular $a = 0$, $b = 1$.

5.25. Să se aplice teorema creșterilor finite funcției $f(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2$ și să se arate că dacă $x \geqslant e$ atunci

$$\frac{\ln (x+1)}{x+1} < f(x+1) - f(x) < \frac{\ln x}{x}.$$

5.26. 1°. Să se aplice teorema creșterilor finite funcției $f(x) = \frac{x}{1-x}$ între 0 și h unde $0 < h < 1$.

2°. Să se exprime θ în funcție de h și să se determine limita lui θ cînd h tinde către zero, θ fiind cuprins între zero și unu astfel ca $f(h) - f(0) = hf'(\theta h)$.

(*C. Ionescu-Țiu*, G.M.B., 10567)

5.27. a). Să se arate că pentru orice k întreg mai mare ca 2, aplicînd teorema creșterilor finite funcției $f(x) = \ln (\ln x)$ între k și $k+1$, obținem:

$$0 < \ln [\ln (k+1)] - \ln (\ln k) < \frac{1}{k \ln k}.$$

b). Să se calculeze limita

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2 \ln 2} + \frac{1}{3 \ln 3} + \ldots + \frac{1}{n \ln n}\right).$$

(Bacalaureat, Reims, 1971)

5.28. Să se arate că dacă

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{i+1} = 0, \quad (a_i \in R, \ i = 0,1,\ldots, n)$$

atunci ecuația $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ admite cel puțin o rădăcină reală.

(*Gh. Balaban*, G.M.B., 13255, 1973)

5.29. 1°. Fie $0 < a < b$ și $f(x) = \ln x$; conform teoremei lui Lagrange există cel puțin un punct $\theta \in (a, b)$ astfel încît:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b-a} = f'(\theta).$$

Să se arate că

$$\theta \in \left(\sqrt{ab},\ \frac{a+b}{2}\right).$$

2°. Să se demonstreze inegalitățile

$$e^{\frac{1}{3n+1}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < e^{\frac{1}{2n+1}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

(*Al. Lupaş*, G.M.B., 12739, 1973)

5.30. Se consideră funcțiile $f_1 : R \to R,\ f_2 : R \to R$ date de legile

$$f_1(x) = (a+x)(b+x)^2 + (b+x)(c+x)^2 + (c+x)(a+x)^2$$

$$f_2(x) = (a+x)^2(b+x) + (b+x)^2(c+x) + (c+x)^2(a+x)$$

unde $a, b, c \in R$.

Să se arate că $f_1(x) - f_2(x)$ nu depinde de x.

5.31. Să se arate că funcțiile $f, g : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to R$ definite prin relațiile

$$f(x) = \text{arc sin}\,(\text{tg}\,x);\quad g(x) = \text{arc tg}\,\frac{\sin x}{\sqrt{\cos 2x}}$$

diferă printr-o constantă.

(*M. Neacşu*, G.M.B., 10628)

5.32. Se dau funcțiile

$$f_1 : R \to R,\ f_1(x) = \arccos\frac{2ax}{a^2+x^2};$$

$$f_2 : R \to R,\ f_2(x) = \text{arc sin}\,\frac{a^2-x^2}{a^2+x^2};$$

$$f_3 : R \to R,\ f_2(x) = 2\text{arc ctg}\,\frac{a}{x};$$

$$f_4 : R \to R,\ f_4(x) = -2\,\text{arc tg}\,\frac{x}{a};$$

unde a este un parametru real strict pozitiv.

a). Să se afle derivatele lor, precizînd și domeniile de derivabilitate.

b). Să se stabilească intervalele pe care se definește o relație de forma: $f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + f_4(x) = k$, ($k$ constantă reală) stabilind și valorile constantelor.

(*D. Ogrezeanu*, Concurs elevi, 1969)

5.33. Să se calculeze

$$\lim_{x \to 1} \frac{\operatorname{arc\,tg} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}}{x - 1}.$$

5.34. Dacă $f : R \to R$ este o funcție derivabilă, iar $\lim_{x \to \infty} f(x) = a$ (finit) și există $\lim_{x \to \infty} xf'(x)$, atunci

$$\lim_{x \to \infty} xf'(x) = 0.$$

(*Al. Dimca*, G.M.B., 12209, 1972)

5.35. Să se calculeze

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\ln (1 + \alpha) - \alpha}{\alpha^2}.$$

5.36. Să se calculeze

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} [\ln x \cdot \ln (\ln x)].$$

5.37. Să se calculeze

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x} \text{ și } \lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x} - \sin^2 x - 2}{x^4 \cdot (x - 1)}.$$

5.38. Să se calculeze

$$\lim_{x \to \infty} \left[(x + 1)^{1 + \frac{1}{x+1}} - x^{1 + \frac{1}{x}} \right].$$

5.39. Să se calculeze

$$\lim_{x \to 0} \frac{x \cdot \sin (\sin x) - \sin^2 x}{x^6}.$$

5.40. Să se calculeze

$$L = \lim_{x \to 1} \frac{x^x - x}{1 - x + \ln x}.$$

5.41. Să se calculeze

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{e^x \sin x - x}{\sin(\sin x)}.$$

5.42. Să se calculeze

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{x - \frac{2}{3}\sin x - \frac{1}{3}\operatorname{tg} x}{x^5}.$$

5.43. Se consideră funcția

$$f(x) = x^{2n} - 2x^n$$

unde n este un număr natural. Se cere:

1°. Să se studieze semnul lui $f(x)$ după diferite valori ale lui n.

2°. Să se calculeze α astfel ca $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) - \alpha}{(x-1)^2}$ să existe și să fie finită; să se calculeze în acest caz valoarea acestei limite.

3°. Să se reprezinte grafic funcția $f(x)$ pentru $n = 3$. Să i se găsească punctele de inflexiune.

(Admitere, Institutul Politehnic, București, 1973)

5.44. Se dă $f : R \to R$ dată de $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ unde $a \neq 0$. Să se arate că dacă extremele funcției se află situate pe o dreaptă ce trece prin origine, atunci între a, b, c, d avem $bc = 9\,ad$.

5.45. Se consideră o funcție $f : [a, b] \to R$. Să se arate că dacă pentru orice $x_1, x_2, x_3 \in (a, b)$ cu $x_1 < x_2 < x_3$ este satisfăcută relația

$$0 \leqslant \frac{f(x_2) - f(x_1)}{(x_2 - x_1)^2} \leqslant \frac{f(x_3) - f(x_2)}{(x_3 - x_2)^2},$$

atunci funcția f este constantă pe intervalul (a, b).

(*M. Vlada*, G.M.B., 13249, 1973)

5.46. Să se demonstreze că funcția $f: R \to R$ cu proprietatea:

$$\forall\ x, y \in R,\ x \neq y,\ \sqrt{|f(x) - f(y)|} \leqslant |x - y|$$

este constantă pe toată mulțimea R.

(*M. Vlada*, G.M.B., 13202, 1973)

5.47. Dacă f, g sînt două polinoame de gradul n, să se arate că $T: R \to R$ definită prin:

$$T(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x), \qquad x \in R$$

este o funcție constantă. În cazul particular: $g(t) = \dfrac{(x-t)^n}{n!}$, $t \in R$, ce devine egalitatea $T(x) = T(x_0)$?

(*Al. Lupaș*, G.M.B., 13365, 1973)

5.48. Să se determine toate funcțiile $f: R \to R$ cu proprietatea că

$$|f(x) - f(y)| \leqslant M|x - y||x - ay|, \qquad (\forall) x,\ y \in R$$

unde $a \neq -1$ și $M > 0$.

(*S. Rădulescu*, G.M.B., 13776, 1974)

5.1. Derivata întîi a funcției f este:

$$f'(x) = 2x\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}(x^2+1) - 12\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{1+x} =$$

$$= \frac{4x^2+x^2+1}{2\sqrt{x}} - \frac{6}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{1+x} =$$

$$= \frac{(5x^2+1)(x+1)-12}{2\sqrt{x}(1+x)} = \frac{(x-1)(5x^2+10x+11)}{2\sqrt{x}(1+x)}$$

și se anulează în punctul $x = 1$ care este un punct de minim căci $f'(x) < 0$ pentru $x \in (0, 1)$ și $f'(x) > 0$ pentru $x > 1$. Valoarea minimului este $f(1) = 2 - 12\frac{\pi}{4} = 2 - 3\pi$.

5.2. Din $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ rezultă $\sin^4 x + \cos^4 x + 2\sin^2 x\cdot\cos^2 x = 1$, deci $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x\cdot\cos^2 x$.

Apoi:

$\sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x + \cos^4 x - \sin^2 x\cdot\cos^2 x) = 1\cdot(1 - 2\sin^2 x\cdot\cos^2 x - \sin^2 x\cdot\cos^2 x) = 1 - 3\sin^2 x\cdot\cos^2 x$.

Rezultă $f(x) = 2 - 5\sin^2 x\cdot\cos^2 x = 2 - \frac{5}{4}\sin^2 2x$.

Funcția admite un minim egal cu $2 - \frac{5}{4} = \frac{3}{4}$ și un maxim egal cu 2.

Extremele funcției pot fi găsite și cu ajutorul derivatei I a funcției f.

5.3. Avem:

$$f'(x) = \frac{2(-x^2 + 5x - 4)}{(x-1)^4} = 0 \Rightarrow x = 4; \quad x \neq -1.$$

$$f'(x) > 0 \text{ pentru } 1 < x < 4$$

$$f'(x) < 0 \text{ pentru } x \in (-\infty,\ 1) \cup (4,\ \infty)$$

$$f(4) = \frac{4}{3} \text{ (maximul).}$$

5.4. Avem:

$$f'(x) = \frac{x^2 + 4x - 6}{(x^2 - 2x + 2)^2} = 0 \Rightarrow x = -2 \pm \sqrt{10}$$

$$f(-2 - \sqrt{10}) = \frac{20 + 7\sqrt{10}}{20 + 6\sqrt{10}} \text{ (maximul),}$$

$$f(-2 + \sqrt{10}) = \frac{20 - 7\sqrt{10}}{20 - 6\sqrt{10}} \text{ (minimul).}$$

5.5. Notăm înălțimea cilindrului cu $2x$.
Raza bazei cilindrului este $\sqrt{R^2 - x^2}$.
Volumul cilindrului este $V = 2\pi(R^2 - x^2)x$.

$$V' = 2\pi(R^2 - 3x^2) = 0 \Rightarrow x = \frac{R\sqrt{3}}{3}.$$

$$V_{max} = 2\pi\left(R^2 - \frac{R^2}{3}\right)\frac{R\sqrt{3}}{3} = \frac{4\pi R^3\sqrt{3}}{9}.$$

5.6. Avem:

$$f'(x) = 9 \cos x + 3 \cos 3x; \quad f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

$$f''(x) = -9 \sin x - 9 \sin 3x; \quad f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

$$f'''(x) = -9 \cos x - 27 \cos 3x; \quad f'''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

$$f^{\mathrm{IV}}(x) = 9 \sin x + 81 \sin 3x; \quad f^{\mathrm{IV}}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -72 < 0.$$

Prima derivată diferită de zero fiind de ordin par și negativă, funcția $f(x)$ admite maxim pentru $x = \frac{\pi}{2}$.

$$g'(x) = 3 \cos x - 3 \cos 3x; \; g'(\pi) = 0$$
$$g''(x) = -3 \sin x + 9 \sin x; \; g''(\pi) = 0$$
$$g'''(x) = -3 \cos x + 27 \cos 3x; \; g'''(\pi) = -24.$$

Prima derivată diferită de zero pentru $x = \pi$ este de ordinul III (impar), deci funcția nu admite extrem. Deoarece $g'''(\pi) < 0$ funcția este descrescătoare.

5.7. Notăm $f(x) = (\sin x)^{2^n} + (\cos x)^{2^n}$.

Deoarece pentru oricare $x \in R$, $f(x) = f\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ vom arăta că

$$(\forall)\; x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow f(x) \geqslant 2^{1-2^{n-1}}.$$

Într-adevăr, calculînd derivata întîi a funcției obținem:

$$f'(x) = 2^n \sin x \cos x \left[(\sin x)^{2^n-2} - (\cos x)^{2^n-2}\right]$$

de unde

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0; \quad x_2 = \frac{\pi}{4}; \quad x_3 = \frac{\pi}{2}.$$

Studiind semnul derivatei întîi a funcției și trecînd rezultatele într-un tabel avem:

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	1	$\searrow$	$2^{1-2^{n-1}}$ (m)	$\nearrow$	1

Deci $f(x) \geqslant f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2^{1-2^{n-1}}$ sau

$$(\sin x)^{2n} + (\cos x)^{2n} \geqslant 2^{1-2^{n-1}}.$$

Semnul egal are loc cînd $x = \frac{\pi}{4}$ sau în general

$$x = k\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \text{ unde } k \in Z.$$

5.8. Funcția $f : R - \left\{\frac{k\pi}{2}\right\}_{k\in Z} \to R$ dată de legea

$$f(x) = \text{tg}\, a \cdot \text{tg}\, x + \text{ctg}\, a \cdot \text{ctg}\, x,$$

are derivata

$$f'(x) = \frac{\text{tg}\, a}{\cos^2 x} - \frac{\text{ctg}\, a}{\sin^2 x} = \frac{\text{tg}\, a \cdot \sin^2 x - \text{ctg}\, a \cdot \cos^2 x}{\frac{1}{4}\sin^2 2x}.$$

Ecuația $f'(x) = 0$ conduce la

$$\text{tg}^2 x = \text{ctg}^2 a = \text{tg}^2\left(\frac{\pi}{2} - a\right), \text{ deci}$$

$$x = k_1\pi + \frac{\pi}{2} - a \quad \text{și} \quad x = a - \frac{\pi}{2} + k_2\pi,\ k_1,\ k_2 \in Z.$$

Pentru $x \in [0, 2\pi]$ vom avea două maxime egale cu 2, cînd $x = \frac{\pi}{2} - a$ și $x = \pi + \frac{\pi}{2} - a$ și două minime egale cu -2, cînd $x = \pi - \frac{\pi}{2} + a$ și $x = 2\pi - \frac{\pi}{2} + a$.

5.9. Înălțimea triunghiului echilateral este $h = \frac{\sqrt{3}x}{2}$. Deci aria bazei este $S = \frac{\sqrt{3}x^2}{4}$. Înălțimea H a piramidei este dată de relația:

$$H = \sqrt{k^2 - \left(\frac{2}{3}h\right)^2} = \sqrt{k^2 - \frac{x^2}{3}} = \frac{\sqrt{3k^2 - x^2}}{\sqrt{3}}.$$

Deci volumul piramidei este

$$V(x) = \frac{S \cdot H}{3} = \frac{x^2\sqrt{3k^2 - x^2}}{12} \Rightarrow V'(x) =$$

$$= \frac{6k^2 - 3x^2}{12\sqrt{3k^2 - x^2}}.$$

$V'(x)$ se anulează pentru $x = \sqrt{2}k$.
$V'(x) > 0$ dacă $x \in (0, \sqrt{2}k)$ și $V'(x) < 0$ dacă $x \in (\sqrt{2}k, \sqrt{3}k)$.
Rezultă că $x = \sqrt{2}k$ este punct de maxim pentru $V(x)$.
Volumul maxim este

$$V_{\max} = \frac{2k^2\sqrt{3k^2 - 2k^2}}{12} = \frac{k^3}{6}.$$

5.10. Să aflăm raza și înălțimea cilindrului cu volumul de 1 dm³ și de arie totală minimă. Fie r și h raza acestui cilindru. Avem ca unitate de măsură cm.

Notînd S = suprafața totală și V = volumul. $S = 2\pi r^2 + 2\pi r h$ și $V = \pi r^2 h = 1000 \Rightarrow h = \frac{1000}{\pi r^2}$.

Rezultă:

$$S(r) = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r} = \frac{2(\pi r^3 + 1000)}{r};$$

$$S'(r) = \frac{4\pi r^3 - 2000}{r^2} = \frac{4(\pi r^3 - 500)}{r^2}.$$

$S'(r)$ se anulează pentru $r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$. De asemenea $S'(r) < 0$ dacă $r < \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$ și $S'(r) > 0$ dacă $r > \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$.

Deci $r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$ este punct de minim pentru $S(r)$.

Rezultă că cilindrul cu volumul de 1 dm^3 și de arie totală minimă are raza $r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$ cm și înălțimea $h = \sqrt[3]{\frac{4000}{\pi}}$ cm.

Atunci diametrul bucății din care se confecționează fundul cutiei este $D_1 = 2\left(\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} + 1\right)$ cm. Diametrul bucății din care se confecționează capacul este $D_2 = 2\left(\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} + 4\right)$ cm.

Lungimea bucății dreptunghiulare este: $L = \left(2\pi\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} + 0{,}2\right)$ cm, iar înălțimea bucății dreptunghiulare este $H = \left(\sqrt[3]{\frac{4000}{\pi}} + 0{,}8\right)$ cm.

5.11. Valorile extreme ale funcției corespund valorilor argumentului care satisfac ecuația $y' = 3ax^2 + p = 0$. O condiție necesară pentru extrem este $ap < 0$. Dar rădăcinile ecuației $3ax^2 + p = 0$ au semne diferite, iar $y'' = 6ax$, așadar unul dintre extreme este maxim, celălalt minim.

$$M = ax_1^3 + px_1 + q, \quad m = ax_2^3 + px_2 + q \text{ iar } 3ax_1^2 + p = 0;$$
$$3ax_2^2 + p = 0.$$

Eliminînd parametrul a, căpătăm, $M = \frac{2}{3}px_1 + q$, $m = \frac{2}{3}px_2 + q$. De aici rezultă

$$Mm = \frac{4}{9}p^2x_1x_2 + q^2 = q^2 + \frac{4}{27}\frac{p^3}{a}.$$

5.12. Notăm $t = \text{tg}\, x$ unde $t > 0$ deci

$$f(x) = n\,\text{tg}^m x + m\,\text{ctg}^n x = nt^m + mt^{-1} = f_1(t).$$

Calculăm derivata întîi a funcției f_1 și avem:

$$f_1'(t) = mn(t^{m-1} - t^{-n-1})$$

Rezultă că $f_1'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$.
Calculăm și derivata a doua a funcției f_1 și avem:

$$f_1''(t) = mn[(m-1)t^{m-2} + (n+1)t^{-n-2}],$$
$$f_1''(1) = mn(m+n) > 0$$

Deci $f_1(t)$ este minim pentru $t = 1$.

Rezultă că: $\min f(x) = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = m + n$.

5.13. 1°. Avem

$$df(x) = f'(x)\,dx = \frac{6x^2 - 6x - 4}{(2x-1)^2}dx.$$

2°. Avem $f(1) = 7$; $f'(1) = -4$, deci

$$\frac{f(1{,}001) - f(1)}{1{,}001 - 1} \approx f'(1) \text{ sau}$$

$$f(1{,}001) \approx f(1) + f'(1) \cdot 0{,}001 = 7 - 4 \cdot 0{,}001 = 6{,}996.$$

Făcînd calculele efectiv, obținem:

$$f(1{,}001) = \frac{3 \cdot 1{,}001^2 + 4 \cdot 1{,}001}{2 \cdot 1{,}001 - 1} = 6{,}996037\ldots$$

5.14. 1°. Pentru a determina intervalele de monotonie ale funcției f va trebui să calculăm derivata I a funcției f și să stabilim semnul ei.
Avem:

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{3\sqrt[3]{(7-x)^2}},$$

sau

$$f'(x) = \frac{\sqrt[3]{(7-x)^2} - \sqrt[3]{x^2}}{3\sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[3]{(7-x)^2}}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{7}{2}.$$

$f'(x) > 0$ pentru $x \in \left(-\infty, \frac{7}{2}\right)$, iar $f'(x) < 0$ pentru $x \in \left(\frac{7}{2}, +\infty\right)$.

Deci pe intervalul $\left(-\infty, \frac{7}{2}\right)$ funcția f este strict crescătoare, iar pe intervalul $\left(\frac{7}{2}, +\infty\right)$ funcția f este strict descrescătoare.

2°. Deoarece $2 \in \left(-\infty, \frac{7}{2}\right)$ și $3 \in \left(-\infty, \frac{7}{2}\right)$ și $2 < 3$, rezultă că $f(2) < f(3)$ adică

$$A = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{5} < \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{4} = B.$$

5.15. Considerăm funcția $f: (0, \alpha) \to R$ dată de legea:

$$f(x) = \frac{\cos x}{\cos \alpha} - \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

Derivînd obținem:

$$f'(x) = -\frac{\sin x}{\cos \alpha} - \frac{1}{\cos^2 x \cdot \operatorname{tg} \alpha} < 0.$$

Rezultă că funcția f este descrescătoare pe $(0, \alpha)$, deci

$$f(x) > f(\alpha) = 0, \text{ adică } \frac{\cos x}{\cos \alpha} > \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

Caz particular: dacă $\alpha = \frac{\pi}{4}$ avem: $\sqrt{2} \cos x > \operatorname{tg} x$, $(\forall)\ x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$.

5.16. Avem:

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

Rezultă ușor că $x = e$ este punct de maxim pentru $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

Adică: $\frac{\ln e}{e} \geqslant \frac{\ln x}{x}$ sau $\frac{1}{e} \geqslant \frac{\ln x}{x}$ sau $x \geqslant e \ln x$ sau $\ln e^x \geqslant \ln x^e$, adică $e^x \geqslant x^e$. Semnul egal are loc pentru $x = e$.

5.17. Fie $f(x) = x \cos x - \sin x$. Avem $f'(x) = -x \cdot \sin x$ și deci pentru $x \in (0, \pi)$, $f'(x) < 0$, iar $f(x)$ este strict descrescătoare și cum $f(0) = 0$, rezultă $f(x) < 0$. Pentru $x = \pi$, relația $f(x) < 0$ este satisfăcută.

Pentru $x = \pi + \alpha$ unde $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{4}$, avem:

$$f(\pi + \alpha) = (\pi + \alpha)(-\cos \alpha) + \sin \alpha =$$
$$= -(\pi + \alpha)\cos \alpha + \sin \alpha.$$

Deci $f(\pi + \alpha) < 0$.

5.18. Prima inegalitate se mai scrie

$$\frac{x}{x+1} - \ln(1 + x) < 0.$$

Considerăm funcția

$$f(x) = \frac{x}{x+1} - \ln(1 + x).$$

Calculînd derivata acestei funcții avem

$$f'(x) = \frac{(x+1) - x}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+1} = \frac{1 - x - 1}{(x+1)^2} =$$
$$= -\frac{x}{(x+1)^2} < 0.$$

Deci funcția f este descrescătoare și cum $f(0) = 0$ rezultă că $f(x) < f(0)$, adică prima inegalitate.

Pentru a doua inegalitate se face un raționament asemănător.

5.19. Fie aplicația $f : \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) \to (0, +\infty)$ definită astfel:

$$f(x) = \operatorname{tg} x \cdot \sin^2 x - x^3.$$

Primele trei derivate ale funcției $f(x)$ sînt:

$$f'(x) = tg^2\, x + 2\sin^2 x - 3x^2,$$

$$f''(x) = \frac{2\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} + 2\sin 2x - 6x,$$

$$f'''(x) = 2 \cdot \frac{\cos^4 x + 3\sin^2 x \cos^2 x}{\cos^6 x} +$$
$$+ 4\cos 2x - 6 = 2\operatorname{tg}^4 x(3 + 4\cos^2 x).$$

Pe întreg domeniul de definiție, funcția $f'''(x)$ este pozitivă. În baza unei teoreme cunoscute, rezultă că funcția $f''(x)$ este strict crescătoare pe tot domeniul de definiție. Avînd $x > 0$ rezultă $f''(x) > f''(0)$ și cum $f''(0) = 0$ înseamnă că $f''(x) > 0$, ceea ce implică faptul că funcția $f'(x)$ este strict crescătoare. Cum $f'(0) = 0$ rezultă că pentru $x > 0$ avem $f'(x) > f'(0) = 0$, ceea ce implică faptul că funcția $f(x)$ este strict crescătoare pe întreg domeniul de definiție.

Din ipoteză avem $x > 0$; prin urmare:
$f(x) > f(0) = 0$, adică:

$$\operatorname{tg} x \sin^2 x > x^3 \Leftrightarrow \sin^3 x > x^3 \cos x \qquad (1)$$

Dacă numerele a, b sînt pozitive, există echivalența: $a^3 > b^3 \Leftrightarrow a > b$. Cum $\sin x > 0$, $\cos x > 0$, $x > 0$ rezultă că (1) $\Rightarrow$ (2), unde (2) este inegalitatea $\sin x > x\sqrt[3]{\cos x}$.

5.20. Dacă $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ admite trei puncte de extrem distincte, rezultă că derivata $f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d = 0$ admite trei rădăcini reale distincte.

Deci $P(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d = 0$ admite trei rădăcini reale distincte.

Aplicăm teorema lui Rolle. Pentru ca ecuația $P(x) = 0$ să admită trei rădăcini reale distincte, este necesar ca ecuația $P'(x) = 0$ să admită două rădăcini reale distincte.
$P'(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c = 2(6ax^2 + 3bx + c) = 0$;
$6ax^2 + 3bx + c = 0$ admite 2 rădăcini dacă $\Delta \neq 0$

$$\Delta = 9b^2 - 24ac \neq 0 \Leftrightarrow 3b^2 - 8ac \neq 0.$$

Observăm că $3b^2 - 8ac \neq 0$ este numai condiție necesară, nu și suficientă.

5.21. Prin derivare obținem ecuația:
$12x^3 - 12\alpha x^2 - 12x + 12\alpha = 0$ cu rădăcinile $x_{1,2} = \pm 1$ și $x_3 = \alpha$.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty.$$

Să calculăm valorile $f(-1)$, $f(1)$, $f(\alpha)$ și să rezolvăm ecuațiile $f(-1) = 0$; $f(1) = 0$; $f(\alpha) = 0$.

Avem:

$$f(-1) = 7\alpha^2 - 8\alpha - 39 \text{ și } f(-1) = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 3, \quad \alpha_2 = -\frac{13}{7}.$$

$$f(1) = 7\alpha^2 + 8\alpha - 39 \text{ și } f(1) = 0 \Rightarrow \alpha_1' = -3,\ \alpha_2' = \frac{13}{7}.$$

$$f(\alpha) = -\alpha^4 + 13\alpha^2 - 36 \text{ și } f(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha_1'' = -3; \quad \alpha_2'' = -2;\ \alpha_3'' = 2;\ \alpha_4'' = 3.$$

La separarea rădăcinilor reale cu ajutorul șirului lui Rolle, se disting următoarele cazuri:

Cazul I: $\alpha \in (-\infty, -1)$. Notăm $A = -\alpha^4 + 13\alpha^2 - 36$; $B = 7\alpha^2 - 8\alpha - 39$; $C = 7\alpha^2 + 8\alpha - 39$.

x	$-\infty$ α -1 1 $+\infty$	
α \ $f(x)$	$+\infty$ A B C $+\infty$	Rădăcinile ecuației
$-\infty$	$+$ $-$ $+$ $+$ $+$	$x_1 \in (-\infty, \alpha)$, $x_2 \in (\alpha, -1)$ x_3, x_4 complexe conjugate
-3	$+$ 0 $+$ 0 $+$	$x_1 = x_2 = \alpha$ și $x_3 = x_4 = 1$
	$+$ $+$ $+$ $-$ $+$	$x_1 \in (-1, 1)$, $x_2 \in (1, +\infty)$ x_3, x_4 complexe conjugate
-2	$+$ 0 $+$ $-$ $+$	$x_1 = x_2 = \alpha$, $x_3 \in (-1, 1)$, $x_4 \in (1, +\infty)$
	$+$ $-$ $+$ $-$ $+$	$x_1 \in (-\infty, \alpha)$, $x_2 \in (\alpha, -1)$, $x_3 \in (-1, 1)$, $x_4 \in (1, +\infty)$
$-\frac{13}{7}$	$+$ $-$ 0 $-$ $+$	$x_1 = x_2 = -1$, $x_3 \in (-\infty, \alpha)$, $x_4 \in (1, +\infty)$.
-1	$+$ $-$ $-$ $-$ $+$	$x_1 \in (-\infty, \alpha)$, $x_2 \in (1, +\infty)$ x_3, x_4 complexe conjugate.

Cazul II: $\alpha = -1$

x	—	-1	1	$+\infty$	Rădăcinile ecuației
$f(x)$	$+$	-24	-40	$+\infty$	$x_1 \in (-\infty, -1)$, $x_2 \in (1, +\infty)$, x_3, x_4 complexe conjugate

Cazul III: $\alpha \in (-1, 1)$

x	—	-1	α	1	$+\infty$	
α \ $f(x)$	$+$	B	A	C	$+\infty$	Rădăcinile ecuației
-1 … 1	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$	$x_1 \in (-\infty, -1)$, $x_2 \in (1, +\infty)$, x_3, x_4 complexe conjugate

Cazul IV: $\alpha = 1$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	Rădăcinile ecuației
$f(x)$	$+\infty$	-40	-24	$+\infty$	$x_1 \in (-\infty, 1)$, $x_2 \in (-1, +\infty)$, x_3, x_4 complexe conjugate

Cazul V: $\alpha \in (1, +\infty)$

x	$-\infty$	-1	1		$+\infty$	
α \ $f(x)$	$+\infty$	B	C	A	$+$	Rădăcinile ecuației
1	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$	$x_1 \in (-\infty, -1)$, $x_2 \in (\alpha, +\infty)$, x_3, x_4 complexe conjugate.
$\frac{13}{7}$	$+$	$-$	0	$-$	$+$	$x_1 = x_2 = 1$, $x_3 \in (-\infty, -1)$, $x_4 \in (\alpha, +\infty)$.
	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	$x_1 \in (-\infty, -1)$, $x_2 \in (-1, 1)$, $x_3 \in (1, \alpha)$, $x_4 \in (\alpha, +\infty)$
2	$+$	$-$	$+$	0	$+$	$x_1 = x_2 = \alpha$, $x_3 \in (-\infty, -1)$, $x_4 \in (-1, 1)$



	+ − + + +	$x_1 \in (-\infty, -1)$, $x_2 \in (-1, 1)$, x_3, x_4 complexe conjugate
3	+ 0 + 0 +	$x_1 = x_2 = -1$, $x_3 = x_4 = \alpha$
$+\infty$	+ + + − +	$x_1 \in (1, \alpha)$, $x_2 \in (\alpha, +\infty)$, x_3, x_4 complexe conjugate.

5.22. a). Deoarece:

$$|x^2+x-2| = \begin{cases} x^2+x-2, & \text{dacă } x \in (-\infty, -2] \cup [1, +\infty), \\ -x^2-x+2, & \text{dacă } x \in (-2, 1). \end{cases}$$

$$|x+1| = \begin{cases} x+1, & \text{dacă } x \in [-1, +\infty) \\ -x-1, & \text{dacă } x \in (-\infty, -1), \end{cases}$$

legea funcției este:

$$f(x) = \begin{cases} -(2x^2+x-2) & \text{dacă } x \in (-\infty, -2) \\ x-2 & \text{dacă } x \in [-2, -1) \\ \dfrac{-x+2}{2x+1} & \text{dacă } x \in (-1, 1) \setminus \left\{-\dfrac{1}{2}\right\} \\ \dfrac{2x^2+x-2}{2x+1} & \text{dacă } x \in [1, +\infty) \end{cases}$$

Funcția este definită pe $R - \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$.

b). Funcția este continuă pe tot domeniul de definiție. Ar urma de căutat derivabilitatea funcției în punctele -2, -1 și 1 (în celelalte puncte ale domeniului de definiție fiind evident derivabilă).

În intervalul $[1, 2]$ funcția este continuă; ea este derivabilă în intervalul $(1, 2)$, deci pe acest interval poate fi aplicată teorema creșterilor finite:

$$\frac{f(2)-f(1)}{2-1} = f'(c); \quad f'(x) = \frac{4x^2+4x+5}{(2x+1)^2}; \quad \frac{4c^2+4c+5}{4c^2+4c+1} = \frac{19}{15},$$

de unde $2c^2+2c-7=0$, iar $c = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ aparține intervalului $(1, 2)$.

5.23. Funcția f este evident continuă pe $[-1, 0) \cup \cup (0, 1]$. Pentru a fi continuă și în punctul $x = 0$ va trebui ca

$$\lim_{x \nearrow 0} f(x) = \lim_{x \searrow 0} f(x) = f(0) = 4, \text{ deci } n = 4.$$

Luînd $n = 4$, funcția f este continuă pe $[-1, 1]$. Avem:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + m & \text{pentru } x \in (-1, 0) \\ 2px + 4 & \text{pentru } x \in (0, 1). \end{cases}$$

Punînd condiția ca f să fie derivabilă în $x = 0$, obținem:

$$f'_s(0) = m = f'_d(0) = 4, \text{ deci pentru } m = 4, \text{ există } f'(x) \text{ pe } (-1, 1).$$

În sfîrșit, din ultima condiție pe care trebuie să o îndeplinească funcția f pentru a i se putea aplica teorema lui Rolle: $f(-1) = f(1)$, deducem:

$$f(-1) = 1 - m + n = 1 = f(1) = p + 8, \text{ adică } p = -7.$$

Parametrii căutați sînt: $m = n = 4$, $p = -7$,

5.24. Funcția $f : [a, b] \to R_+$ dată de

$$y = f(x) = \sqrt{2px}, \qquad p > 0$$

fiind derivabilă pe intervalul $[a, b]$, îi putem aplica teorema creșterilor finite. Rezultă că există $\xi \in (a, b)$, astfel încît

$$\frac{\sqrt{2pb} - \sqrt{2pa}}{b - a} = f'(\xi)$$

Dar $f'(x) = \dfrac{2p}{2\sqrt{2px}} = \sqrt{\dfrac{p}{2x}}$, deci există $\xi \in (a, b)$ astfel ca

$$\sqrt{2p} \cdot \frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{b - a} = \sqrt{\frac{p}{2\xi}} \Leftrightarrow \xi = \left(\frac{\sqrt{b} + \sqrt{a}}{2}\right)^2$$

Se verifică imediat că $\xi \in (a, b)$.

Pentru $a = 0$, $b = 1$ obținem $\xi = \frac{1}{4}$.

5.25. Fie un interval oarecare $(x, x+1)$ unde $x > e$. Aplicînd formula creșterilor finite avem:
$f(x+1) - f(x) = f'(c)$; (1) unde $c \in (x, x+1)$.
Însă:

$$f'(x) = \frac{\ln x}{x}; \ (2) \ \text{și} \ f''(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

Pentru $x > e$ avem $f''(x) < 0$ deci $f'(x)$ este descrescătoare, de unde rezultă:

$$f'(x+1) < f'(c) < f'(x).$$

Ținînd seama de relațiile (1) și (2) obținem

$$\frac{\ln(x+1)}{x+1} < f(x+1) - f(x) < \frac{\ln x}{x}.$$

5.26. 1°. Avem:

$\frac{f(h) - f(0)}{h} = f'(c)$, unde $0 < c < h < 1$ și $f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$,

deci

$$\frac{\frac{h}{1-h} - \frac{0}{1-0}}{h} = \frac{1}{1-h} = \frac{1}{(1-c)^2}.$$

Rezultă $1 - h = (1-c)^2$, unde $0 < c < h < 1$.

2°. Din egalitatea $f(h) - f(0) = hf'(\theta h)$ rezultă $\frac{1}{1-h} = \frac{1}{(1-\theta h)^2}$, deci $1 - h = (1 - \theta h)^2$, de unde $\theta = \frac{1 - \sqrt{1-h}}{h}$. Avem:

$$\lim_{h \to 0} \theta(h) = \lim_{h \to 0} \frac{1 - \sqrt{1-h}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{1 + \sqrt{1-h}} = \frac{1}{2}.$$

5.27. a). Aplicînd teorema lui Lagrange funcției $f(x) = \ln(\ln x)$ pe intervalul $[k, k+1)$ unde $k > 2$ și $k \in Z$ obținem:

$$\ln[\ln(k+1)] - \ln(\ln k) = \frac{1}{c \ln c} > 0, \text{ unde}$$

$k < c < k + 1$ și $\frac{1}{c} < \frac{1}{k}$. Ținînd seama de monotonia funcției logaritmice avem:

$$\ln c > \ln k \text{ și } \frac{1}{\ln c} < \frac{1}{\ln k}, \text{ deci}$$

$$0 < \ln[\ln(k+1)] - \ln(\ln k) < \frac{1}{k \ln k}. \qquad (1)$$

b). Pentru $k = 2,3,\ldots n$ relația (1) devine

$$\ln(\ln 3) - \ln(\ln 2) < \frac{1}{2 \ln 2}.$$

$$\ln(\ln 4) - \ln(\ln 3) < \frac{1}{3 \ln 3}$$

. . . .

$$\ln[\ln(n+1)] - \ln(\ln n) < \frac{1}{n \ln n}.$$

Adunînd aceste inegalități membru cu membru obținem:

$$\frac{1}{2 \ln 2} + \frac{1}{3 \ln 3} + \ldots + \frac{1}{n \ln n} > \ln \frac{\ln(n+1)}{\ln 2}.$$

Deoarece

$$\lim_{n \to \infty} \ln \frac{\ln(h+1)}{\ln 2} = +\infty$$

rezultă

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{2 \ln 2} + \frac{1}{3 \ln 3} + \ldots + \frac{1}{n \ln n} \right) = +\infty.$$

5.28. Considerăm funcția $F: R \to R$ dată de legea:

$$F(x) = \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n} x^n + \ldots + \frac{a_1}{2} x^2 + a_0 x.$$

Se observă ușor că

a) funcția F este continuă pe $[0, 1]$.

b) F este derivabilă pe $(0, 1)$.

c) $F(0) = 0$; $F(1) = \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{i+1} = 0.$

Aplicînd atunci funcției F, pe intervalul $[0, 1]$, teorema lui Lagrange rezultă că $\exists\, c \in (0, 1)$ astfel încît:

$$\frac{F(1) - F(0)}{1 - 0} = \frac{0 - 0}{1} = 0 = F'(c).$$

Dar derivata funcției considerate F este funcția $f: R \to R$ dată de:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0.$$

Rezultă că $\exists\, c \in (0,1)$ cu proprietatea $f(c) = 0$, deci ecuația din enunț are cel puțin o soluție reală.

5.29. 1°. Deoarece $f'(\theta) = \frac{1}{\theta}$, formula creșterilor finite devine

$$\frac{1}{b-a} \ln \frac{b}{a} = \frac{1}{\theta}.$$

Faptul că θ se află situat pe intervalul $\left(\sqrt{ab}, \frac{a+b}{2}\right)$ va fi demonstrat dacă reușim să stabilim inegalitățile:

(1)
$$\frac{2(b-a)}{a+b} < \ln \frac{b}{a} < \frac{b-a}{\sqrt{ab}}, \text{ sau notînd } t = \frac{b}{a}$$
$$\frac{2(t-1)}{t+1} < \ln t < \frac{t-1}{t}, \quad t \in (1, +\infty).$$

Pentru demonstrarea inegalităților (1) vom proceda astfel: pe intervalul $[1, +\infty)$ definim funcțiile f_1 și f_2 prin egalitățile:

$$f_1(t) = \frac{2(t-1)}{t+1} - \ln t; \quad f_2(t) = \ln t - \frac{t-1}{\sqrt{t}}.$$

Avem:

$$f_1'(t) = -\frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2} \leqslant 0, \quad f_2'(t) = -\frac{(\sqrt{t}-1)^2}{2t\sqrt{t}} \leqslant 0,$$

$$t \in [1, +\infty),$$

cazurile de egalitate avînd loc dacă și numai dacă $t = 1$. Deoarece $f_j(1) = 0, j = 1, 2$, rezultă valabilitatea inegalităților $f_j(t) \leqslant 0$, $t \in [1, +\infty)$, $j = 1, 2$, egalitatea avînd loc numai pentru $t = 1$. Prin urmare

$$f_j(t) < 0 \text{ pentru } t \in (1, +\infty), \ j = 1, 2.$$

Dar aceste inegalități sînt echivalente cu inegalitățile (1) care implică $\theta \in \left(\sqrt{ab}, \frac{a+b}{2}\right)$.

2°. Deoarece pentru $t \in [1,4]$

$$\frac{t-1}{\sqrt{t}} \leqslant \frac{3(t-1)}{t+2},$$

din (1) deducem

$$\frac{2(t-1)}{t+1} < \ln t < \frac{3(t-1)}{t+2}, \ t \in (1, 4). \tag{2}$$

Fie $t = 1 + \frac{1}{n}$, unde n este un număr natural arbitrar. Din (2) avem

$$\frac{2n}{2n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \frac{3n}{3n+1},$$

sau

$$e^{-\frac{1}{2n+1}} < \frac{1}{e}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e^{-\frac{1}{3n+1}}.$$

5.30. Deoarece

$$f_1(x) - f_2(x) = \sum (a+x)(b+x)[(b+x)-(a+x)] = \\ = \sum [ab + (a+b)x + x^2](b-a),$$

vom avea

$$[f_1(x) - f_2(x)]' = f_1'(x) - f_2'(x) = \sum (a+b)(b-a) + \\ + 2\sum x(b-a) = \sum (b^2-a^2) + 2x\sum (b-a) = 0.$$

De aici rezultă că $f_1(x) - f_2(x)$ este o constantă, deci nu depinde de x.

5.31. Vom arăta că funcțiile f și g au derivatele egale, de unde va rezulta că funcțiile f și g diferă printr-o constantă. Avem:

$$f'(x) = \frac{\mathrm{tg}(x)'}{\sqrt{1-\mathrm{tg}^2 x}} = \frac{\dfrac{1}{\cos^2 x}}{\sqrt{\dfrac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x}}} = \frac{1}{\cos x\sqrt{\cos 2x}}$$

$$g'(x) = \frac{\left(\dfrac{\sin x}{\sqrt{\cos 2x}}\right)'}{1 + \dfrac{\sin^2 x}{\cos 2x}} =$$

$$= \frac{\dfrac{\cos x\sqrt{\cos 2x} + \dfrac{2\sin x}{2\sqrt{\cos 2x}}\sin 2x}{\cos 2x}}{\dfrac{\cos^2 x - \sin^2 x + \sin^2 x}{\cos 2x}} =$$

$$= \frac{\cos x\cos 2x + \sin x \sin 2x}{\cos^2 x\sqrt{\cos 2x}} = \frac{\cos x}{\cos^2 x\sqrt{\cos 2x}} =$$

$$= \frac{1}{\cos x\sqrt{\cos 2x}}.$$

Deci

$$f'(x) = g'(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) = C.$$

5.32. a). Funcțiile sînt definite pe toată mulțimea numerelor reale, cu excepția lui $f_3(x)$, care nu este definită pentru $x = 0$.

Derivatele

$$f_1'(x) = -\frac{2a(a^2 - x^2)}{(a^2 + x^2) \cdot |a^2 - x^2|}.$$

Pentru $x \in (-\infty, -a) \cup (a, +\infty)$, $a^2 - x^2 < 0$ și $|a^2 - x^2| = x^2 - a^2$ și deci $f_1'(x) = \frac{2a}{a^2 + x^2}$, iar pentru $x \in (-a, a)$, $a^2 - x^2 > 0$ și $|a^2 - x^2| = a^2 - x^2$, deci

$f_1'(x) = \frac{-2a}{a^2 + x^2}$. Astfel că $f_1'(x)$ există pentru $x \in R - \{-a, a\}$.

$$f_2'(x) = -\frac{2ax}{|x| \cdot (a^2 + x^2)}.$$

pentru $x < 0$, $f_2'(x) = \frac{2a}{a^2 + x^2}$, iar pentru $x > 0$, $f_2'(x) = -\frac{2a}{a^2 + x^2}$ și pentru $x = 0$ nu este derivabilă. Deci domeniul lui $f_2'(x)$ este $x \in R - \{0\}$.

$$f_3'(x) = \frac{2a}{a^2 + x^2} \text{ există pe } R - \{0\}.$$

$$f_4'(x) = -\frac{2a}{a^2 + x^2} \text{ există pe } R.$$

Ca să se vadă mai clar, facem tabloul:

x	$-\infty \quad\quad -a$		0	$a \quad\quad +\infty$
$f_1'(x)$	$\frac{2a}{a^2+x^2}$	$-\frac{2a}{a^2+x^2}$	$-\frac{2a}{a^2+x^2}$	$\frac{2a}{a^2+x^2}$
$f_2'(x)$	$\frac{2a}{a^2+x^2}$	$\frac{2a}{a^2+x^2}$	$-\frac{2a}{a^2+x^2}$	$-\frac{2a}{a^2+x^2}$
$f_3'(x)$	$\frac{2a}{a^2+x^2}$	$\frac{2a}{a^2+x^2}$	$\frac{2a}{a^2+x^2}$	$\frac{2a}{a^2+x^2}$
$f_4'(x)$	$\frac{-2a}{a^2+x^2}$	$-\frac{2a}{a^2+x^2}$	$-\frac{2a}{a^2+x^2}$	$-\frac{2a}{a^2+x^2}$

b). Ca funcția $f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + f_4(x)$ să fie o constantă, trebuie ca derivata să fie zero, adică

$$f_1'(x) + f_2'(x) + f_3'(x) + f_4'(x) = 0.$$

Din tabelul de mai sus, se observă că suma derivatelor este nulă pentru $x \in (-a, 0)$ și pentru $x \in (a, +\infty)$.

Deci suma $f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + f_4(x) = k$ cînd x aparține uneia din mulțimile de mai sus. Pentru a determina constanta în fiecare caz dăm o valoare particulară pentru x în fiecare caz. Pentru $x \in (-a, 0)$ dăm valoarea $x = -\frac{a}{2}$ și avem:

$$f_1\left(-\frac{a}{2}\right) = \arccos\left(-\frac{4}{5}\right) = \pi - \arccos\frac{4}{5}\cdot$$

$$f_2\left(-\frac{a}{2}\right) = \arcsin\frac{3}{5};\quad f_3\left(-\frac{a}{2}\right) = 2\,\mathrm{arc\,tg}\,(-2) =$$

$$= 2(\pi - \mathrm{arc\,ctg}\,2) \text{ și } f_4\left(-\frac{a}{2}\right) = 2\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{1}{2}\cdot$$

Dar $\arccos\frac{4}{5} = \arcsin\frac{3}{5}$ și $\operatorname{arcctg} 2 = \operatorname{arctg}\frac{1}{2}$, astfel că suma

$$f_1\left(-\frac{a}{2}\right) + f_2\left(-\frac{a}{2}\right) + f_3\left(-\frac{a}{2}\right) + f_4\left(-\frac{a}{2}\right) = 3\pi.$$

Deci pentru $x \in (-a, 0)$.

$f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + f_4(x) = 3\pi$, adică constanta 3π.

Ca să determinăm constanta, cînd $x \in (a, +\infty)$, dăm lui x valoarea $x = 2a$ și avem: $f_1(2a) = \arccos\frac{4}{5}$; $f_2(2a) = \arcsin\left(-\frac{3}{5}\right) = -\arcsin\frac{3}{5}$; $f_3(2a) = 2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$; $f_4(2a) = -2\operatorname{arctg} 2$ și deci $f_1(2a) + f_2(2a) + f_3(2a) + f_4(2a) = 0$, adică constanta este zero.

În concluzie: suma $f_1 + f_2 + f_3 + f_4$ este constantă și egală cu 3π pe $(-a, 0)$ și egală cu zero pe $(a, +\infty)$.

5.33. Avem aplicînd definiția derivatei:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x^2+1}}{x-1} = \left(\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)'_{x=1} =$$

$$= \left[\frac{\frac{2x(x^2+1) - 2x(x^2-1)}{(x^2+1)^2}}{1 + \left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^2}\right]_{x=1} = 1.$$

5.34. Din enunț avem:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = a \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{xf(x)}{x} = a.$$

Dar, aplicînd regula lui l'Hospital avem:

$$a = \lim_{x\to\infty}\frac{xf(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x) + xf'(x)}{1} = a + \lim_{x\to\infty} xf'(x).$$

de unde rezultă enunțul.

5.35. Aplicînd regula lui l'Hospital de două ori obținem:

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\ln(1+\alpha)-\alpha}{\alpha^2}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\dfrac{1}{\alpha+1}-1}{2\alpha}=$$

$$=\lim_{\alpha\to 0}\frac{-\dfrac{1}{(\alpha+1)^2}}{2}=-\frac{1}{2}.$$

5.36. Avem:

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}[\ln x\cdot\ln(\ln x)]=\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}[-\ln x\cdot\ln(\ln x)^{-1}]=$$

$$=\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}-\frac{\ln\left(\dfrac{1}{\ln x}\right)}{\dfrac{1}{\ln x}}.$$

Însă atunci cînd $x\to 1$, $x>1$ avem $\dfrac{1}{\ln x}\to+\infty$, iar

$$\lim_{y\to+\infty}\frac{\ln y}{y}=\lim_{y\to+\infty}\frac{\dfrac{1}{y}}{1}=0.$$

Rezultă:

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}[\ln x\cdot\ln(\ln x)]=-\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{\ln\left(\dfrac{1}{\ln x}\right)}{\dfrac{1}{\ln x}}=0.$$

Limita se poate calcula și aplicînd regula lui l'Hospital.

5.37. Pentru calculul acestor limite folosim de mai multe ori regula lui l'Hospital.

Avem:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\cos x\cdot e^{\sin x}}{1-\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+\sin x\cdot e^{\sin x}-\cos^2 x\cdot e^{\sin x}}{\sin x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+\cos x\cdot e^{\sin x}+3\sin x\cdot\cos x\, e^{\sin x}-\cos^3 x\cdot e^{\sin x}}{\cos x}=$$

$$=\frac{1+1+0-1}{1}=1$$

și

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-\sin^2 x-2}{x^5-x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-\sin 2x}{5x^4-4x^3}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2\cos 2x}{20x^3-12x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}+4\sin 2x}{60x^2-24x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}+8\cos 2x}{120x-24}=\frac{1+1+8}{-24}=-\frac{5}{12}.$$

5.38. Aplicînd funcției $f:(0,\infty)\to R$ dată de legea

$$f(x)=x^{1+\frac{1}{x}},$$

teorema lui Lagrange pe un interval $[x,x+1]$, rezultă că există un $\xi\in(x,x+1)$, astfel încît

$$\frac{(x+1)^{1+\frac{1}{x+1}}-x^{1+\frac{1}{x}}}{(x+1)-x}=\xi^{\frac{1}{\xi}}\left(1+\frac{1}{\xi}\right)-\xi^{\frac{1}{\xi}-1}\cdot\ln\xi,$$

căci $f'(x)=x^{\frac{1}{x}}\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)-x^{\frac{1}{x}-1}\cdot\ln x$. Atunci cînd $x\to\infty$, avem și $\xi\to\infty$, deci:

$$\lim_{x\to\infty}\left[(x+1)^{1+\frac{1}{x+1}}-x^{1+\frac{1}{x}}\right]=\lim_{\xi\to\infty}\xi^{\frac{1}{\xi}}\left(1+\frac{1}{\xi}-\frac{\ln\xi}{\xi}\right).$$

Însă cu ajutorul regulii lui l'Hospital avem:

$$\lim_{\xi\to\infty}\frac{\ln\xi}{\xi}=\lim_{\xi\to\infty}\frac{1}{\xi}=0 \text{ și } \lim_{\xi\to\infty}\xi^{\frac{1}{\xi}}=\lim_{\xi\to\infty}e^{\frac{\ln\xi}{\xi}}=e^0=1.$$

Rezultă:

$$\lim_{x\to\infty}\left[(x+1)^{1+\frac{1}{x+1}}-x^{1+\frac{1}{x}}\right]=1.\ (1+0-0)=1.$$

5.39. Limita din enunț se mai poate scrie sub forma

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin(\sin x)+x^2-2x\cdot\sin x-x^2+2x\cdot\sin x-\sin^2 x}{x^6},$$

sau

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)+x-2\sin x}{x^5}-\lim_{x\to 0}\left(\frac{x-\sin x}{x^3}\right)^2.$$

Folosind regula lui l'Hospital, prima limită din enunț devine:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)+x-2\sin x}{x^5}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\cdot\cos(\sin x)+1-2\cos x}{5x^4}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x\cdot\cos(\sin x)-\cos^2 x\cdot\sin(\sin x)+2\sin x}{20x^3}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\sin x\cdot\cos(\sin x)+\sin x-(1-\sin^2 x)\cdot\sin(\sin x)}{20x^3}=$$

$$=\frac{1}{20}\left[\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\left(\frac{1-\cos(\sin x)}{x^2}\right)+\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\sin(\sin x)}{x^3}+\right.$$

$$\left.+\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}\cdot\frac{\sin(\sin x)}{x}\right].$$

Ținînd seama că $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2}$ și $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2} = \frac{1}{6}$, vom obține

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(\sin x)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(\sin x)}{(\sin x)^2}\cdot\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 = \frac{1}{2};$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - \sin(\sin x)}{(\sin x)^3}\cdot\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 = \frac{1}{6}$$

și

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x} = 1.$$

Cu aceste rezultate, limita din enunț devine:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin(\sin x) - \sin^2 x}{x^6} = \frac{1}{20}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+1\right) - \frac{1}{36} = \frac{1}{18}.$$

5.40. Se aplică regula lui l'Hospital. $L = -2$.

5.41. Se aplică regula lui l'Hospital. $L = 0$.

5.42. Se aplică de mai multe ori regula lui l'Hospital. $L = -\frac{1}{20}$.

5.43. 1°. Funcția este definită pe R și ia valori reale. Scriind legea funcției sub forma $f(x) = x^n(x^n - 2)$, se observă că:

a). Pentru n par: $f(x) \leqslant 0$, cînd $x \in [-\sqrt[n]{2}, \sqrt[n]{2}]$ și $f(x) \geqslant 0$, cînd $x \in R - [-\sqrt[n]{2}, \sqrt[n]{2}]$,

b). Pentru n impar: $f(x) \leqslant 0$, cînd $x \in [0, \sqrt[n]{2}]$ și $f(x) \geqslant 0$, cînd $x \in R - [0, \sqrt[n]{2}]$.

2°. Fie $x-1=y$. Cum $x \to 1$, rezultă $y \to 0$ și $x = y+1$.
Limita din enunț devine:

$$\lim_{y\to 0} \frac{(y+1)^{2n} - 2(y+1)^n - \alpha}{y^2} =$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{y^{2n} + \ldots + C_{2n}^2 \cdot y^2 + C_{2n}^1 \cdot y + C_{2n}^0 - 2(y^n +}{y^2}$$

$$\ldots \frac{+ \ldots + C_n^2 \cdot y^2 + C_n^1 \cdot y + C_n^0) - \alpha}{y^2} =$$

$$= \lim_{y\to 0} y^{2n-2} + \ldots + C_{2n}^2 - 2(y^{n-2} + \ldots + C_n^2) +$$

$$+ \lim_{y\to 0} \frac{C_{2n}^1 \cdot y + C_{2n}^0 - 2 \cdot C_n^1 y - 2C_n^0 - \alpha}{y^2} =$$

$$= C_{2n}^2 - 2 \cdot C_n^2 + \lim_{y\to 0} \frac{2ny + 1 - 2ny - 2 - \alpha}{y^2} =$$

$$= n^2 + \lim_{y\to 0} \frac{-\alpha - 1}{y^2}.$$

Rezultă $\alpha = -1$ și limita este egală cu n^2.

3°. Trebuie să reprezentăm grafic funcția $f: R \to R$ dată de

$$f(x) = x^6 - 2x^3.$$

Avem $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$. Intersecțiile cu axa Oy sînt $(0,0)$ și $(\sqrt[3]{2},0)$.

Derivata întîi $f'(x) = 6x^5 - 6x^2 = 6x^2(x^3-1)$ se anulează pentru $x=0$ și $x=1$. Pentru $x=1$ avem un minim egal cu $f(1) = -1$.

Derivata a doua, $f''(x) = 30x^4 - 12x = 6x(5x^3 - -2)$, se anulează pentru $x=0$ și $x = \sqrt[3]{\frac{2}{5}}$. Ambele sînt puncte de inflexiune.

Tabloul de variație a funcției este:

x	$-\infty$		0		$\sqrt[3]{\frac{2}{5}}$		1		$\sqrt[3]{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$		$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$\frac{-16}{25}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	$+$	0 (i)	$-$	0 (i)		$+$ (m)	$+$	$+$		

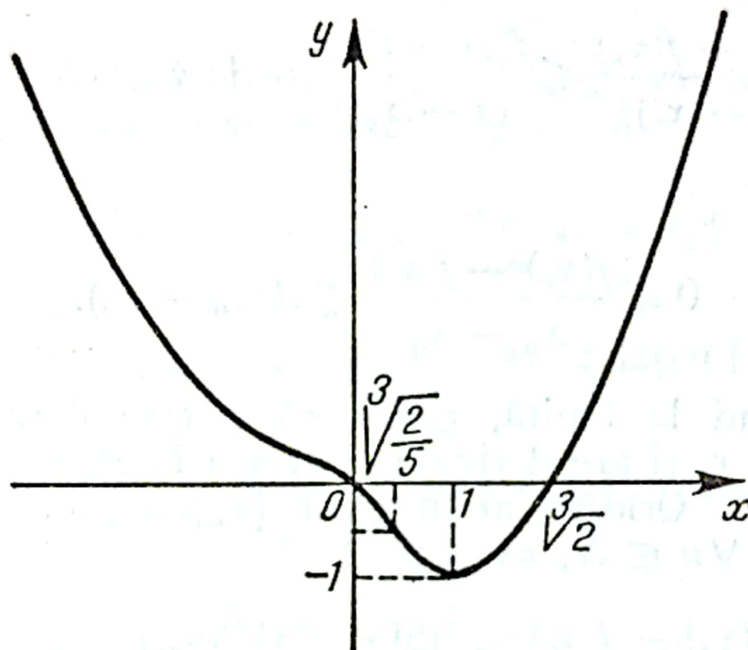


Fig. 5.43

5.44. Punctele de extrem sînt $P_1(x_1, f(x_1))$; $P_2(x_2, f(x_2))$, unde x_1 și x_2 sînt zerourile derivatei:

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c = 0.$$

Folosind relațiile dintre coeficienți și rădăcini avem

$$x_1 + x_2 = -\frac{2b}{3a}; \quad x_1x_2 = \frac{c}{3a}.$$

Însă din condiția ca P_1 și P_2 să se afle pe o dreaptă ce trece prin origine $y = mx$, rezultă $f(x_1) = mx_1$; $f(x_2) = mx_2$, de unde eliminînd pe m obținem

$$x_2 f(x_1) = x_1 f(x_2)$$

sau

$$x_2(ax_1^3 + bx_1^2 + cx_1 + d) = x_1(ax_2^3 + bx_2^2 + cx_2 + d) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ax_1x_2(x_1^2 - x_2^2) + bx_1x_2(x_1 - x_2) - d(x_1 - x_2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x_1 - x_2)\,[a(x_1 + x_2)\,x_1x_2 + bx_1x_2 - d] = 0$$

de unde

$ax_1x_2(x_1 + x_2) + bx_1x_2 - d = 0$ și rezultă $9ad = bc$.

5.45. Fie $x_0 \in (a,b)$. Oricare ar fi șirul $\{x_n\}_{n\in N}$ cu $x_n \to x_0$, $x_n < x_0$, $(\forall) n \in N$, avem

$$0 \leqslant \frac{f(x_0) - f(x_n)}{(x_0 - x_n)^2} \leqslant \frac{f(\alpha) - f(x_0)}{(\alpha - x_0)^2} = A;\ \alpha \in (a,b) \text{ și } \alpha > x_0.$$

Rezultă:

$$0 \leqslant \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \leqslant A(x_0 - x_n).$$

Trecînd la limită, găsim că f este derivabilă la stînga în x_0 și are derivata la stînga în x_0, egală cu 0: $f'_s(x_0) = 0$. Oricare ar fi șirul $\{x_n\}_{n\in N}$, cu $x_n \to x_0$, $x_n > x_0$, $\forall n \in N$, avem:

$$0 \leqslant \frac{f(x_n) - f(x_0)}{(x_n - x_0)^2} \leqslant \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{(\beta - \alpha)^2} = B;\ \ \alpha, \beta \in (a,b),$$

$$\beta > \alpha > x_n,\ (\forall)\, n \in N.$$

De aici deducem că:

$$0 \leqslant \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = B(x_n - x_0).$$

Trecînd la limită găsim că f este derivabilă la dreapta în x_0 și $f'_d(x_0) = 0$. Cum $f'_s(x_0) = f'_d(x_0) = 0$, rezultă că f este derivabilă în x_0 și $f'(x_0) = 0$.

Cum punctul x_0 a fost luat arbitrar, rezultă că f este derivabilă pe (a, b) și $f'(x) = 0$, $\forall x \in (a, b)$.

Rezultă deci că $f(x) = C$, $\forall x \in (a, b)$.

5.46. Relația din enunț se poate exprima astfel:

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |x - y|^2, \qquad (x - y \neq 0)$$

sau

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \leqslant |x - y|, \text{ adică}$$

$$\forall\, x, y \in R, \quad x \neq y, \quad \left|\frac{f(x) - f(y)}{x - y}\right| \leqslant |x - y|. \qquad (1)$$

Fie un punct arbitrar $x_0 \in R$ și X mulțimea șirurilor reale convergente către x_0, adică:

$$X = \{\alpha_n \mid \alpha_n \in R, \lim_{n\to\infty} \alpha_n = x_0\}.$$

Fie un șir $\{x_n\}_{n\in N} \subset X$; conform relației (1) rezultă:

$$\left|\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}\right| \leqslant |x_n - x_0| \quad \text{sau}$$

$$-|x_n - x_0| \leqslant \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \leqslant |x_n - x_0|, \text{ de unde}$$

$$\lim_{n\to\infty} (-|x_n - x_0|) \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \leqslant \lim_{n\to\infty} |x_n - x_0|,$$

adică

$$0 \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \leqslant 0, \text{ deci există}$$

$$f'(x_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = 0.$$ Cum x_0 a fost ales arbitrar, rezultă că $\forall\, x \in R$, f este derivabilă în raport cu x și $f'(x) = 0$, adică $f : R \to R$ este constantă pe R.

5.47. Derivata funcției considerate este $T': R \to R$ dată de legea:

$$T'(x) = [\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)]' =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} [f^{(k+1)}(x) g^{(n-k)}(x) + f^{(k)}(x) g^{(n-k+1)}(x)] =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} f^{(k+1)}(x) g^{(n-k)}(x) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} f^{(k)}(x) g^{(n-k+1)}(x) = (-1)^n f^{(0)}(x) g^{(n+1)}(x) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} f^{(k)}(x) g^{(n-k+1)}(x) \cdot [(-1)^{n-k+1} + (-1)^{n-k}] +$$

$$+ (-1)^0 f^{(n+1)}(x) g^{(0)}(x) = (-1)^n f^{(0)}(x) g^{(n+1)}(x) +$$

$$+ f^{(n+1)}(x) g^{(0)}(x) = 0$$

căci polinoamele f și g avînd gradul n, derivatele lor de ordinul $n+1$ sînt identic nule. De aici rezultă că funcția T este constantă pe R.

În cazul particular cînd $g(t) = \dfrac{(x-t)^n}{n!}$, avem

$g^{(n-k)}(t) = (-1)^{n-k} \dfrac{(x-t)^k}{k!}$; $k = 0, 1, \ldots, n$ de unde rezultă $g^{(n-k)}(x) = 0$; $k = 0, 1, \ldots, n-1$ și $g^{(n)}(x) = (-1)^n$.

T fiind constantă, există egalitatea $T(x) = T(x_0)$ care, folosind rezultatele de mai sus, devine succesiv:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} f^{(k)}(x_0) g^{(n-k)}(x_0)$$

sau

$$(-1)^{2n} \cdot f(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} f^{(k)}(x_0) g^{(n-k)}(x_0),$$

deci

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)^1}{1!} f^{(1)}(x_0) + \ldots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0),$$

adică formula lui Taylor pentru funcția polinomială de gradul n.

5.48. Fie $x_0 \in R$ și X mulțimea șirurilor convergente către x_0, deci $X = \{(x_n)_{n\in N},\ x_n \in R,\ x_n \to x_0\}$.

Avem:

$$0 \leqslant |f(x_n) - f(x_0)| \leqslant M\,|x_n - x_0|\,|x_n - ax_0| \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 0 \leqslant \lim_{n\to\infty} |f(x_n) - f(x_0)| \leqslant 0, \text{ deci } f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$$

și cum $\{x_n\}_{n\in N}$ a fost oarecare în X rezultă că $f(x_0) = \lim_{x\to x_0} f(x)$.

Rezultă că funcția f este continuă pe R.

Pentru $x = ay$ rezultă din relația de condiție

$$0 \leqslant |f(y) - f(ay)| \leqslant M \cdot 0 \Rightarrow f(x) = f(ax).$$

Utilizînd metoda inducției matematice complete, rezultă că $f(x) = f(a^n x)$ pentru orice $n \in N$. Dacă $a = 0$ atunci $f(x) = f(0) = \text{const.}$

Fie $a \neq 0$ și în acest caz putem considera că $y = a^{-1}x$, iar inegalitatea din enunț devine:

$$|f(x) - f(a^{-1}x)| \leqslant M \Rightarrow f(x) = f(a^{-1}x).$$

Prin inducție matematică completă arătăm că

$$f(x) = f(a^{-n}x).$$

Vom arăta că pentru orice $a \in R - \{-1\}$ funcția $f : R \to R$ care verifică inegalitatea din enunț este funcția constantă. Într-adevăr, dacă $a = 0$ atunci $f(x) = 0$. Dacă $a = 1$ atunci avem pentru $x \neq y$:

$$0 \leqslant \left|\frac{f(x) - f(y)}{x - y}\right| \leqslant |x - y|$$

sau

$$0 \leqslant \lim_{x\to y}\left|\frac{f(x) - f(y)}{x - y}\right| \leqslant 0$$

rezultă că $f'(y) = 0$, $(\forall)\ y \in R$ deci $f(x) = k$.

Dacă $|a| < 1$, atunci în egalitatea $f(x) = f(a^n x)$, trecînd la limită pentru $n \to \infty$ și ținînd seama că funcția f este continuă, obținem $f(x) = f(0) = k$. Dacă $|a| > 1$, atunci în egalitatea $f(x) = f(a^{-n}x)$, trecînd la limită pentru $n \to \infty$ și ținînd seama că funcția f este continuă și că $\lim_{n\to\infty} a^{-n} = 0$, obținem $f(x) = f(0) = k$.

Capitolul VI

REPREZENTAREA GRAFICĂ A FUNCȚIILOR

Elemente necesare pentru reprezentarea grafică a funcțiilor.

I. Derivata întîi. Intervale de monotonie. Puncte de extrem. Fie $f: E \subseteq R \to R$ și E' submulțimea lui E pe care f este derivabilă. Avem următoarele rezultate:

1°. Dacă derivata f' este strict pozitivă pe un interval $I \subset E'$, atunci funcția f este strict crescătoare pe I.

2°. Dacă derivata f' este strict negativă pe un interval $I \subset E'$, atunci funcția f este strict descrescătoare pe I.

3°. Dacă derivata f' este continuă și nu se anulează pe un interval $I \subset E'$, atunci funcția f' păstrează același semn pe întreg intervalul I.

Pentru a determina deci intervalele de monotonie, vom proceda în modul următor:

1°. Se determină mulțimea $E' \subset E$ pe care funcția f este derivabilă și se calculează derivata f' pe mulțimea E'.

2°. Se determină punctele din E' în care f' se anulează, adică se rezolvă ecuația

$$f'(x) = 0$$

în mulțimea E'.

3°. Se descompune E în intervale disjuncte, astfel încît pe nici un asemenea interval derivata f' nu se mai anulează.

4°. Se determină semnul derivatei pe fiecare interval pe care derivata f' nu se mai anulează.

5°. În funcție de semnul derivatei pe fiecare interval I, se stabilește dacă funcția f este strict crescătoare sau strict descrescătoare. Punctele de extrem rezultă din:

Fie x_0 un punct interior al mulțimii E, în care funcția f este continuă, și fie I intervalul din E care-l conține pe x_0 și astfel că derivata f' nu se mai anulează pe I, cu excepția, eventual, a lui x_0 (dacă f este derivabilă în x_0).

Dacă pe I funcția f este strict crescătoare la stînga lui x_0 și strict descrescătoare la dreapta lui x_0, atunci x_0 este punct de maxim al funcției.

Dacă pe I funcția f este strict descrescătoare la stînga lui x_0 și strict crescătoare la dreapta lui x_0, atunci x_0 este punct de minim al funcției.

Fie punctul $x_0 \in E$ extremitate stîngă a unui interval $I \subset E$ în interiorul căruia derivata nu se mai anulează și dacă funcția f este continuă în x_0 atunci:

— dacă pe I derivata este negativă, x_0 este punct de maxim,

— dacă pe I derivata este pozitivă, x_0 este punct de minim.

Fie $x_0 \in E$ extremitatea dreaptă a unui interval $I \subseteq E$ în interiorul căruia derivata nu se mai anulează și dacă funcția f este continuă în x_0 atunci:

— dacă pe I derivata este negativă atunci x_0 este punct de minim,

— dacă pe I derivata este pozitivă atunci x_0 este punct de maxim.

Dacă nu cunoaștem semnul derivatei întîi în punctele din jurul lui x_0, putem folosi derivatele de ordin superior ale funcției în x_0 pentru a vedea dacă x_0 este punct de extrem.

Teoremă. Fie $f: I \to R$ o funcție derivabilă de n ori, $n \geqslant 2$ într-un punct $a \in I$, astfel încît

$$f'(a) = 0, f''(a) = 0, \ldots, f^{(n-1)}(a) = 0, f^{(n)}(a) \neq 0, a \in I.$$

1°. Dacă n este par, atunci a este punct de extrem al lui f, adică dacă $f^{(n)}(a) < 0$ atunci a este punct de

maxim, iar dacă $f^{(n)}(a) > 0$, atunci a este punct de minim.

2°. Dacă n este impar, iar a este un punct interior al intervalului I, atunci a nu este punct de extrem al funcției f.

II. Convexitate. Concavitate. Derivata a doua. Puncte de inflexiune. Fie f o funcție definită pe un interval I și derivabilă pe I.

Definiție. Spunem că funcția f este convexă pe intervalul I, dacă tangenta în orice punct al graficului se află sub grafic.

Definiție. Spunem că funcția f este concavă pe intervalul I dacă tangenta dusă în orice punct al graficului se află deasupra graficului.

Fie f o funcție derivabilă de două ori pe I.

Teorema 1. Dacă derivata a doua f'' este pozitivă pe I, atunci funcția f este convexă pe I.

Teorema 2. Dacă derivata a doua f'' este negativă pe I, atunci funcția f este concavă pe I. Fie $f : I \to R$ și x_0 un punct interior al lui I.

Definiție. Se spune că punctul interior $x_0 \in I$ este punct de inflexiune al funcției f, dacă funcția are derivată în punctul x_0 și dacă funcția f este convexă de o parte a lui x_0 și concavă de cealaltă parte a lui x_0.

Pentru a determina intervalele pe care o funcție este convexă sau concavă procedăm în modul următor:

1°. Se calculează derivata a doua.

2°. Se determină soluțiile ecuației

$$f''(x) = 0.$$

3°. Se determină intervalele în care derivata a doua păstrează semn constant. Punctele de inflexiune ale graficului unei funcții se determină ținînd seamă că în aceste puncte f' există atît de o parte cît și de alta a acestor puncte, iar derivata a doua are semne diferite.

Punctele de inflexiune în care derivata a doua se anulează se pot identifica fără a studia semnul derivatei a doua în jurul acestor puncte, ci semnul derivatelor succesive numai în aceste puncte.

Teoremă. Fie f o funcție derivabilă de n ori într-un punct interior a al unui interval I. Dacă:

$$f'(a) = 0,\ f''(a) = 0, \ldots,\ f^{(n)}(a) \neq 0 \quad n \geqslant 3$$

și n este impar, atunci a este punct de inflexiune al funcției.

Corolar. Dacă într-un punct interior $a \in I$ avem:

$$f'(a) = 0,\ f''(a) = 0,\ f'''(a) \neq 0$$

atunci a este punct de inflexiune al funcției f.

III. Asimptote. Dreapta $y = mx + n$ este asimptotă la ramura spre $+\infty$ a graficului $f: [a, +\infty) \to R$ dată de legea $y = f(x)$ dacă

$$\lim_{x \to \infty} [f(x) - mx - n] = 0.$$

Dreapta $y = m'x + n'$ este asimptotă la ramura spre $-\infty$ a graficului funcției $f: (-\infty, b] \to R$, dată de legea $y = f(x)$ dacă

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - m'x - n'] = 0$$

Coeficienții m, n, m', n' se determină din formulele

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}; \quad n = \lim_{x \to \infty} [f(x) - mx].$$

$$m' = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}; \quad n' = \lim_{x \to -\infty} [f(x) - m'x].$$

Asimptotele de ecuație $y = mx + n$ se numesc *asimptote oblice* unde $m \neq 0, \infty$.

Fie $f : E \to R$ și a punct de acumulare al mulțimii E. Dreapta $x = a$ este *asimptotă verticală* la graficul funcției f dacă cel puțin una din limitele laterale:

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x),\ \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$$

este infinită.

Pentru trasarea graficului unei funcții trebuie parcurse următoarele etape:

1°. Aflarea domeniului maxim de definiție, dacă nu este specificat.

2°. Se calculează $f(0)$ dacă zero aparține domeniului de definiție. În punctul $(0, f(0))$ graficul taie axa Oy.

3°. Se rezolvă ecuația $f(x) = 0$ și soluțiile, dacă există, reprezintă abscisele punctelor de intersecție ale graficului cu axa Ox.

4°. Se calculează $\lim_{x \to a} f(x)$ și $\lim_{x \to b} f(x)$ unde a, b sînt extremități de intervale care reunite formează domeniul de definiție.

5°. Se determină mulțimea în care funcția este derivabilă, se calculează derivata, se rezolvă ecuația $f'(x) = 0$, se determină semnul derivatei întîia pe subintervale. Se stabilesc eventualele puncte de extrem.

6°. Se determină mulțimea în care funcția este derivabilă de două ori, se calculează derivata a doua, se rezolvă ecuația $f''(x) = 0$, se determină semnul derivatei a doua pe subintervale. Se stabilesc eventualele puncte de inflexiune.

7°. Se determină asimptotele, dacă este cazul.

8°. Se alcătuiește tabloul de variație al funcției. Tabloul are linii orizontale. În linia întîi se trec valorile remarcabile ale argumentului și domeniul de definiție al funcției.

În linia a doua se trec rezultatele privind derivata întîi (semnul și 0 (zero) în dreptul rădăcinilor derivatei întîi). În linia a treia se trec valorile funcției corespunzătoare valorilor remarcabile ale argumentului și se marchează monotonia funcției.

În linia a patra se trec rezultatele privind derivata a doua (semnul și 0 (zero) în dreptul rădăcinilor derivatei a doua).

Se trasează graficul ținînd seama de datele tabloului de variație și de asimptote.

Pentru ca graficul să fie cît mai corect trasat, este bine să cunoaștem în cît mai multe puncte ale graficului poziția tangentelor în aceste puncte.

PROBLEME

6.1. Să se reprezinte grafic funcția

$$f(x) = \sin x \cdot (1 + \cos x).$$

6.2. Să se reprezinte grafic funcția

$$f(x) = \cos 2x + 2 \cos x + 1.$$

6.3. Să se reprezinte grafic funcția

$$f(x) = \cos x \cdot \cos 2x.$$

6.4. Să se reprezinte grafic funcția

$$f(x) = 2 \cos^2 x + \sin 2x.$$

6.5. Să se reprezinte grafic funcția

$$f(x) = 2 \sin x + \cos 2x + \frac{1}{2}.$$

6.6. Să se reprezinte grafic funcția

$$f(x) = \sin x(\sin x - 1).$$

6.7. Să se reprezinte grafic funcția

$$f(x) = \sin x \cdot \cos^3 x.$$

6.8. Să se reprezinte grafic funcția

$$f(x) = \cos x \cdot (1 - \cos x).$$

6.9. Să se reprezinte grafic funcția $f: R \to R$ dată de legea

$$f(x) = \sin x \cdot \sqrt{\cos^2 x}.$$

(*C. Ionescu-Țiu*, G.M.B., 14108, 1974)

6.10. Să se reprezinte grafic funcția

$$f(x) = \cos^3 x - 3\cos x + 2.$$

6.11. Să se reprezinte grafic funcția

$$f(x) = 2\sin 3x + 6\sin x - 3\cos 2x.$$

6.12. Să se reprezinte grafic funcția

$$f(x) = \frac{\sin x + \sin 3x}{\sqrt{1 + \cos 2x}} + \frac{\cos x - \cos 3x}{\sqrt{1 - \cos 2x}}.$$

(*C. Ionescu-Țiu*, G.M.B., 13101, 1973)

6.13. Să se reprezinte grafic funcția

$$f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 1}{2x^2 - 1}.$$

6.14. Să se reprezinte grafic funcția

$$f(x) = \frac{(x+1)^3}{x^2 - x + 1}.$$

6.15. Să se reprezinte grafic funcția

$$f(x) = \frac{3x + |x^2 - 4|}{|x - 2|}.$$

(Admitere, Institutul politehnic, București, 1972)

6.16. Să se reprezinte grafic funcția

$$f(x) = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}.$$

6.17. Să se reprezinte grafic funcția

$$f(x) = \frac{x(x-3)}{x^2 - 2x + 2}.$$

6.18. Să se reprezinte grafic funcția

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x + 1}{x^2 - x + 1}.$$

6.19. Să se reprezinte grafic funcția

$$f(x) = \frac{1 - 4x}{x^2 - 2x + 2}.$$

6.20. Să se reprezinte graficul funcției

$$f(x) = \frac{x}{1 + |x|} \quad \text{și al funcției } \overset{-1}{f}(x).$$

6.21. a) Să se reprezinte grafic funcția

$$f(x) = 4x^3 - 3x.$$

b) Să se discute rădăcinile ecuației $4x^3 - 3x - m = 0$, $m \in R$.

6.22. Să se reprezinte grafic funcția

$$f(x) = |(x + |x|)^2 - x^2 \cdot |x||.$$

6.23. Să se reprezinte grafic funcția

$$f(x) = \frac{|x| \cdot (x + 1) + x \cdot |x + 1|}{x(x + 2)}.$$

6.24. Să se reprezinte grafic funcția

$$f(x) = 3x^2 + \frac{2}{x^3}.$$

6.25. Să se reprezinte grafic funcția

$$f(x) = |x| + |2x - x^2|.$$

6.26. Să se reprezinte grafic funcția

$$f(x) = |x - 1| + \frac{1}{x}.$$

6.27. Să se reprezinte grafic funcția

$$f(x) = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x}.$$

6.28. Să se reprezinte grafic funcția

$$f(x) = \left|\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right|.$$

6.29. Să se reprezinte grafic funcția

$$f(x) = \frac{(x-1)^2 \cdot (x+2)}{x^2}.$$

6.30. Să se reprezinte grafic funcția

$$f(x) = \frac{2(x-1)}{x^2 - 3x + 2}.$$

6.31. Să se reprezinte grafic funcția

$$f(x) = \frac{x^4 + 2}{2x^2 + 1}.$$

6.32. Să se reprezinte grafic funcțiile

$$f(x) = \frac{\sqrt{3x+1}}{x} \text{ și } g(x) = -\frac{\sqrt{3x+1}}{x}.$$

6.33. Să se reprezinte grafic funcția

$$f(x) = x \cdot \sqrt{\frac{|x| - 1}{|x|}}.$$

6.34. a). Să se studieze variația funcției reale

$$f(x) = x^2 - \sqrt{x^2 - 2x + 1}.$$

b). Să se construiască graficul respectiv și să se scrie ecuațiile tangentelor la curbă în punctul de abscisă $x = 1$.

6.35. Să se reprezinte grafic funcția

$$f(x) = x + \sqrt{|1 - x^2|}.$$

6.36. Să se reprezinte grafic funcția

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2} \cdot \sqrt{x + 2}.$$

6.37. Să se reprezinte grafic funcția

$$f(x) = (x+1)\cdot\sqrt{x+2}.$$

6.38. Să se reprezinte grafic funcția

$$f(x) = \sqrt{x^2+4x+29} - \sqrt{x^2-2x+2}.$$

(*C. Ionescu-Țiu*, G.M.B., 14386, 1974)

6.39. Să se reprezinte grafic funcția

$$f(x) = x - \sqrt{9+6x-3x^2}.$$

6.40. Să se reprezinte grafic funcția

$$f(x) = \sqrt{x+4-4\sqrt{x}} + \sqrt{x+9-6\sqrt{x}}.$$

6.41. Să se reprezinte grafic funcția

$$f(x) = \frac{b}{a}\sqrt[3]{a^3-x^3},\ \text{unde}\ 0 < b < 2a.$$

6.42. Să se reprezinte grafic funcția

$$f(x) = \frac{1}{\ln x}.$$

6.43. Să se reprezinte grafic funcția

$$f(x) = 2\ln|x+2|.$$

6.44. Să se reprezinte grafic funcția

$$f(x) = \frac{2x}{1-x^2} + \ln\frac{1+x}{1-x}.$$

6.45. Să se reprezinte grafic funcția

$$f(x) = \ln\frac{e^x+1}{2}.$$

6.46. Să se reprezinte grafic funcția

$$f(x) = \frac{2+e^x}{1+e^x}$$

și să se arate că admite un centru de simetrie.

6.47. Să se reprezinte grafic funcția

$$f(x) = x - 2 - 2 \ln |x|.$$

6.48. Să se reprezinte grafic funcția

$$f(x) = \arcsin \frac{x}{\sqrt{2(x^2 + 2x + 2)}}.$$

6.49. Să se reprezinte grafic funcția

$$f(x) = \arcsin x - x \cdot \sqrt{1 - x^2}.$$

pe intervalul $[-1, 1]$.

6.50. Să se reprezinte grafic funcția

$$f(x) = \frac{\sin x}{2 - \cos x}.$$

6.51. Să se reprezinte grafic funcția

$$f(x) = \frac{1 - \cos^2 x}{(\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)}.$$

6.52. Să se reprezinte grafic funcția

$$f(x) = \frac{\sin 3x}{\sin x}.$$

6.53. Să se reprezinte grafic funcția

$$f(x) = \frac{\cos x}{\cos 2x}.$$

6.54. Să se reprezinte grafic funcția

$$f(x) = x^x \text{ pentru } x > 0.$$

6.55. Să se reprezinte grafic funcția

$$f(x) = \frac{1 - \sin x}{1 - \cos x}.$$

SOLUȚII

6.1. Funcția f este definită pentru orice $x \in R$, are perioada 2π și graficul ei este simetric față de origine căci $f(x) = -f(-x)$.

Vom studia funcția pe intervalul $[0, \pi]$.

Intersecția cu axa Ox are loc în punctele $x = 0$ și $x = \pi$.

Derivata întîi este $f'(x) = 2\cos^2 x + \cos x - 1 = (\cos x + 1)(2\cos x - 1)$. Ea se anulează pentru $x = \frac{\pi}{3}$ și $x = \pi$. Primul dintre ele este un punct de maxim, valoarea maximului fiind $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$.

Derivata a doua este dată de $f''(x) = -\sin x(4\cos x + 1)$. Ea se anulează în interiorul intervalului $(0, \pi)$ în punctul $x = \pi - \arccos\frac{1}{4}$, un punct de inflexiune.

Tabloul de variație:

x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\pi - \arccos\frac{1}{4}$		π
$f'(x)$	2	+	0	—		—	0
$f(x)$	0	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↘	$\frac{3\sqrt{15}}{16}$	↘	0
$f''(x)$	0	—	(M)	—	0 (i)	+	0

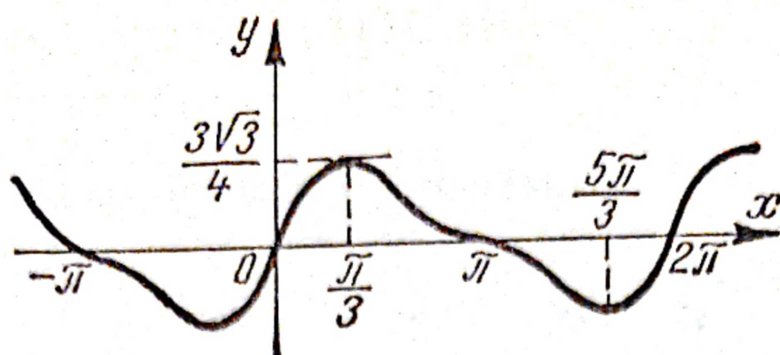


Fig. 6.1.

6.2. Funcția f este definită pentru orice $x \in R$, are perioada 2π, iar graficul ei este simetric față de axa Oy căci $f(x) = f(-x)$. Vom studia funcția pentru $x \in [0, \pi]$.

Intersecția cu axa Oy este $(0, 4)$, iar cea cu axa Ox se face în punctele $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ și $(\pi, 0)$.

Derivata întîi este $f'(x) = -2 \sin x(2 \cos x + 1)$, $x \in [0, \pi]$.

Ea se anulează pentru $x = 0$, $x = \frac{2\pi}{3}$ și $x = \pi$. Pentru $x = \frac{2\pi}{3}$ se obține minimul $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$.

Derivata a doua $f''(x) = -2[4 \cos^2 x + \cos x - 2]$ se anulează pentru $x_1 = \arccos \frac{\sqrt{33} - 1}{8}$ și $x_2 = \pi - \arccos \frac{\sqrt{33} + 1}{8}$. Ambele sînt puncte de inflexiune.

Tabloul de variație:

x	0	x_1	$\frac{\pi}{2}$		$\frac{2\pi}{3}$	x_2	π
$f'(x)$	0	$-$		$-$	0	$+$	0
$f(x)$	4	↘	0	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	0
$f''(x)$	$-$	0 (i)	$+$		$+$ (m)	0 (i)	$-$

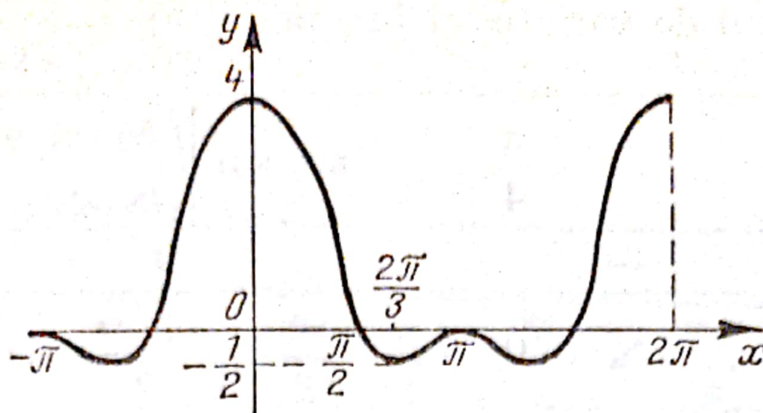


Fig. 6.2.

6.3. Funcția este definită pentru orice $x \in R$, are perioada 2π și este simetrică față de axa Oy, căci $f(x) = f(-x)$. Se mai observă că pe intervalul $[0, \pi]$, punctul de pe curbă de abscisă $x = \frac{\pi}{2}$ este centrul de simetrie al curbei deoarece $f(x) = -f(\pi - x)$. Vom studia funcția pe intervalul $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Intersecția cu axa Oy este $(0, 1)$, iar cu axa Ox graficul funcției se intersectează în punctele $\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$ și $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

Deoarece $f(x) = \frac{1}{2}(\cos 3x + \cos x)$, derivata întîi va fi $f'(x) = 6 \sin x \cdot \left(\sin^2 x - \frac{5}{6}\right)$. Ea se anulează pentru $x = 0$ și $x = \arcsin \sqrt{\frac{5}{6}} \approx 1{,}15$ radiani, cînd $f(x)$ admite un minim pe intervalul $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Valoarea minimului este: $-\frac{\sqrt{6}}{9} \approx 0{,}41$.

Tabloul de variație al funcției este:

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\arcsin\sqrt{\frac{5}{6}}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{\sqrt{6}}{5}$ (m)	$\nearrow$	0

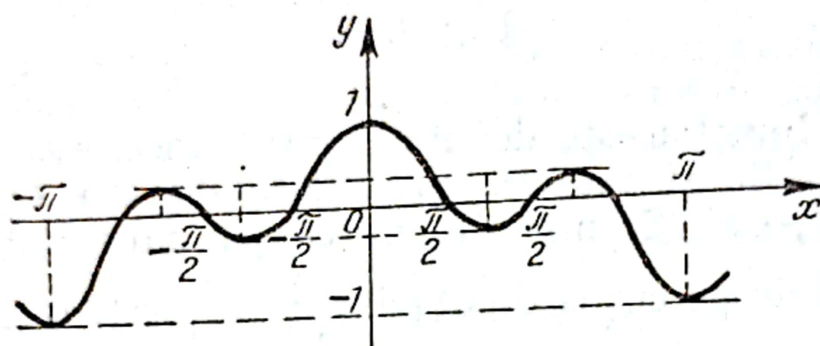


Fig. 6.3.

6.4. Domeniul de definiție al funcției este R. Deoarece $f(x) = f(x + \pi)$, funcția este periodică cu perioada π. Vom studia funcția pe intervalul $[0, \pi]$. Intersecția cu axa Oy este $(0, 2)$, iar intersecțiile cu axa Ox se fac cînd:

$$2\cos^2 x + \sin 2x = 0 \Leftrightarrow 1 + \cos 2x + \sin 2x = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2}\left[\frac{\sqrt{2}}{2} + \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)\right] = 0.$$

Deci $f(x) = 0$, pentru $x = \frac{\pi}{2}$ și pentru $x = \frac{3\pi}{4}$. Avem $f(\pi) = 2$.

Derivata întîi este $f'(x) = 2(\cos 2x - \sin 2x)$. Ea se anulează pentru $x \in [0, \pi]$ în punctele $x = \frac{\pi}{8}$ și $x = \frac{5\pi}{8}$. Primul este un punct de maxim, al doilea de minim. Derivata a doua, $f''(x) = -4\sqrt{2} \cdot \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$,

se anulează pentru $x = \frac{3\pi}{8}$ și $x = \frac{7\pi}{8}$. Acestea sînt puncte de inflexiune.

Tabloul de variație:

x	0		$\frac{\pi}{8}$		$\frac{3\pi}{8}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{8}$		$\frac{3\pi}{4}$		$\frac{7\pi}{8}$		π
$f'(x)$	2		0		$-$		$-$		0		$+$		$+$		2
$f(x)$	2	↗	$1+\sqrt{2}$	↘	1	↘	0	↘	$1-\sqrt{2}$	↗	0	↗	1	↗	2
$f''(x)$	$-$		$-$ (M)		0 (i)		$+$		$+$ (m)		$+$		0 (i)		$-$

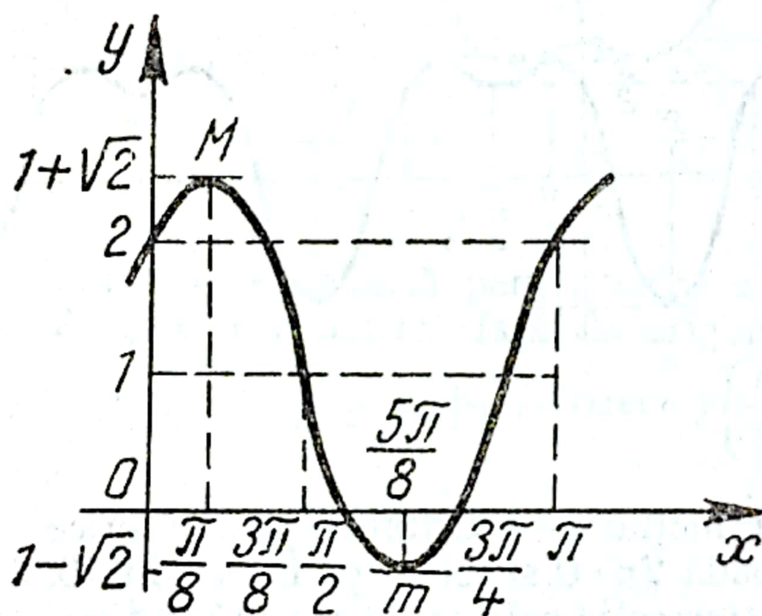


Fig. 6.4.

6.5. Funcția este definită pentru orice $x \in R$ și are perioada 2π. O vom studia pe intervalul $[-\pi, \pi]$.

Derivata întîi $f'(x) = 2\cos x(1 - 2\sin x)$ se anulează pentru $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{\pi}{2}$ și $x = \frac{5\pi}{6}$. Toate sînt puncte de extrem.

Derivata a doua $f''(x) = 2(4\sin^2 x - \sin x - 2)$ se anulează de 4 ori în intervalul $[-\pi, \pi]$. Toate sînt puncte de inflexiune.

Tabloul de variație al funcției este:

x	$-\pi$		$-\dfrac{\pi}{2}$		$\dfrac{\pi}{6}$		$\dfrac{\pi}{2}$		$\dfrac{5\pi}{6}$		π
$f'(x)$	-2	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	-2
$f(x)$	$\dfrac{3}{2}$	↘	$-\dfrac{5}{2}$	↗	2	↘	$\dfrac{3}{2}$	↗	2	↘	$\dfrac{3}{2}$

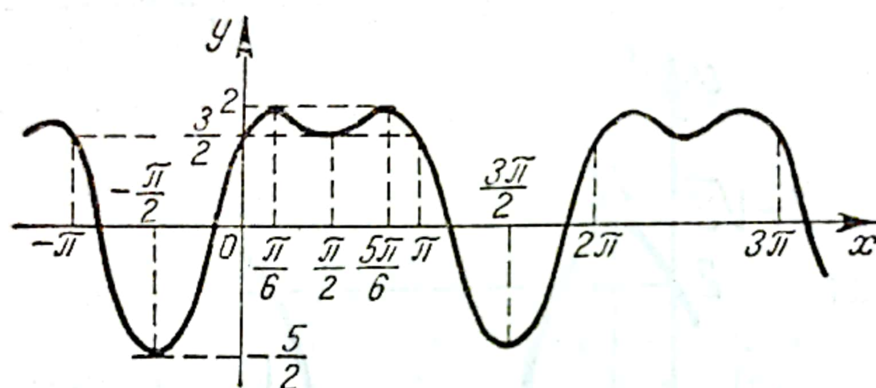


Fig. 6.5.

6.6. Funcția este definită pentru orice $x \in R$ și are perioada $2\pi \cdot 0$ studiem pe intervalul $[0, 2\pi]$. Punctele de intersecție cu axa Ox rezultă din ecuația $f(x) = \sin x(\sin x - 1) = 0$. Ele sînt $(0, 0)$, $\left(\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$, $(\pi, 0)$ și $(2\pi, 0)$.

Derivata întîi $f'(x) = \cos x\,(2 \sin x - 1)$ se anulează în punctele $x = \dfrac{\pi}{2}$, $x = \dfrac{3\pi}{2}$, $x = \dfrac{\pi}{6}$ și $x = \dfrac{5\pi}{6}$. Toate sînt puncte de extrem.

Derivata a doua este $f''(x) = -4 \sin^2 x + \sin x + 2$, $x \in [0, 2\pi]$. Se observă imediat că ea are 4 zerouri în intervalul considerat și aceste zerouri sînt puncte de inflexiune.

Tabloul de variație al funcției:

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{6}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$f'(x)$	-1	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	-1
$f(x)$	0	↘	$-\frac{1}{4}$	↗	0	↘	$-\frac{1}{4}$	↗	0	↗	2	↘	0

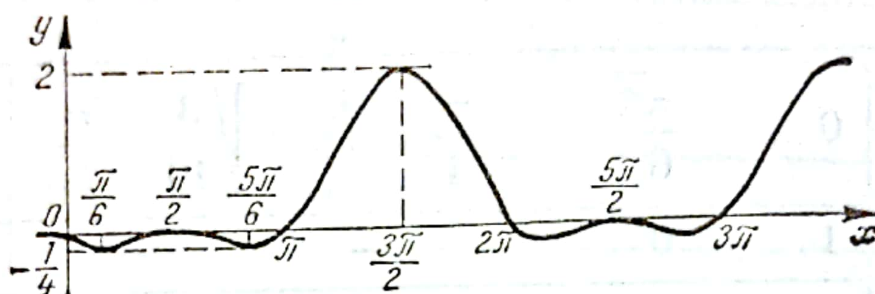


Fig. 6.6

6.7. Funcția este definită pentru orice $x \in R$, are perioada 2π și este simetrică față de originea axelor, căci $f(x) = -f(-x)$. Mai mult, deoarece $f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -f\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ funcția admite ca centru de simetrie punctul de abscisă $\frac{\pi}{2}\cdot$ Din cele de mai sus rezultă că este suficient să studiem graficul funcției f pe intervalul $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Avem $f(0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ și $f(x) > 0$, pentru $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\cdot$ Derivata întîi $f'(x) = \cos^2 x(\cos^2 x - 3\sin^2 x)$ se anulează în intervalul considerat $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ în punctele de abscisă $x = \frac{\pi}{6}$ și $x = \frac{\pi}{2}\cdot$ Derivata a doua este $f''(x) = -\sin x \cos x \ (10 \cos^2 x - 3)$. Ea

se anulează pentru $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ și $x = \arccos\sqrt{\frac{3}{10}}$, un unghi cuprins între $\frac{\pi}{4}$ și $\frac{\pi}{3}$. Acestea sînt puncte de inflexiune.

Tabloul de variație al funcției pe intervalul $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ este:

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{4}$		$\arccos\sqrt{\frac{3}{10}}$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	1	+	0	—		—		—			0
$f(x)$	0	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{16}$	↘	$\frac{1}{4}$	↘			$\frac{\sqrt{3}}{16}$	↘	0
$f''(x)$	0 (i)		—				0 (i)		+		0 (i)

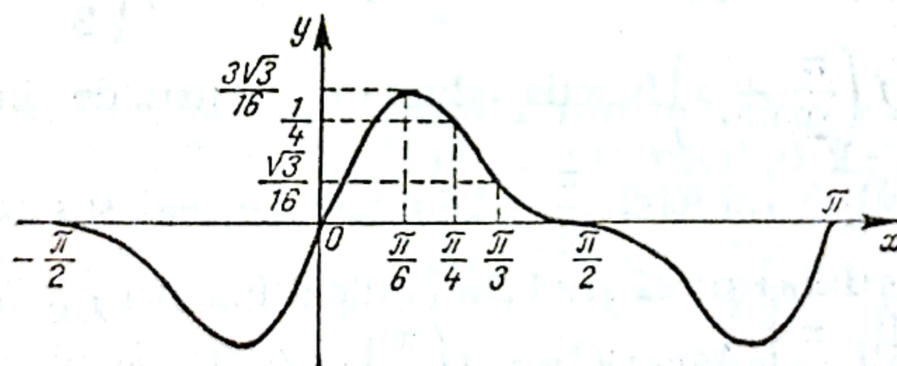


Fig. 6.7.

6.8. Funcția este definită pentru orice $x \in R$, are perioada 2π și este simetrică față de axa Oy, căci $f(x) = f(-x)$. O vom studia pe intervalul $[0, \pi]$. Intersecțiile cu axa Ox se obțin cînd $\cos x\,(1 - \cos x) = 0$, deci pentru $x = 0$, și $x = \frac{\pi}{2}$. Avem $f(\pi) = -2$.

Derivata întîi $f'(x) = \sin x\,(2\cos x - 1)$ se anulează în intervalul considerat cînd $x = 0$, $x = \frac{\pi}{3}$ și $x = \pi$. Toate sînt puncte de extrem. Deoarece $f''(x) = 4\cos^2 x - \cos x - 2$ se anulează de două ori în intervalul $[0, \pi]$, există două puncte de inflexiune în intervalele $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ și $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

Tabloul de variație al funcției studiate mai sus este:

x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$		π
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	0	$\searrow$	-2

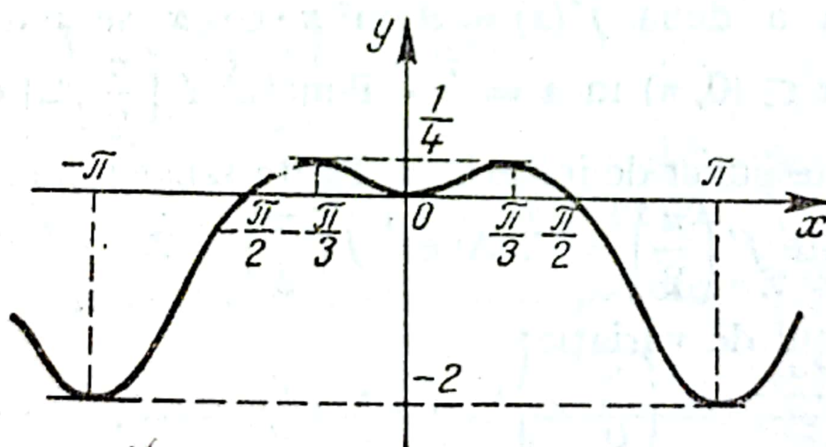


Fig. 6.8.

6.9. Deoarece $\sqrt{\cos^2 x} = |\cos x| \geqslant 0$, $f(x) \geqslant 0$ pentru $x \in [0, \pi]$ și deci

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\,|\sin 2x| & \text{dacă } x \in [0, \pi] \\ -\frac{1}{2}\,|\sin 2x| & \text{dacă } x \in [\pi, 2\pi]. \end{cases}$$

Perioada funcției fiind 2π, obținem graficul următor (Fig. 6.9).

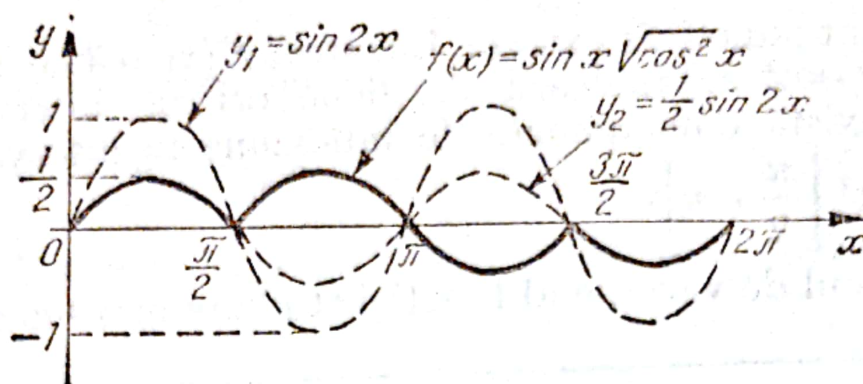


Fig. 6.9.

6.10. Funcția f este definită pe R. Cum $f(x) = f(-x)$ (deci funcția este simetrică față de axa Oy) și are perioada 2π, vom studia funcția doar pe intervalul $[0, \pi]$.

Avem $f'(x) = -3\cos^2 x \cdot \sin x + 3 \sin x = 3 \sin^3 x$, deci pe intervalul $[0, \pi]$ funcția f este crescătoare. Apoi $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ și $x = \pi$, cînd $f(0) = 0$ și $f(\pi) = 4$. Derivata a doua $f''(x) = 9 \sin^2 x \cdot \cos x$ se anulează pentru $x \in (0, \pi)$ în $x = \frac{\pi}{2}$. Punctul $I\left(\frac{\pi}{2}, 2\right)$ de pe grafic este punct de inflexiune. Panta tangentei în acest punct este $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$. Avem $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$.

Tabloul de variație:

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$f'(x)$	0	+		+	0
$f(x)$	0	↗	2	↗	4
$f''(x)$	−	−	0 (i)	+	+

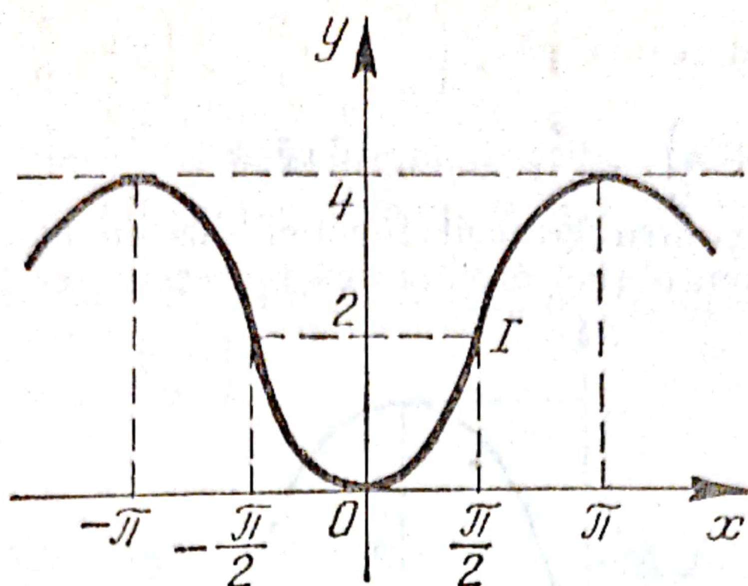


Fig. 6.10.

6.11. Funcția este definită pe R și are perioada 2π. Cum $f(x) = f(\pi - x)$ (deci are axe de simetrie), o vom studia numai pe intervalul $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Avem $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$ și $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 7$.

Derivata întîi este:

$$f'(x) = 6\cos 3x + 6\cos x + 6\sin 2x =$$

$12\cos x\,(-2\sin^2 x + \sin x + 1) = 12\cos x\,(1 - \sin x)\cdot$ $\cdot(1 + 2\sin x)$. Ea se anulează în punctele $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = -\frac{\pi}{6}$ și $x = \frac{\pi}{2}$. Avem $f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{13}{2}$.

Tabloul de variație al funcției este următorul:

x	$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	0	—	0	+	0
$f(x)$	-1	↘	$-\frac{13}{2}$	↗	7

Ținînd seama că $f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=f\left(\pi-\frac{\pi}{2}+x\right)=$ $=f\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$, adică de faptul că $x=\frac{\pi}{2}$ este axă de simetrie pentru graficul funcției din enunț (definită pe R), vom obține următoarea reprezentare: fig. 6.11.

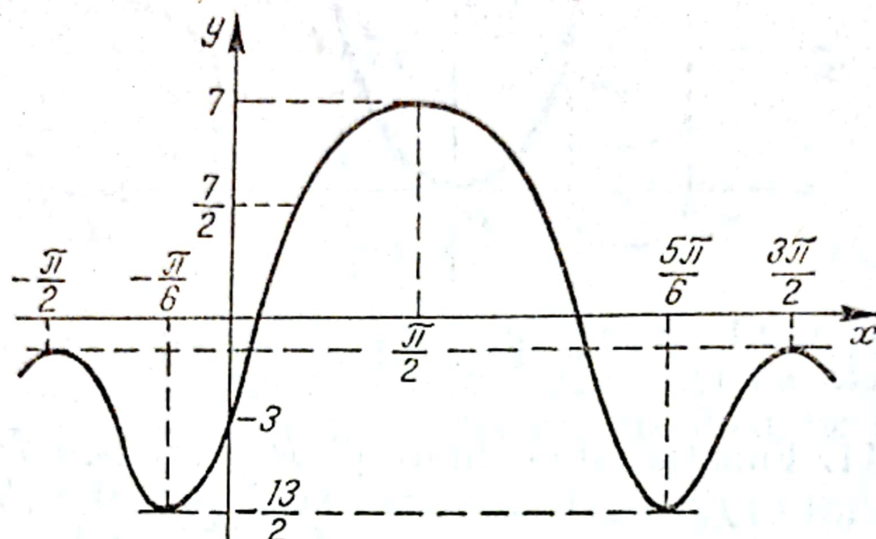


Fig. 6.11.

6.12. Perioada funcției este 2π iar pe intervalul $[0, 2\pi]$ (în care o vom studia) legea ei se mai scrie

$$f(x)=\frac{2\sin x\cos x}{\sqrt{2}\cdot|\cos x|}+\frac{2\sin 2x\sin x}{\sqrt{2}\cdot|\sin x|},\quad \text{deci}$$

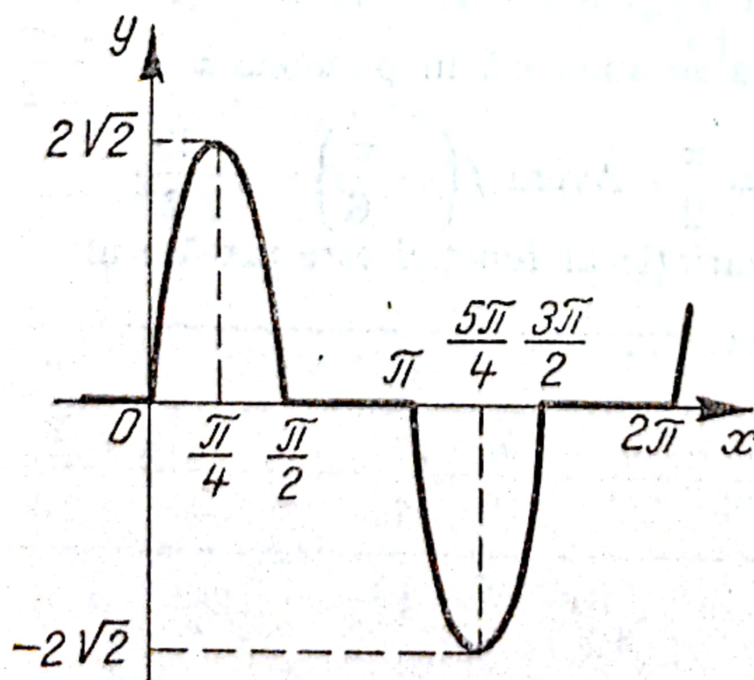


Fig. 6.12.

$$f(x)=\begin{cases}2\sqrt{2}\sin 2x \text{ pentru } x\in[0,\pi/2)\\ 0 \text{ pentru } x\in[\pi/2,\pi)\\ -2\sqrt{2}\sin 2x \text{ pentru } x\in[\pi,3\pi/2)\\ 0 \text{ pentru } x\in[3\pi/2,2\pi].\end{cases}$$

6.13. Funcția este definită pe mulțimea $R - \left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$.

Avem:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty,\quad \lim_{\substack{x\to-\frac{\sqrt{2}}{2}\\ x<-\frac{\sqrt{2}}{2}}} f(x)=+\infty,\quad \lim_{\substack{x\to-\frac{\sqrt{2}}{2}\\ x>-\frac{\sqrt{2}}{2}}} f(x)=-\infty.$$

$\lim\limits_{\substack{x\to\sqrt{2}/2\\ x<\sqrt{2}/2}} f(x)=-\infty$ și $\lim\limits_{\substack{x\to\sqrt{2}/2\\ x>\sqrt{2}/2}} f(x)=+\infty$. Rezultă că $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ și $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ sînt asimptote verticale. Intersecția cu Ox este $x_1\in(-4,-3)$. Derivata întîi, $f'(x)=\frac{x(x-2)(2x^2+4x+5)}{(2x^2-1)^2}$, se anulează pentru $x=0$ și $x=2$. Primul este un punct de maxim, al doilea de minim. Deoarece $m=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\frac{1}{2}$ și $n=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-\frac{x}{2}\right]=\frac{3}{2}$, dreapta $y=\frac{x}{2}+\frac{3}{2}$ este asimptotă oblică atît la ramura spre $-\infty$ cît și la ramura spre $+\infty$.

Observare. Să constatăm dacă curba trece pe deasupra sau pe dedesubtul asimptotei oblice, cînd $x\to-\infty$ și $x\to+\infty$. Deoarece $f(x)-\frac{x+3}{2}=\frac{x+5}{2(2x^2-1)}$ se anulează pentru $x=-5$, rezultă că graficul taie asimptota în punctul $(-5,-1)$. Pentru $x<-5$ curba este sub asimptotă, iar pentru $x>-5$ curba este deasupra asimptotei.

Tabloul de variație al funcției este:

x	$-\infty \quad -5 \quad x_1 \quad -1 \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad 0 \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \quad 1 \quad 2 \quad +\infty$
$f'(x)$	$+ \;\vdots\; + \;\vdots\; + \;\vdots\; + \;\Big|\; + \; 0 \; - \;\Big|\; - \;\vdots\; - \; 0 \; + \; +$
$f(x)$	$-\infty \nearrow -1 \nearrow 0 \nearrow 3 \nearrow \;\Big|\; \nearrow -1 \searrow \;\Big|\; \searrow 5 \searrow 3 \nearrow +\infty$

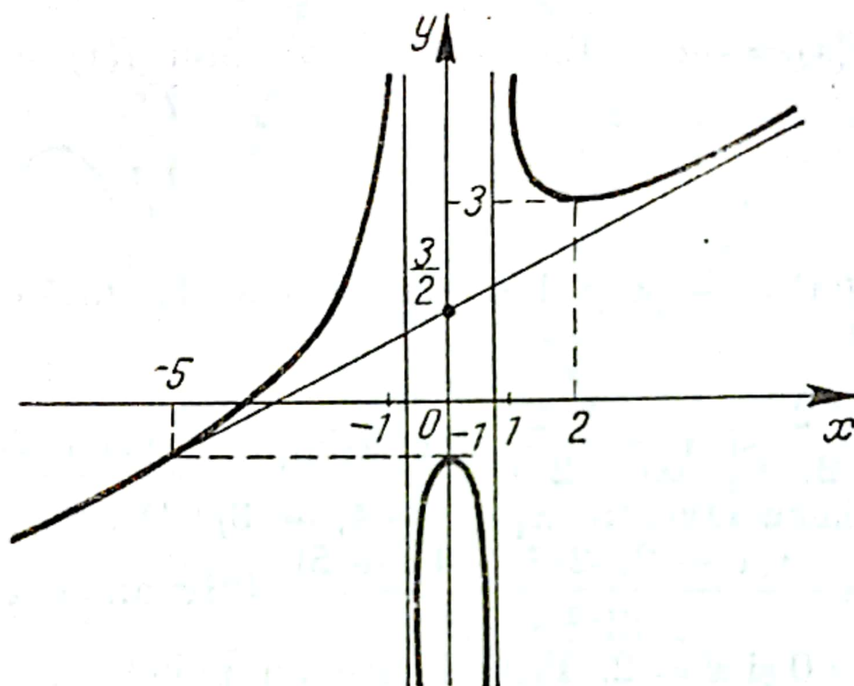


Fig. 6.13.

6.14. Domeniul de definiție al funcției este R.

Avem:

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \infty$ și $f(x) = 0$ pentru $x = -1$. Intersecția cu axa Oy este $(0, 1)$. Derivata întîi $f'(x) = \frac{(x^2 - x - 2)^2}{(x^2 - x + 1)^2}$ se anulează pentru $x = -1$ și $x = 2$.

Derivata a doua este $f''(x) = \frac{6(2x - 1)(x^2 - x - 2)}{(x^2 - x + 1)^3}$.

Ea se anulează pentru $x = \frac{1}{2}$, $x = -1$ și $x = 2$. Toate trei sînt puncte de inflexiune. Graficul admite asimptota oblică $y = x + 4$. Deoarece $f(x) - (x + 4) = \frac{6x - 3}{x^2 - x + 1}$ se anulează pentru $x = \frac{1}{2}$, rezultă că asimptota taie graficul în punctul $\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{2}\right)$. Pentru $x < \frac{1}{2}$ asimptota se află deasupra graficului, iar pentru $x > \frac{1}{2}$ asimptota se găsește sub grafic.

Tabloul de variație:

x	$-\infty$		-1		0		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$4{,}5$	$\nearrow$	9	$\nearrow$	$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0		$+$		0	$-$	0	$+$	

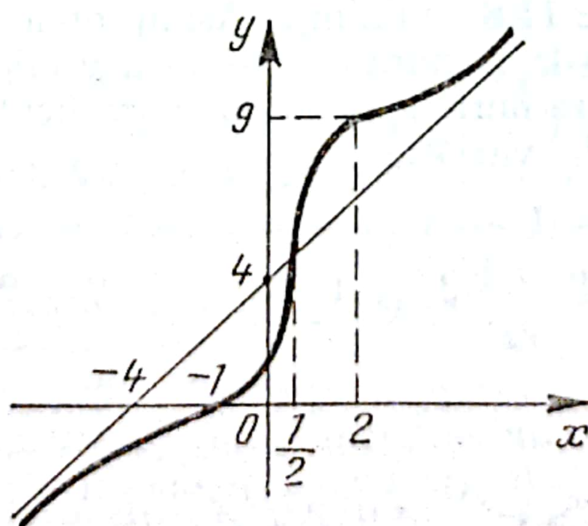


Fig. 6.14.

6.15. Domeniul de definiție al funcției este $R - \{2\}$, iar legea funcției se mai poate scrie

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + 3x - 4}{2 - x}, & \text{pentru } x \leqslant -2 \\ \dfrac{x^2 - 3x - 4}{x - 2}, & \text{pentru } x \in (-2, 2) \\ \dfrac{x^2 + 3x - 4}{x - 2}, & \text{pentru } x > 2 \end{cases}$$

De aici rezultă că

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty, \quad f(-4) = 0, \quad f(-2) = \frac{-3}{2},$$

$$\lim_{x \to 2} f(x) = +\infty, \ f(0) = 2 \text{ și } \lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty.$$

Derivata întîi este dată de legea

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-x^2 + 4x + 2}{(2 - x)^2}, & \text{pentru } x < -2, \\ \dfrac{x^2 - 4x + 10}{(x - 2)^2}, & \text{pentru } x \in (-2, 2), \\ \dfrac{x^2 - 4x - 2}{(x - 2)^2}, & \text{pentru } x > 2. \end{cases}$$

Ecuația $f'(x) = 0$ admite soluția $x = 2 + \sqrt{6}$, cînd $f(2 + \sqrt{6}) \approx 11{,}8$ (minim). Asimptotele oblice sînt $y = -x - 5$ la ramura spre $-\infty$ a graficului și $y = x + 5$ la ramura spre $+\infty$ a graficului.

Tabloul de variație:

x	$-\infty$		-4		-2	-1	0		2		$2 + \sqrt{6}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$-$	$+$	$+$	$+$			$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{3}{2}$ $\nearrow$	0 $\nearrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$ | $+\infty$	$\searrow$	$11{,}8$ (m)	$\nearrow$	$+\infty$

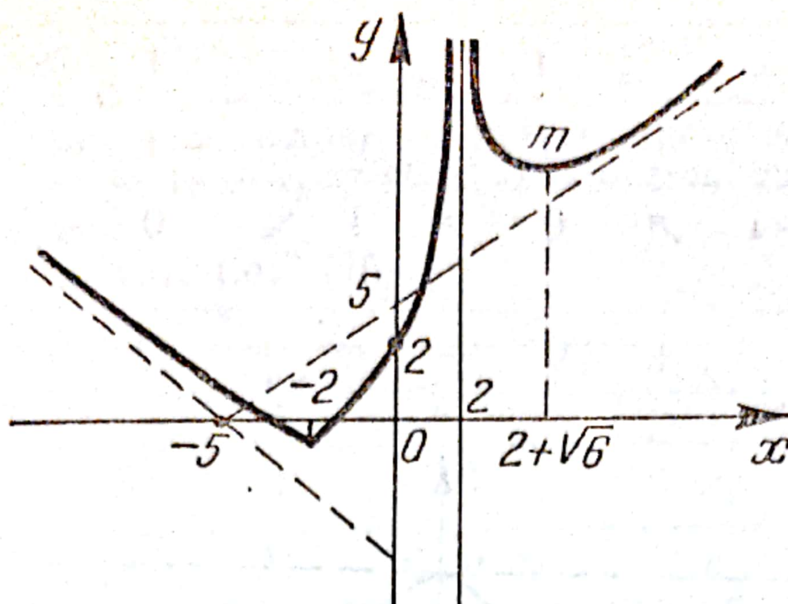


Fig. 6.15.

6.16. Funcția este definită pentru orice $x \in R$. Se observă că $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = -1$, deci $y = -1$ este asimptotă orizontală la graficul funcției atît la ramura spre $-\infty$, cît și la cea spre $+\infty$. Acest rezultat este justificat și de faptul că $f(x) = f(-x)$, adică f este simetrică față de axa Oy. Intersecțiile cu axa Ox au loc în punctele $(-1, 0)$ și $(1, 0)$, iar punctul de intersecție cu Oy este $(0, 1)$.

Derivata întîi este $f'(x) = \dfrac{-4x}{(1+x^2)^2}$, $x \in R$. Ea se anulează pentru $x = 0$. Acesta este un punct de maxim, căci $f'(x) > 0$ cînd $x \in (-\infty, 0)$ și $f'(x) < 0$ cînd $x \in (0, +\infty)$. Valoarea funcției în punctul de maxim este $f(0) = 1$. Se observă apoi că $f'(-1) = 1$ și $f'(1) = -1$. Derivata a doua $f''(x) = \dfrac{4(x^2-1)}{(x^2+1)^3}$, $x \in R$ se anulează pentru $x = -1$ și $x = 1$. Punctele $A(-1, 0)$ și $B(1, 0)$ sînt puncte de inflexiune. Într-adevăr $f''(x) < 0$ pentru $x \in (-1, 1)$ și $f''(x) > 0$ pentru $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. Încheiem studiul funcției cu tabloul de variație:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	1	$+$	0	$-$	-1	$-$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1 (M)	$\searrow$	0	$\searrow$	-1
$f''(x)$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	

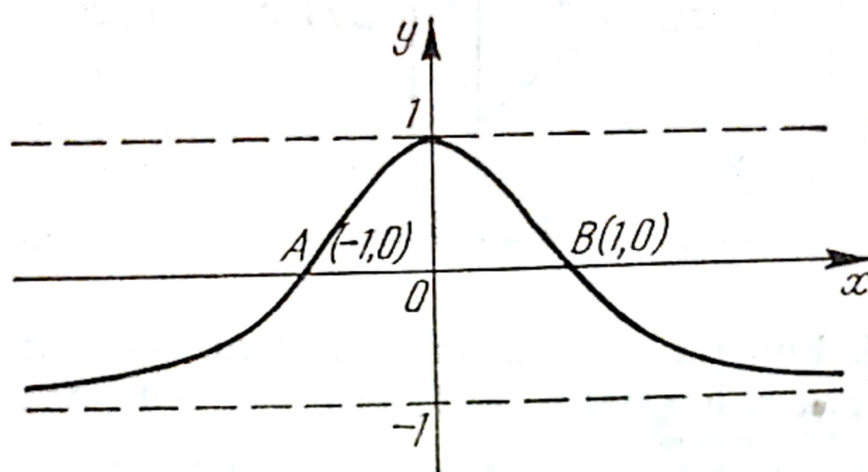


Fig. 6.16.

6.17. Deoarece $x^2 - 2x + 2 = (x - 1)^2 + 1 > 0$ pentru orice x real, funcția f este definită și continuă pe R. Avem $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 1$, deci $y = 1$ este asimptotă orizontală la $-\infty$ și la $+\infty$. Intersecția graficului cu axa Ox se face în punctele $(0, 0)$ și $(3, 0)$, iar cu asimptota $y = 1$ în $(-2, 1)$.

Derivata întîi $f'(x) = \dfrac{x^2 + 4x - 6}{(x^2 - 2x + 2)^2}$, definită pentru orice $x \in R$, se anulează cînd $x = -2 - \sqrt{10}$ și cînd $x = -2 + \sqrt{10}$. Primul este un punct de maxim, al doilea de minim. Avem $f(-2 - \sqrt{10}) = \dfrac{20 + 7\sqrt{10}}{20 + 6\sqrt{10}} = M$ și $f(-2 + \sqrt{10}) = \dfrac{20 - 7\sqrt{10}}{20 - 6\sqrt{10}} = m$. Derivata a doua este $f''(x) = -\dfrac{2}{(x^2 - 2x + 2)^3} \cdot (x^3 + 6x^2 - 18x + 8)$, $x \in R$. Notînd

$P(x) = x^3 + 6x^2 - 18x + 8$, din relațiile $P(-9) \cdot P(-8) < 0$, $P(0) \cdot P(1) < 0$ și $P(1) \cdot P(2) < 0$ deducem că derivata a doua se anulează în trei puncte: $x_1 \in (-9, -8)$, $x_2 \in (0, 1)$ și $x_3 \in (1, 2)$ Toate trei sînt puncte de inflexiune.
Tabloul de variație:

x	$-\infty$	x_1	$-2-\sqrt{10}$	-2	0	x_2	$-2+\sqrt{10}$	x_3	3	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$		$+$		$+$
$f(x)$	1	$\nearrow$	M	$\searrow$	0	$\searrow$	m	$\nearrow$	0	$\nearrow$ 1
$f''(x)$	$+$	0	$-$	$-$		0	$+$	0		$-$

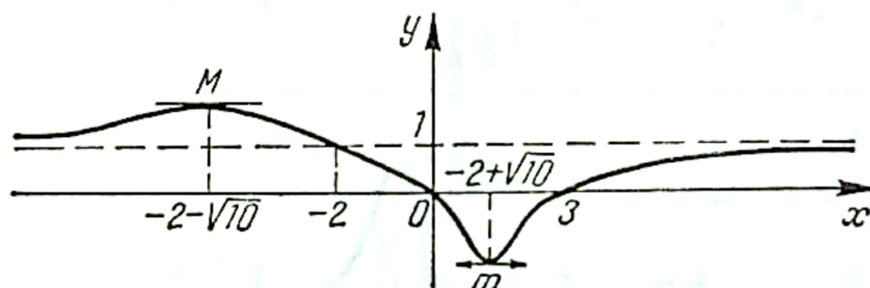


Fig. 6.17.

6.18. Deoarece $x^2 - x + 1 > 0$, $(\forall) x \in R$ funcția f este definită pe R. Deoarece $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 1$, dreapta $y = 1$ este asimptotă orizontală. Intersecția cu axa Ox are loc pentru $x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$, iar cu axa Oy în punctul $(0,1)$. Derivata întîi $f'(x) = \dfrac{4(1-x^2)}{(x^2-x+1)^2}$, definită pentru orice $x \in R$, se anulează cînd $x = -1$ și $x = 1$. Primul este un punct de minim, al doilea de maxim. Derivata a doua este $f''(x) = \dfrac{8(x^3 - 3x + 1)}{(x^2 - x + 1)^3}$, $x \in R$.
Notînd $P(x) = x^3 - 3x + 1)$, avem

$P(-2) \cdot P(-1) < 0$, $P(0) \cdot P(1) < 0$ și $P(1) \cdot P(2) < 0$. Rezultă că derivata a doua se anulează în trei puncte: $x_1 \in (-2, -1)$, $x_2 \in (0, 1)$ și $x_3 \in (1, 2)$. Toate trei sînt puncte de inflexiune.

Tabelul de variație:

x	$-\infty$	$-\frac{3+\sqrt{5}}{2}$	x_1	-1	0	x_2	1	x_3	$+\infty$
$f'(x)$		$-$		0		$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$		$-\frac{1}{3}$	$\nearrow$ 1	$\nearrow$	5	$\searrow$	1
$f''(x)$		$-$	0	$+$		0	$-$	0	$+$

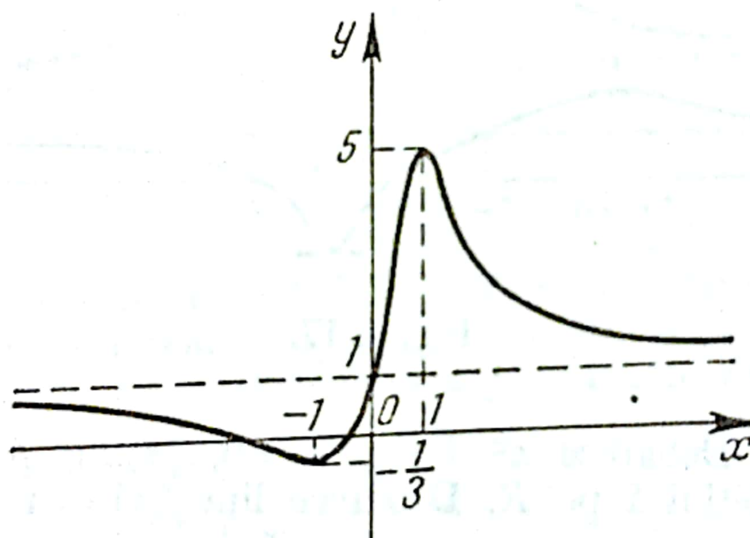


Fig. 6.18.

6.19. Deoarece $x^2 - 2x + 2 > 0$, funcția f este definită pentru orice $x \in R$. Avem $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$ deci axa Ox este asimptotă orizontală. Intersecția cu axa Ox este $\left(\frac{1}{4}, 0\right)$, cea cu axa Oy : $\left(0, \frac{1}{2}\right)$. Derivata întîi este $f'(x) = \frac{2(x+1)(2x-3)}{(x^2-2x+2)^2}$, $x \in R$. Ea se anulează pentru $x = -1$ și pentru $x = \frac{3}{2}$. Primul este

un punct de maxim, al doilea de minim. Derivata a doua este $f''(x) = -\dfrac{8x^3 - 6x^2 - 36x + 28}{(x^2 - 2x + 2)^3}$, $x \in R$. Notînd $P(x) = 8x^3 - 6x^2 - 36x + 28$, din relațiile

$$P(-2) \cdot P(-1) < 0, \quad P(0) \cdot P(1) < 0$$

și $P(2) \cdot P(3) < 0$ rezultă că derivata a doua se anulează în trei puncte:

$$x_1 \in (-2, -1), \ x_2 \in (0, 1) \text{ și } x_3 \in (2, 3).$$

Acestea sînt puncte de inflexiune.

Tabloul de variație:

x	$-\infty$	x_1	-1		0		$\frac{1}{4}$	x_2	$\frac{3}{2}$	x_3	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$-$		$-$		0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	0
$f''(x)$		$+0$	$-$	$-$	$-$			0	$+$	0	$-$

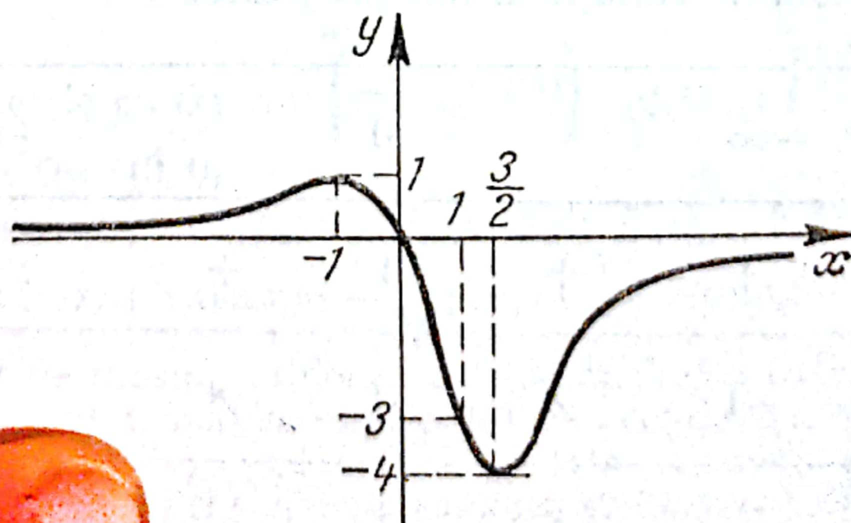


Fig. 6.19.

6.20. Domeniul de definiție al funcției f este R, iar legea ei se mai scrie:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1-x}, & \text{pentru } x < 0 \\ \dfrac{x}{1+x}, & \text{pentru } x \geqslant 0. \end{cases}$$

Avem $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$ și $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$, deci $y = -1$ și $y = 1$ sînt asimptote orizontale la $-\infty$, respectiv $+\infty$.

Derivata întîi este dată de legea

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(1-x)^2}, & \text{pentru } x < 0 \\ \dfrac{1}{(x+1)^2}, & \text{pentru } x \geqslant 0, \end{cases}$$

iar derivata a doua este $f'' : R - \{0\} \to R$ dată de

$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{-2}{(x-1)^3}, & \text{cînd } x < 0 \\ \dfrac{-2}{(x+1)^3}, & \text{cînd } x > 0. \end{cases}$$

Funcția este deci convexă pe intervalul $(-\infty, 0)$ și concavă pe intervalul $(0, +\infty)$. Originea este punct de inflexiune.

Tabloul de variație al funcției f este:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	1	$+$	$+$
$f(x)$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1
$f''(x)$		$+$	|	$-$	

Ținînd seama că $\overset{-1}{f} : (-1, 1) \to R$ are graficul simetric cu al lui f, în raport cu bisectoarea întîi a axelor, obținem graficele (fig. 6.20) cerute în enunț.

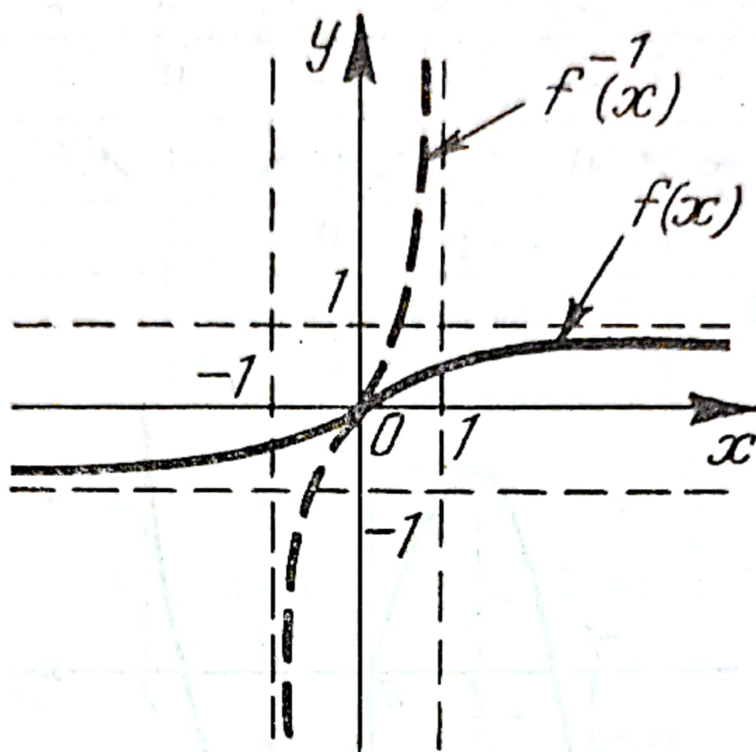


Fig. 6.20.

6.21. a) Funcția este definită pentru orice $x \in R$ și $f(x) = -f(-x)$, deci funcția este simetrică în raport cu originea. Avem:
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ iar $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Punctele de intersecție cu Ox sînt $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$, $(0, 0)$ și $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$ iar cu Oy : $(0, 0)$.

Derivata întîi $f' : R \to R$ dată de $f'(x) = 3(4x^2 - 1)$ se anulează pentru $x = -\frac{1}{2}$ și $x = \frac{1}{2}$. Primul este un punct de maxim, al doilea de minim. Valoarea funcției în punctul de maxim este $+1$, iar în cel de minim -1. Deoarece $f''(x) = 24x$, funcția este concavă pentru $x \in (-\infty, 0)$ și convexă pentru $x \in (0, +\infty)$. Rezultă că originea este punct de inflexiune.

Tabloul de variație:

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty \nearrow$	0	$\nearrow 1$	$\searrow 0$	$\searrow -1$	$\nearrow 0$	$\nearrow +\infty$
$f''(x)$		$- \quad -$	$- \quad -$	0	$+$	$+$	$+$

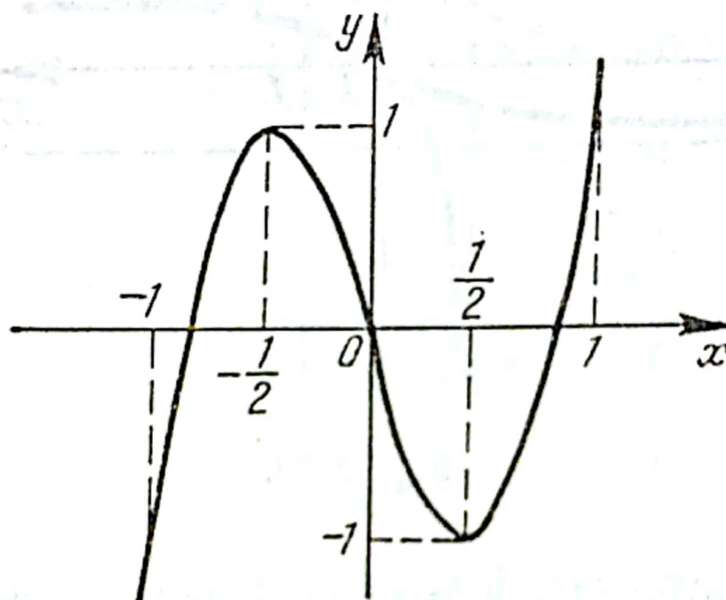


Fig. 6.21.

b) Folosind metoda grafică de discuție a rădăcinilor ecuației din enunț, vom obține următoarele rezultate:

Pentru $m < -1$, ecuația admite o singură rădăcină reală

Pentru $m = -1$, $x_1 = -1$, $x_2 = x_3 = \frac{1}{2}$;

Pentru $m \in (-1, 1)$: ecuația are 3 rădăcini reale și distincte.

Pentru $m = 1$: $x_1 = 1$, $x_2 = x_3 = -\frac{1}{2}$.

Pentru $m > 1$: ecuația admite o singură rădăcină reală și mai mare ca 1.

6.22. Legea funcției $f : R \to R_+$ se mai scrie:

$$f(x) = \begin{cases} -x^3 & \text{dacă } x < 0, \\ -x^3 + 4x^2 & \text{dacă } 0 \leqslant x < 4, \\ x^3 - 4x^2 & \text{dacă } 4 \leqslant x. \end{cases}$$

Derivata întîi este

$$f'(x) = \begin{cases} -3x^2 & \text{dacă } x < 0 \\ -3x^2 + 8x & \text{dacă } 0 \leqslant x < 4 \\ 3x^2 - 8x & \text{dacă } 4 < x. \end{cases}$$

Se observă că în $x = 0$ și în $x = \frac{8}{3}$, $f'(x) = 0$. Primul este un punct de minim, al doilea de maxim. Derivata a doua este dată de legea

$$f''(x) = \begin{cases} -6x & \text{dacă } x < 0 \\ -6x + 8 & \text{dacă } 0 < x < 4 \\ 6x - 8 & \text{dacă } 4 < x. \end{cases}$$

Se observă că $x = \frac{4}{3}$ este punct de inflexiune, iar $x = 4$, punct unghiular.

Tabloul de variație:

x	$-\infty$		0		$\frac{4}{3}$		$\frac{8}{3}$		4		$+\infty$
$f'(x)$	$-$		0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	|	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$\frac{128}{27}$	↗	$\frac{256}{27}$	↘	0	↗	$+\infty$
$f''(x)$	$+$		|	$+$	0	$-$	$-$	$-$	|	$+$	

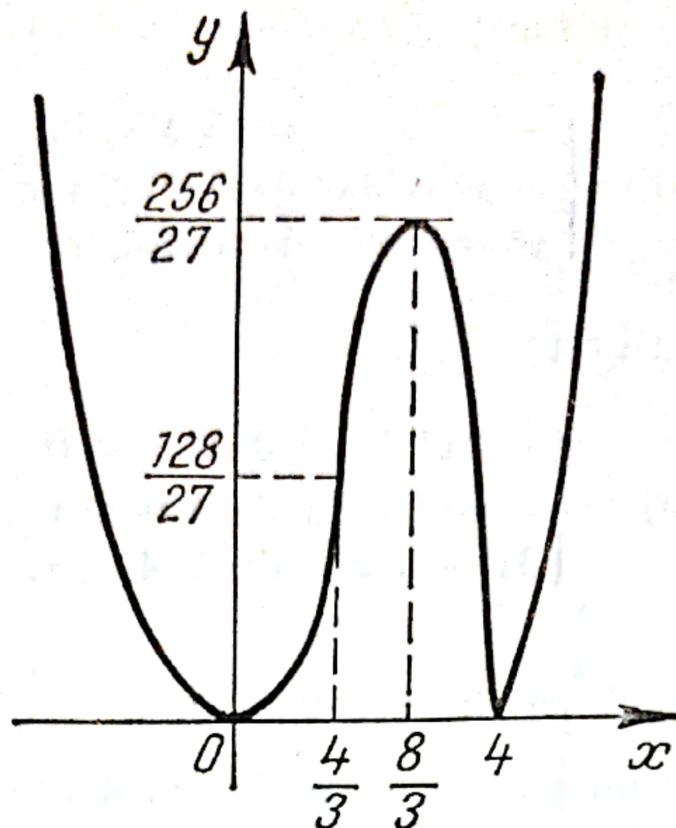


Fig. 6.22.

6.23. Domeniul de definiție al funcției este $R - \{-2, 0\}$. Legea funcției se mai scrie:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(-x)(x+1) + x(-x-1)}{x(x+2)} = -2 \cdot \dfrac{x+1}{x+2}, & \text{cînd } x \in (-\infty, -1] - \{-2\} \\ \dfrac{(-x)(x+1) + x(x+1)}{x(x+2)} = 0, & \text{pentru } x \in (-1, 0) \\ \dfrac{x(x+1) + x(x+1)}{x(x+2)} = 2\dfrac{x+1}{x+2}, & \text{pentru } x \in (0, +\infty). \end{cases}$$

Avem $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -2$, $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} f(x) = +\infty$ și $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$.

Rezultă că $y = -2$ și $y = 2$ sînt asimptote la $-\infty$ și $+\infty$.

Derivata întîi este dată de legea

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{2}{(x+2)^2}, & x \in (-\infty, \ -1) - \{-2\}; \\ 0 \quad, & x \in (-1, 0); \\ \dfrac{2}{(x+2)^2}, & x \in (0, +\infty), \end{cases}$$

iar derivata a doua este:

$$f''(x) = \begin{cases} +\dfrac{4}{(x+2)^3}, & x \in (-\infty, \ -1] - \{-2\} \\ 0 \quad, & x \in (-1, 0) \\ -\dfrac{4}{(x+2)^3}, & x \in (0, +\infty) \end{cases}$$

Tabloul de variație al funcției

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$-$ |		$-$ |	0	|	$+$	|		$+$
$f(x)$	-2	$\searrow$	$-\infty$ | $+\infty$	$\searrow$	0	0	0 | 1	$\nearrow$	$\frac{4}{3}$	$\nearrow$	2
$f''(x)$	$-$		$-$ |	$+$	|	0	|	$-$	|		$-$

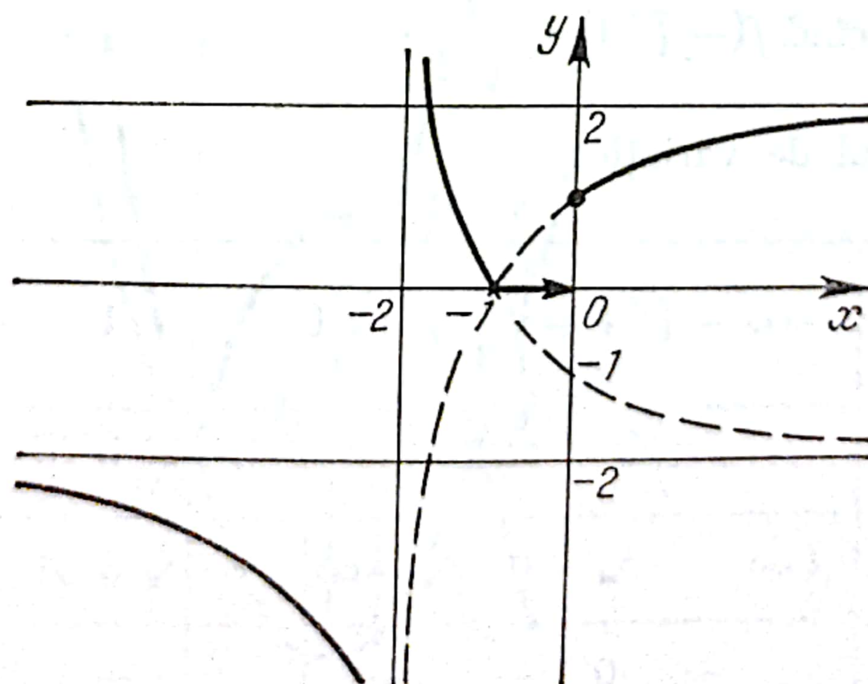


Fig. 6.23.

6.24. Funcţia este definită pe mulţimea $R - \{0\}$. Avem:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = -\infty \text{ şi } \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty,$$

deci axa Oy este asimptotă verticală.

Se observă de asemenea că funcţia admite asimptota parabolică $y = 3x^2$.

Intersecţia cu axa Ox este $\left(-\sqrt[5]{\frac{2}{3}}, 0\right)$.

Ecuaţia $f'(x) = 6\left(x - \frac{1}{x^4}\right) = 0$ are rădăcina reală $x = 1$.

Punctul $A(1, 5)$ este punct de minim al graficului.

Derivata a doua, $f'' : R - \{0\} \to R$ dată de legea

$$f''(x) = 6\left(1 + \frac{4}{x^5}\right),$$

se anulează pentru $x = -\sqrt[5]{4}$ (punct de inflexiune), cînd $f(-\sqrt[5]{4}) = \frac{5}{\sqrt[5]{2}}$.

Tabloul de variaţie:

x	$-\infty$		$-\sqrt[5]{4}$		$-\sqrt[5]{\frac{2}{3}}$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$-$		$-$		|	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$		$\searrow$		0	$\searrow$	$-\infty$ | $+\infty$	$\searrow$	5	$\nearrow$	$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0		$-$	$-$	|		$+$		$+$

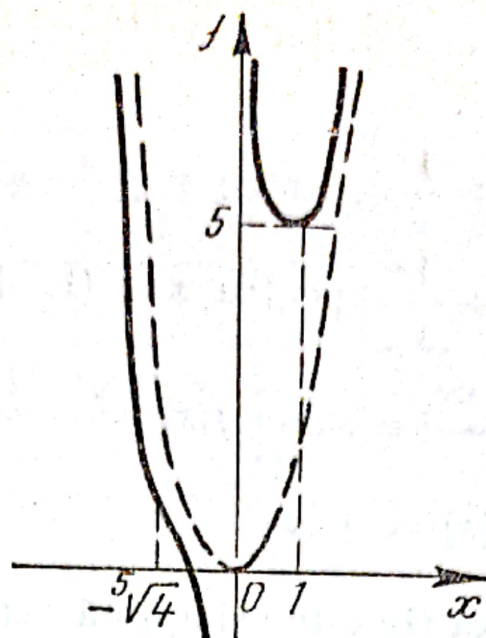


Fig. 6.24.

6.25. Funcţia este definită pe R, iar legea ei se mai scrie:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x, & \text{pentru } x < 0, \\ -x^2 + 3x & \text{pentru } 0 \leqslant x < 2, \\ x^2 - x & \text{pentru } 2 \leqslant x. \end{cases}$$

Curba corespunzătoare este formată deci din 3 arce de parabole.

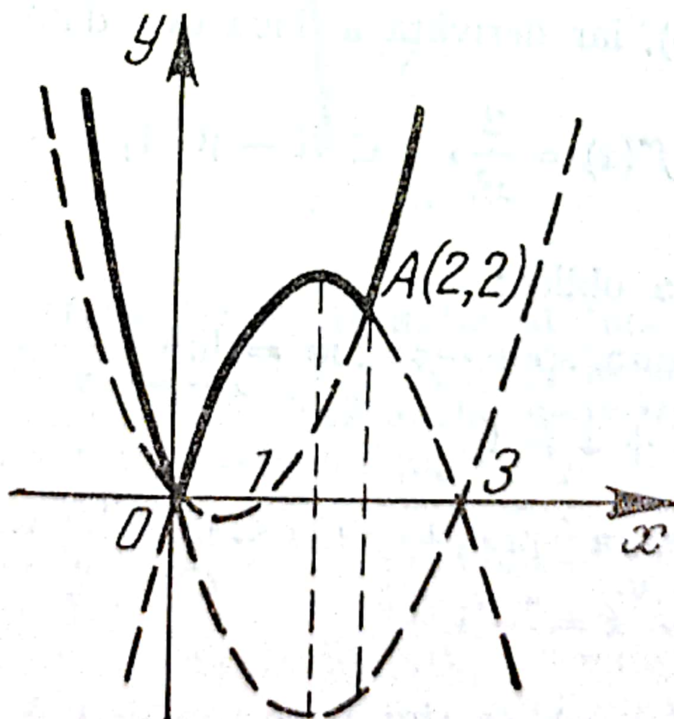


Fig. 6.25.

6.26. Funcția este definită pe $R - \{0\}$ iar legea ei se mai scrie:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x + \frac{1}{x}, & \text{pentru } x \in (-\infty, 0) \cup (0,1] \\ x - 1 + \frac{1}{x}, & \text{pentru } x \in (1, +\infty). \end{cases}$$

Avem $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$ și $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Rezultă că axa Oy este asimptotă verticală. Cu axa Ox graficul se intersectează în punctul de abscisă

$$x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \approx -0{,}6.$$

Derivata întîi este $f'(x) = -1 - \frac{1}{x^2}$, pentru $x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1)$ și $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$, pentru $x \in (1, +\infty)$, iar derivata a doua este dată de legea

$$f''(x) = \frac{2}{x^3},\ x \in R - \{0, 1\}.$$

Asimptote oblice:

— la ramura spre $-\infty$: $m = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$ și $n = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) + x = 1$,

— la ramura spre $+\infty$: $m = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ și $n = \lim\limits_{x \to \infty} f(x) - x = -1$.

Asimptotele oblice sînt deci $y = -x + 1$ și $y = x - 1$.

Tabloul de variație:

x	$-\infty$		-1		$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$-$		$-$		$-$	-2 0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	1	↘	0	↘	$-\infty$ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$
$f''(x)$		$-$			$-$			$+$		$+$	

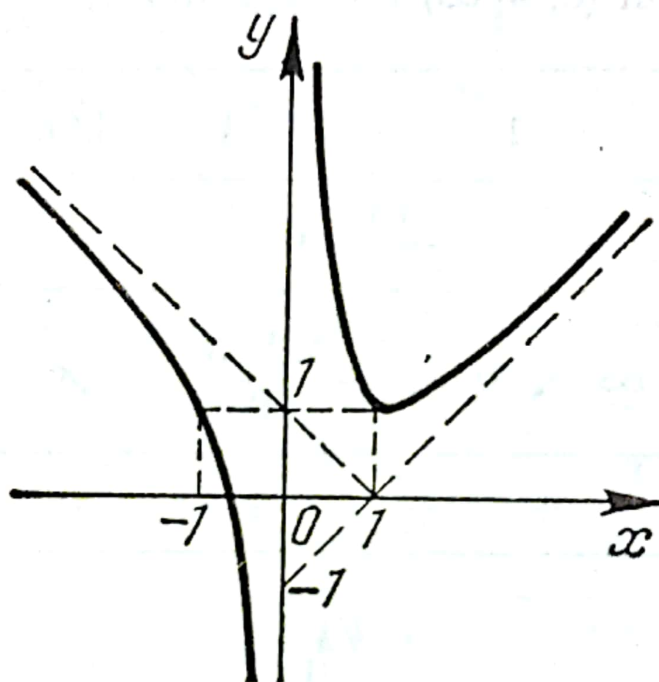


Fig. 6.26.

6.27. Domeniul de difiniție al funcției este $R - \{0\}$. Deoarece $f(x) = -f(-x)$, adică funcția este simetrică față de originea axelor de coordonate, o vom studia doar pe intervalul $(0, +\infty)$.

Avem $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1 - x^2}{x^3} = +\infty$ și $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1 - x^2}{x^3} = 0$, deci axa Ox este asimptotă orizontală la ramura spre $+\infty$ a funcției.

Intersecția cu axa Ox este $(1, 0)$.

Derivata întîi $f' : (0, +\infty) \to R$ dată de $f'(x) = -\frac{3x^2}{x^6} + \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 3}{x^4}$ se anulează pentru $x = \sqrt{3}$. Acesta este un punct de minim, căci $f'(x) < 0$, pentru $x \in (0, \sqrt{3})$ și $f'(x) > 0$, pentru $x \in (\sqrt{3}, +\infty)$. Derivata a doua este $f'' : (0, +\infty) \to R$, dată de legea $f''(x) = \frac{2(6 - x^2)}{x^5}$. Ea se anulează în $x = \sqrt{6}$, un punct de inflexiune.

Tabelul de variație al restricției funcției din enunț pe intervalul $(0, +\infty)$ este următorul:

x	0		1		$\sqrt{3}$		$\sqrt{6}$		$+\infty$
$f'(x)$	|	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$f(x)$	|	$+\infty$ ↘	0	↘	$-\frac{2\sqrt{3}}{9}$	↗		↗	0
$f''(x)$	|	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	

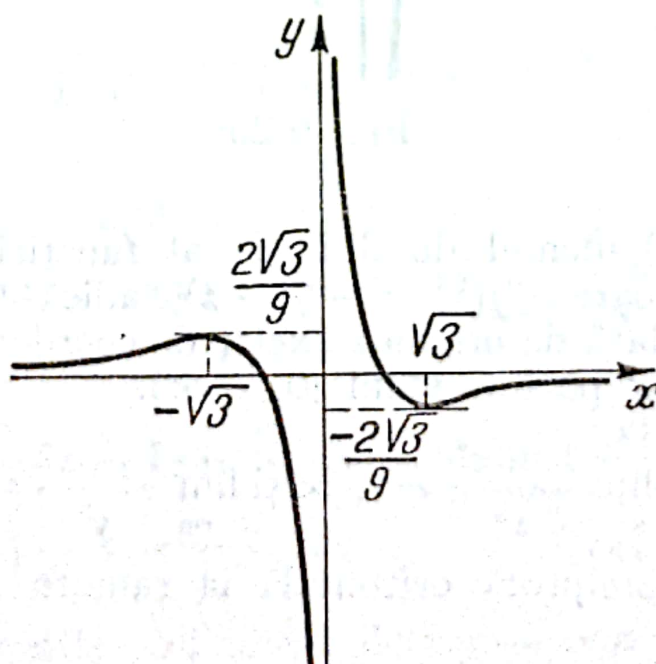


Fig. 6.27.

6.28. Domeniul de definiție al funcției este R. Pentru a obține graficul funcției f, va fi suficient să construim graficul funcției $g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ și apoi să luăm simetricul părții de dedesubtul axei xx' în raport cu această axă.

Deoarece $\lim\limits_{x \to \pm\infty} g(x) = 1$, $y = 1$ este o asimptotă orizontală atît la ramura spre $-\infty$ cît și la cea spre $+\infty$.

Intersecțiile cu axa Ox sînt $(-1, 0)$ și $(1, 0)$, iar cu $Oy : (0, 1)$. Derivata $g'(x) = \dfrac{4\ x}{(x^2 + 1)^2}$ se anulează pentru $x = 0$ (minim) cînd $g(0) = 1$.

Ecuația $g''(x) = \dfrac{4(1 - 3x^2)}{(x^2 + 1)^3} = 0$ are soluțiile $x_1 = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ și $x_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Acestea sînt puncte de inflexiune.

Tabloul de variație al funcției $g(x)$ este:

x	$-\infty$		-1		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		0		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		1		$+\infty$
$g'(x)$			—		—		0			+		+	
$g(x)$	1		↘0		↘		−1			↗	0	↗	1
$g''(x)$			—		0			+	0			—	

În fig. 6.28 sînt reprezentate graficele funcțiilor f și g.

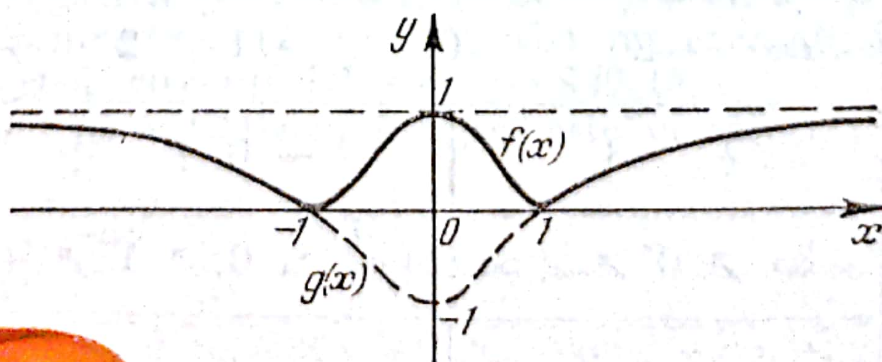


Fig. 6.28.

6.29. Funcția este definită pe mulțimea $R - \{0\}$. Avem

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \text{ și } \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty.$$

Rezultă că axa Oy este asimptotă verticală.

Intersecțiile cu axa Ox sînt $(-2, 0)$ și $(1, 0)$.

Derivata întîi, definită pentru $x \in R - \{0\}$, este dată de legea

$$f'(x) = \frac{(x-1)(x^2+x+4)}{x^3}.$$

Punctul $x = 1$ (în care se anulează) este punct de minim. Valoarea minimului este $f(1) = 0$.

Derivata a doua,

$$f''(x) = -\frac{6(x-2)}{x^4},$$

$(x \neq 0)$, se anulează pentru $x = 2$. Acesta este un punct de inflexiune.

Deoarece $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ și $\lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - x) = 0$, bisectoarea întîi a axelor este asimptotă oblică, atît la $-\infty$ cît și la $+\infty$.

Tabloul de variație:

x	$-\infty$ $\quad -2 \quad$	0	$1 \quad 2 \quad +\infty$
$f'(x)$	$+ \quad +$	|	$- \quad 0 \quad + \quad +$
$f(x)$	$-\infty \nearrow 0 \nearrow +\infty$	|	$+\infty \searrow 0 \nearrow 1 \nearrow +\infty$
$f''(x)$	$+$	|	$+ \quad 0 \quad -$

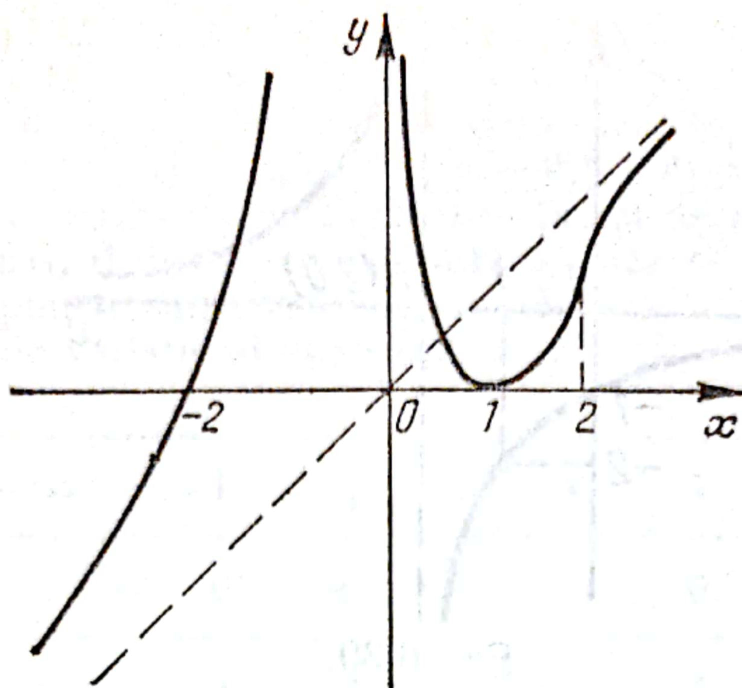


Fig. 6.29.

6.30. Funcția f este definită pe $R - \{1, 2\}$, iar legea ei se mai poate scrie:

$f(x) = \dfrac{2(x-1)}{(x-1)(x-2)} = \dfrac{2}{x-2}$. Avem $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} f(x) = -\infty$ și $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} f(x) = +\infty$.

Derivata întîi $f'(x) = \dfrac{-2}{(x-2)^2}$; $x \in R - \{1, 2\}$ este strict negativă, iar derivata a doua $f''(x) = \dfrac{4}{(x-2)^3}$ este negativă pentru $x \in (-\infty, 1) \cup (1, 2)$ și pozitivă pentru $x \in (2, +\infty)$. Curba reprezentativă este o hiperbolă cu centrul de simetrie $S(2, 0)$.
Tabloul de variație al funcției este următorul:

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	|	$-$	|	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-2 | -2	$\searrow$	$-\infty$ | $+\infty$	$\searrow$	0
$f''(x)$		$-$	|	$-$	|	$+$	$+$

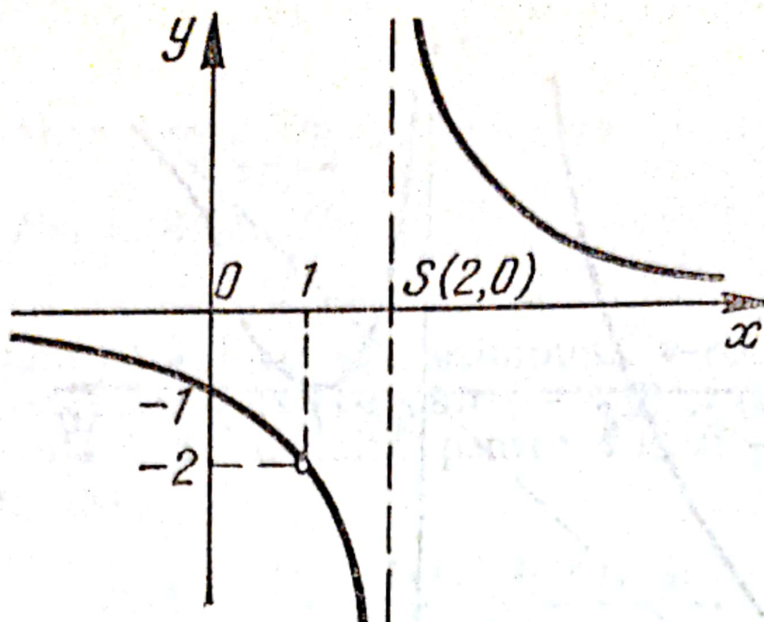


Fig. 6.30.

6.31. Domeniul de definiție al funcției este R. Deoarece $f(x) = f(-x)$, graficul este simetric față de axa Oy. Avem $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Intersecția cu Oy este punctul $(0, 2)$.

Scriind funcția f sub forma $f(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{4} + \frac{9}{4(2x^2+1)}$ vom obține: $f'(x) = x - \frac{9x}{(2x^2+1)^2} = \frac{4x(x^4+x^2-2)}{(2x^2+1)^2}$, $x \in R$. Derivata întîi se anulează pentru $x = 0$, $x = -1$ și $x = 1$. Se observă imediat că pentru $x = 0$ se obține un maxim, a cărui valoare este $f(0) = 2$, iar pentru $x = -1$ și $x = 1$, cîte un minim: $f(-1) = f(1) = 1$.

Derivata a doua este $f'' : R \to R$, dată de legea

$$f''(x) = \left[x - \frac{9x}{(2x^2+1)^2}\right]' = 1 - \frac{9(2x^2+1)^2 - 72x^2(2x^2+1)}{(2x^2+1)^4} =$$

$$= 1 - \frac{9(2x^2+1) - 72x^2}{(2x^2+1)^3} =$$

$$= \frac{(2x^2+1)^3 - 9(2x^2+1)^2 + 36(2x^2+1) - 36}{(2x^2+1)^3}.$$

Notînd $2x^2 + 1 = y$, ecuaţia $P(y) = y^3 - 9y^2 + 36y - 36 = 0$ va avea doar o singură rădăcină reală $y_0 \in (0, 3)$. Aceasta se datorează faptului că $P'(y) = 3(y^2 - 6y + 12) = 3[(y-3)^2 + 4] > 0$.

Ţinînd seama de paritatea funcţiei şi de rezultatul de mai sus, deducem că derivata a doua se anulează în două puncte simetrice faţă de axa Oy.

Tabloul de variaţie al funcţiei este:

x	$-\infty$		-1		x_1		0		x_2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0		$+$		0		$-$		0		$+$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1		$\nearrow$		2		$\searrow$		1	$\nearrow$	$+\infty$
$f''(x)$		$+$	(m)	$+$	0	$-$	(M)	$-$	0	$+$	(m)		$+$

Graficul funcţiei f are asimptota parabolică $g(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{4}$, pe care o desenăm punctat.

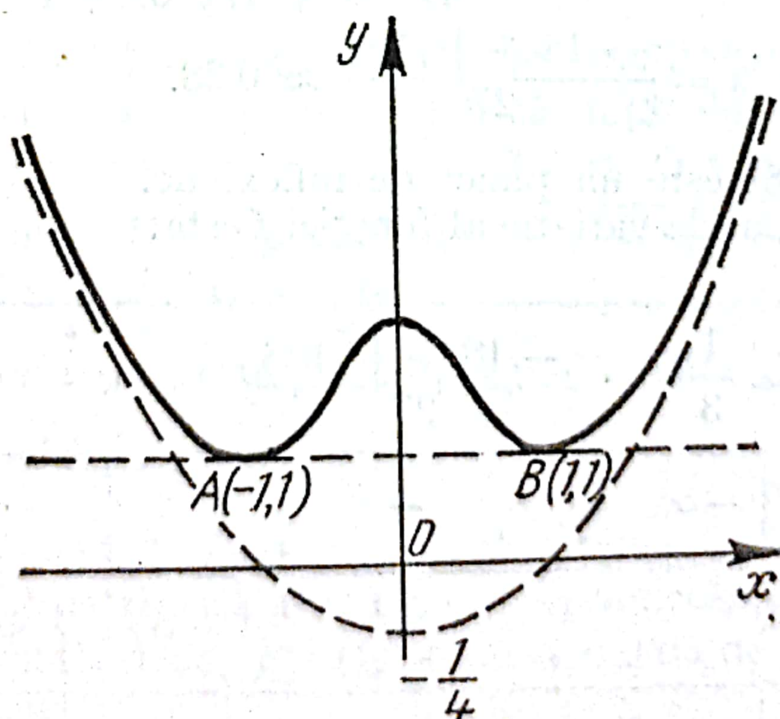


Fig. 6.31.

6.32. Deoarece $f(x) = -g(x)$, $(\forall)\, x \in \left[-\frac{1}{3}, 0\right) \cup$ $\cup (0, +\infty)$, graficul funcției g este simetricul față de Ox al graficului funcției f. Vom studia numai funcția f.

Avem $f\left(-\frac{1}{3}\right) = 0$, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = +\infty$,

iar $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$.

Rezultă că axa Oy este asimptotă verticală, iar axa Ox este asimptotă orizontală la ramura spre $+\infty$ a graficului funcției.

Derivata întîi

$$f'(x) = \frac{-3x-2}{2x^2\sqrt{3x+1}} \text{ cu } x \in \left(-\frac{1}{3}, 0\right) \cup (0, +\infty)$$

este strict negativă, deci f este descrescătoare.

Derivata a doua, $f'' : \left(-\frac{1}{3}, 0\right) \cup (0, +\infty) \to R$, dată de legea $f''(x) = \dfrac{27x^2+36x+8}{4x^3(3x+1)\sqrt{3x+1}}$, se anulează în $x = \dfrac{-18+\sqrt{108}}{27} \approx 0{,}28$.

Acesta este un punct de inflexiune.

Tabloul de variație al funcției f este:

x	$-\frac{1}{3}$	$\frac{-18+\sqrt{108}}{27}$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$\vert\ -\infty$	$-$	$\vert$	$-$
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\infty \vert +\infty$	$\searrow\ 0$
$f''(x)$	$\vert$	0	$\vert$	

Graficele cerute în enunț sînt prezentate în fig. 6.32.

Anume: curba pentru $f(x)$ cu linie plină, iar cea pentru $g(x)$ cu linie punctată.

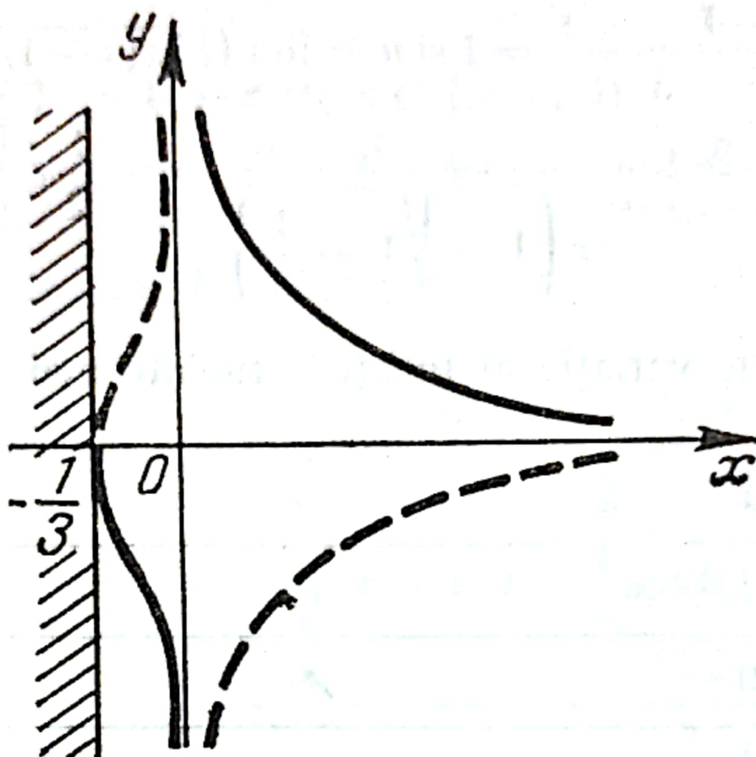


Fig. 6.32.

6.33. Funcția este definită pe mulțimea $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ și este simetrică față de originea axelor de coordonate: $f(x) = -f(-x)$. O vom studia pe mulțimea $[1, +\infty)$, cînd $f(x) = \sqrt{x(x-1)}$. Avem $f(1) = 0$ și $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Derivata întîi este $f' : (1, +\infty) \to R$, dată de legea $f'(x) = \dfrac{2x-1}{2\sqrt{x(x-1)}}$.

Se observă că $f'_d(1) = +\infty$, deci tangenta la curbă în punctul de abscisă $x = 1$ este perpendiculară pe Ox.

Derivata a doua, $f'' : (1, +\infty) \to R$ dată de $f''(x) = \dfrac{-1}{4(\sqrt{x(x-1)})^3}$, este negativă, deci f este concavă.

La ramura spre $+\infty$ funcția admite asimptota oblică $y = x - \frac{1}{2}$. Într-adevăr $m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} =$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{1-\frac{1}{x}}}{x} = 1 \text{ și } n = \lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x(x-1)} - x\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-x}{x\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)} = -\frac{1}{2}.$$

Tabloul de variație al funcției studiate mai sus este:

x	1			$+\infty$
$f'(x)$	|	$+\infty$	$+$	$+$
$f(x)$	0		$\nearrow$	$+\infty$
$f''(x)$	|		$-$	$-$

Din cele mai de sus rezultă graficul funcției f din enunț (fig. 6.33).

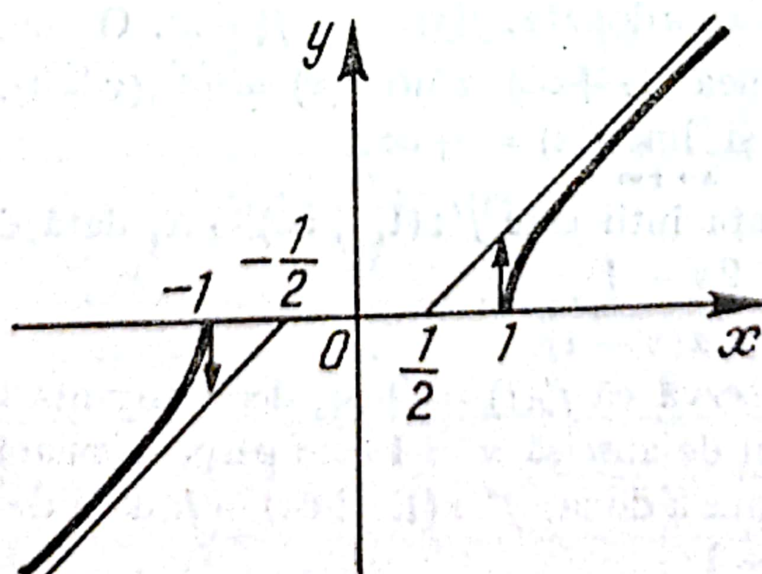


Fig. 6.33.

6.34. a) Funcţia este definită pe R, iar legea ei se mai scrie:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+x-1, & \text{pentru } x\in(-\infty,\ -1], \\ x^2-x+1, & \text{pentru } x\in(1,\ +\infty). \end{cases}$$

Rezultă:

$$f'(x)=\begin{cases} 2x+1, & \text{pentru } x\in(-\infty,\ 1) \\ 2x-1, & \text{pentru } x\in(1,\ +\infty) \text{ și } f''(x)=2, \\ & x\in R-\{1\}. \end{cases}$$

Tabloul de variație al funcției este următorul:

x	$-\infty$		$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		$\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	2	$+$		$+$	$3 \mid 1$	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{5}{4}$	$\nearrow$	-1	$\nearrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$
$f''(x)$		$+$	$+$	$+$	(m)			$+$				$+$	$\mid$	$+$	

b) Graficul (fig. 6.34) este format din două arce de parabolă.

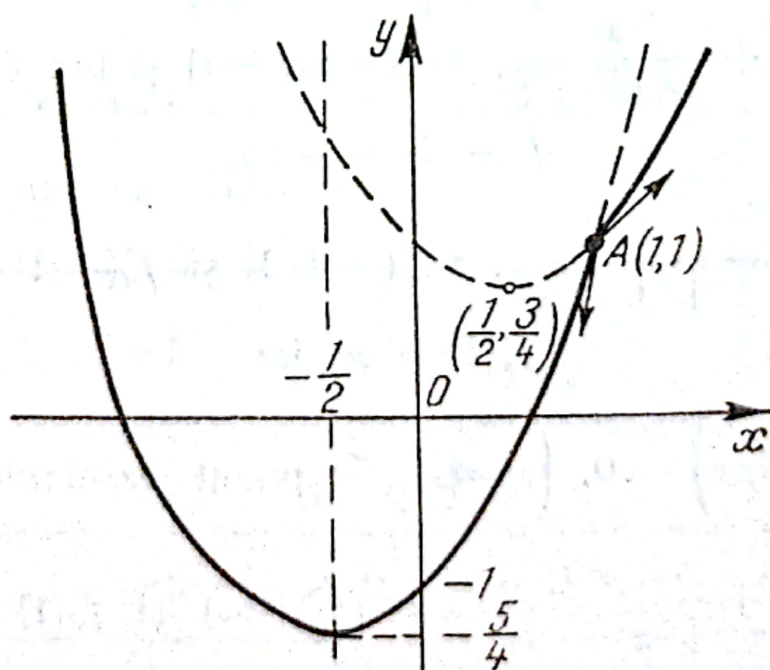


Fig. 6.34.

Punctul $A(1, 1)$ al graficului este punct unghiular. Pentru $f(x) = x^2 + x - 1$, ecuația tangentei cerute este $y - 1 = 3(x - 1)$, pentru $f(x) = x^2 - x + 1$ ecuația tangentei este $y - 1 = x - 1$.

6.35. Domeniul de definiție al funcției este R, iar legea ei se mai scrie:

$$f(x) = \begin{cases} x + \sqrt{x^2 - 1} & \text{pentru } x \in (-\infty, -1) \\ x + \sqrt{1 - x^2} & \text{pentru } x \in [-1, 1] \\ x + \sqrt{x^2 - 1} & \text{pentru } x \in (1, +\infty). \end{cases}$$

Deoarece $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x\left(1 - \sqrt{1 - \dfrac{1}{x^2}}\right)} = 0,$

axa Ox este asimptotă la $-\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Intersecția cu Ox este $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$, iar cu Oy : $(0, 1)$.

Funcția este continuă pe R și derivabilă pe $R - \{-1, 1\}$.

Avem:

$$f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}, \; x \in (-\infty, -1) \text{ și } \lim_{x \to -\infty} f'(x) = 0,$$
$$f'_s(-1) = -\infty,$$

$$f'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}, \; x \in (-1, 1) \text{ și } f'_d(-1) = +\infty,$$
$$f'_s(1) = \infty \text{ iar}$$

$$f'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0, \left(x = \frac{\sqrt{2}}{2}; \text{ punct de maxim}\right);$$

$$f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}, \; x \in (1, +\infty) \text{ și } f'_d(1) = +\infty,$$
$$\lim_{x \to +\infty} f'(x) = 2.$$

De asemenea:

$$f''(x) = -\frac{1}{(\sqrt{x^2-1})^3} < 0,$$

pentru $x \in (-\infty, \ -1) \cup (1, +\infty)$ și

$$f''(x) = -\frac{1}{(\sqrt{1-x^2})^3}, \text{ pentru } x \in (-1, \ 1).$$

La ramura spre $+\infty$, graficul admite o asimptotă oblică.

Într-adevăr avem:

$$m = \lim_{x\to\infty}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}\right) = 2 \text{ și}$$

$$n = \lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-1} - x) =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{-1}{x+\sqrt{x^2-1}} = 0,$$

deci $y = 2x$ este asimptota oblică la $+\infty$.

Tabloul de variație:

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$		1		$+\infty$
$f'(x)$	0	$-$	$-\infty$ $+\infty$	$+$		$+$	0	$-$	$-\infty$ $+\infty$	$+$	2
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$
$f''(x)$		$-$			$-$	$-$	(M)			$-$	

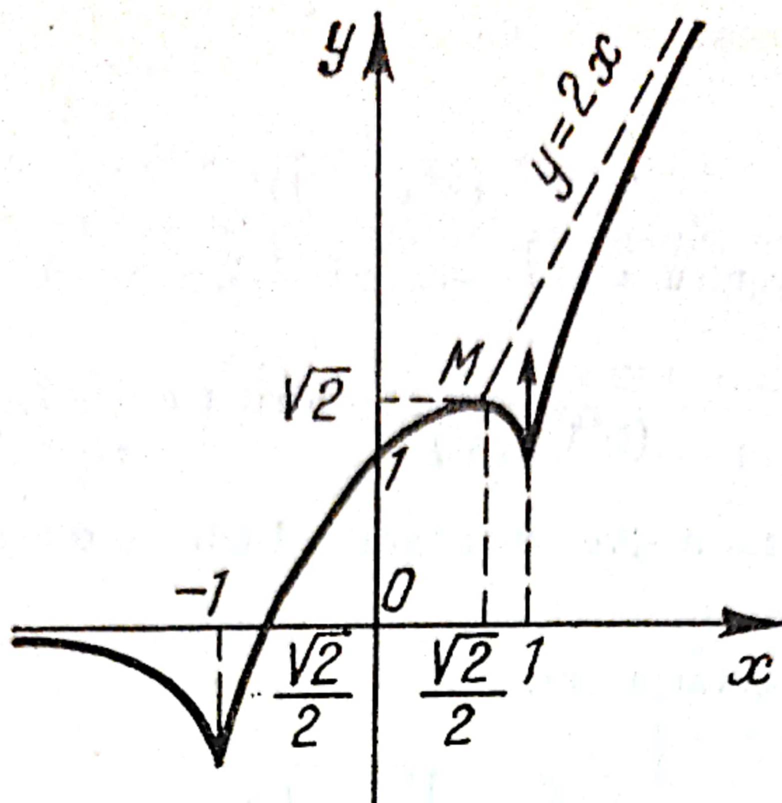


Fig. 6.35.

6.36. Domeniul de definiție al funcției este $[-2, 0) \cup (0, +\infty)$.

Avem $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = -\infty$, deci axa Oy este asimptotă verticală.

Intersecția graficului cu axa Ox se face în punctele $(-2, 0)$, $(-1, 0)$ și $(1, 0)$.

Derivata întîi $f' : (-2, 0) \cup (0, +\infty) \to R$, dată de legea $f'(x) = \dfrac{x^3 + 3x + 8}{2x^3\sqrt{x+2}}$, se anulează într-un singur punct $x_0 \in (-2, -1)$. Notînd $P(x) = x^3 + 3x + 8$, afirmația precedentă rezultă din relațiile:

$$P'(x) = 3x^2 + 3 > 0 \text{ și}$$

$$P(-2) \cdot P(-1) = (-6) \cdot 4 = -24 < 0.$$

Punctul x_0 este un punct de maxim.

Derivata a doua este

$$f''(x) = -\frac{x^4 + 30x^2 + 160x + 192}{4x^4 \cdot (\sqrt{x+2})^3},$$

$$x \in (-2, 0) \cup (0, +\infty).$$

Fie $Q(x) = x^4 + 30x^2 + 160x + 192.$

Atunci $Q(x) > 0$, pentru $x > 0$, iar pentru $-2 \leqslant x \leqslant 0$ avem $Q'(x) = 4x^3 + 60x + 160 \geqslant 4 \cdot (-8) + 60 \cdot (-2) + 160 > 0$, deci $Q(x)$ este funcție crescătoare pe $[-2, 0]$. Rezultă $Q(x) \geqslant Q(-2) = 8 > 0$, deci $Q(x) > 0$, $(\forall)$ $x \in (-2, 0) \cup (0, +\infty)$. Funcția f este deci concavă.

Se observă că

$$f(x) - \sqrt{x+2} = -\frac{\sqrt{x+2}}{x^2} \text{ și } \lim_{x\to\infty} [f(x) - \sqrt{x+2}] =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} -\frac{\sqrt{x+2}}{x^2} = 0,$$

deci $g(x) = \sqrt{x+2}$, $x \geqslant -2$ este o curbă (un arc de parabolă) asimptotă graficului funcției. Aceasta din urmă se află sub asimptotă (arcul de parabolă).

Tabloul de variație al funcției:

x	-2		x_0		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$	| $-\infty$	$+$	0		$-$		$-\infty$ | $+\infty$		$+$		$+$
$f(x)$	0	$\nearrow$	M	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$ | $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$f''(x)$	|	$-$		$-$					$-$		$-$

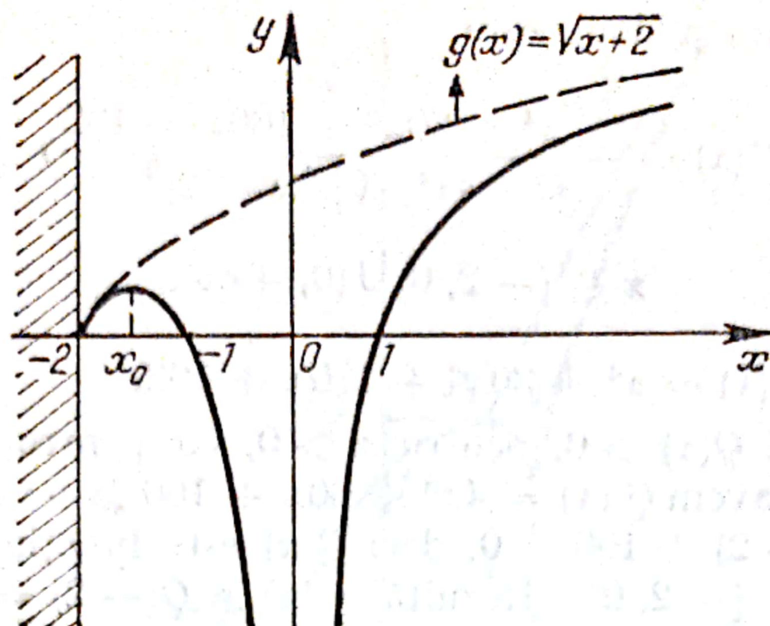


Fig. 6.36.

6.37. Domeniul de definiție al funcției este $[-2, +\infty)$. În punctele $(-2, 0)$ și $(-1, 0)$, graficul se intersectează cu axa Ox, iar în $(0, \sqrt{2})$ cu Oy.

Derivata întîi $f' : (-2, +\infty) \to R$, dată de

$$f'(x) = \frac{3x+5}{2\sqrt{x+2}};$$

se anulează pentru $x = -\frac{5}{3}$, un punct de minim, căci $f'(x) < 0$, cînd $x \in \left(-2, -\frac{5}{3}\right)$ și $f'(x) > 0$, pentru

$$x \in \left(-\frac{5}{3}, +\infty\right).$$

Observăm că

$$f'_d(-2) = -\infty \text{ și } f\left(-\frac{5}{3}\right) = \frac{-2\sqrt{3}}{9} \approx -0{,}38.$$

Derivata a doua $f''(x) = \frac{3x+7}{4(\sqrt{x+2})^3}$ este strict pozitivă pe tot domeniul ei de definiție: $(-2, +\infty)$. Rezultă că funcția este convexă.

Tabloul de variație:

x	-2		$-\frac{5}{3}$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-0{,}38$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\sqrt{2}$	$\nearrow$	$+\infty$
$f''(x)$		$+$	(m)		$+$			$+$	

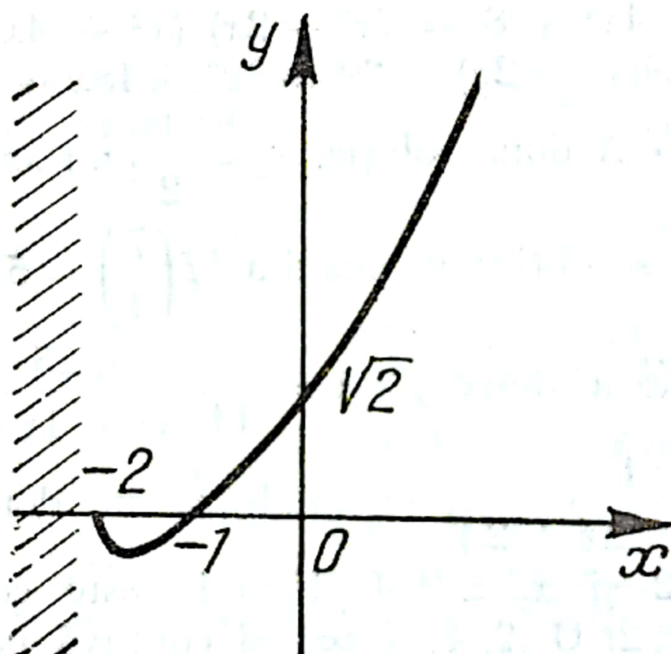


Fig. 6.37.

6.38. Domeniul de definiție al funcției este R. Avem

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{6x+27}{\sqrt{x^2+4x+29}+\sqrt{x^2-2x+2}} =$$

$= -3$ și $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$, deci $y = -3$ și $y = 3$ sînt asimptote orizontale la ramurile spre $-\infty$ și $+\infty$. Intersecția cu axa Ox este $\left(-\frac{9}{2}, 0\right)$, iar cea cu axa Oy: $(0, \sqrt{29}-\sqrt{2})$.

Ecuația $f'(x) = \dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+29}} - \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}} =$ $= 0$ conduce la $(x+2)\sqrt{x^2-2x+2} = (x-1)\cdot$ $\cdot\sqrt{x^2+4x+29}$, de unde deducem că soluțiile acestei ecuații trebuie să satisfacă condiția $x \in (-\infty, -2) \cup$ $\cup (1, +\infty)\left(\text{rezultă din } \dfrac{x+2}{x-1} = \dfrac{\sqrt{x^2+4x+29}}{\sqrt{x^2-2x+2}} > 0\right)$.

Ridicînd la pătrat ambii membri ai ecuației, vom obține:

$(x^2+4x+4)(x^2-2x+2) = (x^2-2x+1)(x^2+$ $+4x+29) \Leftrightarrow (x^2+4x)(x^2-2x) + 4(x^2-2x) +$ $+ 2(x^2+4x) + 8 = (x^2-2x)(x^2+4x) + (x^2+$ $+4x) + 29(x^2-2x) + 29 \Leftrightarrow 8x^2 - 18x + 7 = 0, \Rightarrow$ $\Rightarrow x_1 = \dfrac{7}{4}$. A doua soluție, $x_2 = \dfrac{1}{2}$, nu convine. Pentru $x = \dfrac{7}{4}$ se obține un maxim: $f\left(\dfrac{7}{4}\right) = 5$.

Derivata a doua $f''(x) = \dfrac{25}{(\sqrt{x^2+4x+29})^3} -$ $-\dfrac{1}{(\sqrt{x^2-2x+2})^3}$ se anulează în două puncte: $x_1 \approx -1,2$ și $x_2 \approx 2,4$. Funcția este convexă pe $(-\infty; -1,2) \cup (2,4; +\infty)$ și concavă pe $(-1,2; 2,4)$. Rezultă că punctele de mai sus sînt puncte de inflexiune.

Tabloul de variație:

x	$-\infty$		$-\frac{9}{2}$	$-1{,}2$	0		$\frac{7}{4}$	$2{,}4$	$+\infty$
$f'(x)$			$+$	$+$	$+$		0	$-$	
$f(x)$	-3	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$3{,}9$	$\nearrow$	5	$\searrow$	3
$f''(x)$			$+$	0	$-$		$-$	0	$+$

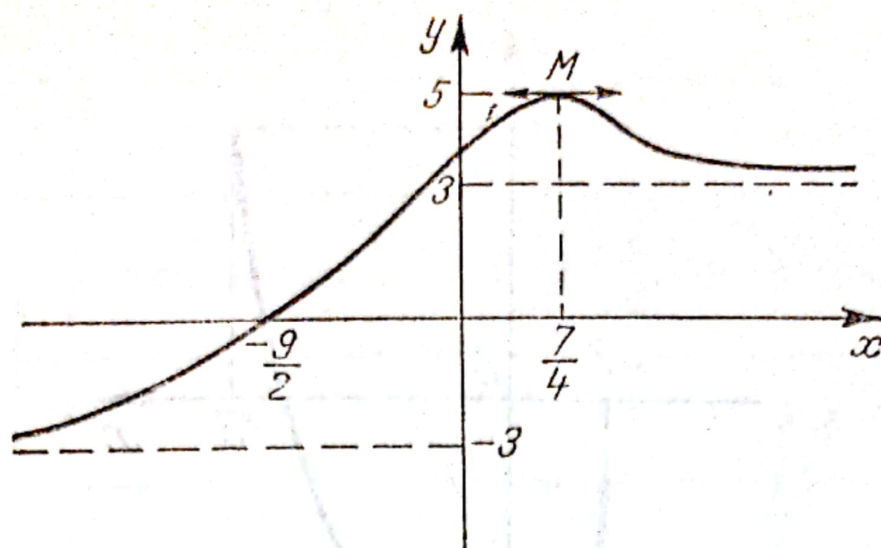


Fig. 6.38.

6.39. Din condiția $9 + 6x - 3x^2 \geqslant 0$ rezultă domeniul de definiție al funcției: $[-1, 3]$. Avem $f(-1) = -1$, $f(3) = 3$.

Intersecția cu axa Ox are loc pentru $x = \frac{3(1+\sqrt{5})}{4} \approx 2,4$, iar cea cu Oy în punctul $(0, -3)$.

Derivata întîi este $f' : (-1, 3) \to R$, dată de $f'(x) = 1 + \frac{3(x-1)}{\sqrt{9 + 6x - 3x^2}}$. Ecuația $f'(x) = 0$ are rădăcina $x = 0$, un punct de minim, căci $f'(x) < 0$, pentru $x \in [-1, 0)$ și $f'(x) > 0$, pentru $x \in (0, 3]$.

Derivata a doua, $f'' : (-1, 3) \to R$ cu $f''(x) = \frac{3}{(\sqrt{9 + 6x - 3x^2})^3} \cdot [9 + 6x - 3x^2 + (x-1)^2]$ este strict pozitivă. Funcția f este deci convexă.

Tabloul de variație:

x	-1		0		3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	-1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	3
$f''(x)$		$+$	$+$	$+$	

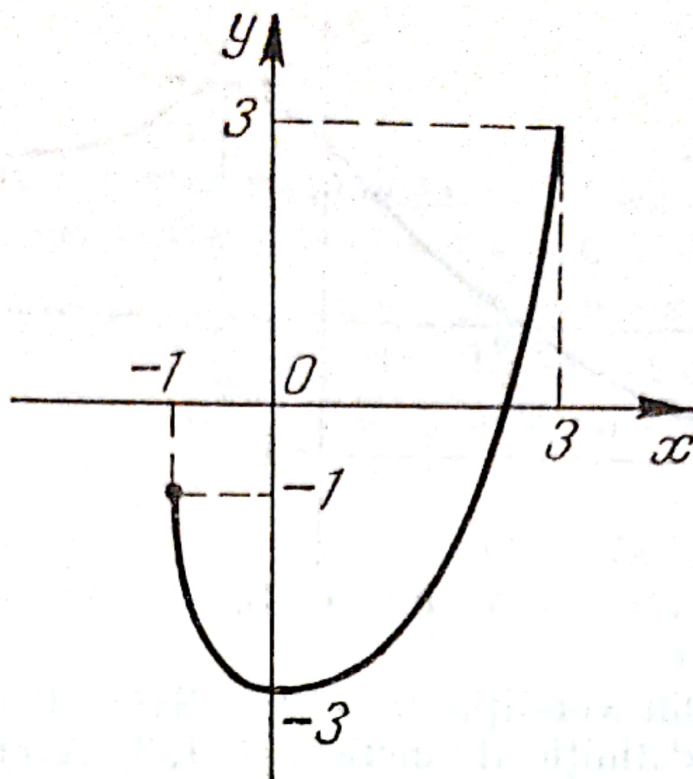


Fig. 6.39.

6.40. Domeniul de definiție al funcției este $[0, +\infty)$. Legea funcției se mai poate scrie $f(x) = |\sqrt{x} - 2| + |\sqrt{x} - 3|$, deci:

$$f(x) = (2 - \sqrt{x}) + (3 - \sqrt{x}) = 5 - 2\sqrt{x} \text{ pentru } x \in [0, 4],$$

$$f(x) = (\sqrt{x} - 2) + (3 - \sqrt{x}) = 1 \quad \text{pentru} \quad x \in [4, 9],$$

$$f(x) = \sqrt{x} - 2 + \sqrt{x} - 3 = 2\sqrt{x} - 5 \text{ pentru } x \in [9, +\infty).$$

Rezultă că

$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{x}} \text{ și } f''(x) = \frac{1}{2x\sqrt{x}}, \quad \text{pentru } x \in (0, 4);$$

$$f'(x) = 0 \text{ și } f''(x) = 0, \text{ pentru } x \in (4, 9),$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ și } f''(x) = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}, \text{pentru } x \in (9, +\infty).$$

Tabloul de variație al funcției este:

x	0		4		9		16		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-\infty$ $-$ $-$	$-\frac{1}{2}$ ‖	0 0 0	‖ $\frac{1}{2}$	$+$	$+$		$+\infty$
$f(x)$	5	↘	1	1	1	↗	3	↗	$+\infty$
$f''(x)$	‖	$+$	‖	0	‖		$-$		

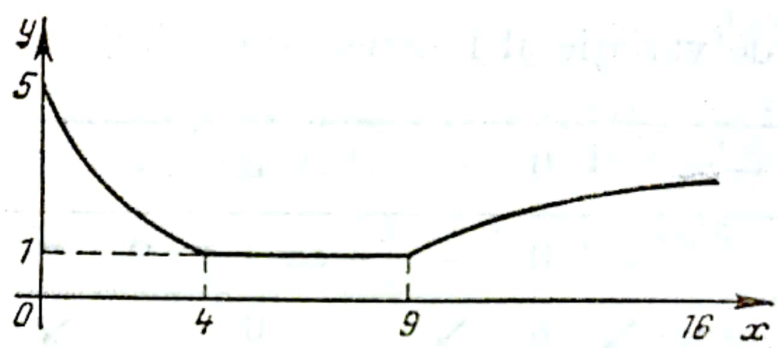


Fig. 6.40.

6.41. Domeniul de definiție al funcției este R. Avem $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ și $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

Intersecția cu axa Ox este $A(a, 0)$, iar cea cu axa Oy este $B(0, b)$.

Derivata întîi este $f'(x) = -\frac{b}{a}\frac{x^2}{(\sqrt[3]{a^3-x^3})^2}$. Ea se anulează în $x = 0$ și este negativă pentru $x \in R - \{a\}$. În $x = a$, $f'(a) = -\infty$, deci tangenta la curbă în $A(a, 0)$ este paralelă cu axa Oy.

Derivata a doua $f''(x) = \frac{-2a^2bx}{(a^3-x^3)\,(\sqrt[3]{a^3-x^3})^2}$ este pozitivă pentru $x \in (-\infty, 0) \cup (a, +\infty)$ și negativă pentru $x \in (0, a)$. Punctele $A(a, 0)$ și $B(0, b)$ sînt puncte de inflexiune.

Deoarece

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{b}{a} \cdot \lim_{x \to \pm\infty} \sqrt[3]{\frac{a^3}{x^3} - 1} = -\frac{b}{a}.$$

și

$$n = \lim_{x \to \pm\infty} \left(f(x) + \frac{b}{a} x \right) =$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{a^3}{(\sqrt[3]{a^3 - x^3})^2 - x\sqrt[3]{a^3 - x^3} + x^2} = 0,$$

dreapta $ay + bx = 0$ este asimptotă oblică la $-\infty$ și $+\infty$.

Tabloul de variație al funcției este

x	$-\infty$		0			a			$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	$-\infty$		$-\infty$	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	b	↘		0		↘	$-\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	$-\infty$		$+\infty$	$+$	0

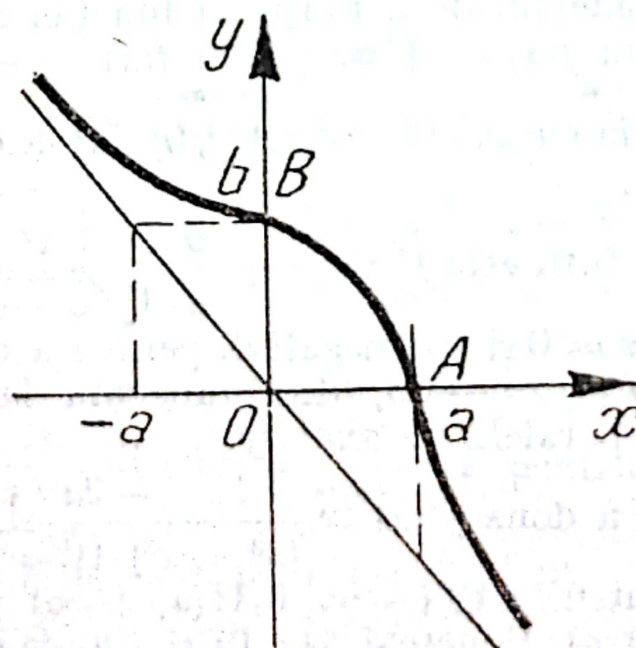


Fig. 6.41.

6.42. Domeniul de definiție al funcției este $(0, 1) \cup (1, +\infty)$, iar limitele funcției la capetele intervalelor în care este definită sînt:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 1}} \frac{1}{\ln x} = 0; \quad \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \frac{1}{\ln x} = -\infty, \quad \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \frac{1}{\ln x} = +\infty;$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\ln x} = 0.$$

Rezultă că $x = 1$ este asimptotă verticală, iar $y = 0$ este asimptotă orizontală la ramura spre $+\infty$ a graficului.

Derivata întîi $f'(x) = -\dfrac{1}{x(\ln x)^2}$ este definită pe $(0, 1) \cup (1, +\infty)$. Se observă imediat că $f'(x) < 0$ și că $f'_d(0) = -\infty$ iar $f'_d(1) = -\infty$. Într-adevăr, folosind regula lui l'Hospital $\left(\text{cazul } \dfrac{\infty}{\infty}\right)$, avem

$$f'_d(0) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{-\frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{2}{x} \ln x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{\frac{1}{x}}{2 \ln x} =$$

$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{2}{x}} = -\infty \text{ iar } f'_d(1) = \lim_{x \to 1} \frac{-1}{x(\ln x)^2} = -\infty.$$

Derivata a doua $f''(x) = \dfrac{1}{x^2 (\ln x)^2} \cdot \left(1 + \dfrac{2}{\ln x}\right)$ este definită pe $(0, 1) \cup (1, +\infty)$ și se anulează cînd $x = e^{-2}$. Funcția f fiind concavă pe $(0, e^{-2})$ și convexă pe $(e^{-2}, 1) \cup (1, +\infty)$, rezultă că $I\left(e^{-2}, -\dfrac{1}{2}\right)$ este punct de inflexiune.

Pe baza datelor de mai sus alcătuim tabloul de variație:

x	0		e^{-2}			1		$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$		$-$	$-$	$-\infty$	$-\infty$	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\searrow$	$-\infty$	$+\infty$	$\searrow$	0
$f''(x)$	$-$		0	$+$	$+$		$+$	

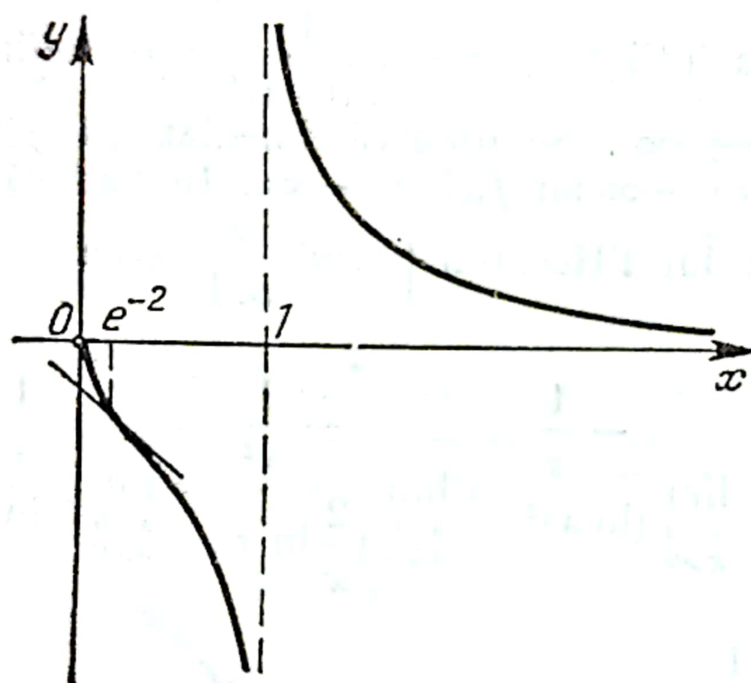


Fig. 6.42.

6.43. Domeniul de definiție al funcției este $(-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$.

Avem $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$ și $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} f(x) = -\infty$, deci $x = -2$ este asimptotă verticală.

Graficul funcției se intersectează cu axa Ox cînd $|x + 2| = 1$, deci pentru $x = -3$ și $x = -1$. Pentru $x = 0$, $f(0) = 2 \ln 2$, deci intersecția cu Oy este $(0, 2 \ln 2)$.

Derivata întîi $f'(x) = \dfrac{2}{x+2}$, definită pentru $x \in R - \{-2\}$, este negativă pentru $x \in (-\infty, -2)$ și pozitivă cînd $x \in (-2, +\infty)$.

Deoarece $f''(x) = -\dfrac{2}{(x+2)^2} < 0$, $x \neq -2$, funcția f este concavă.

Tabloul de variație:

x	$-\infty$		-3		-2	-2		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$-$			$+$		$+$		$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$2\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$
$f''(x)$		$-$		$-$			$-$		$-$		$-$	

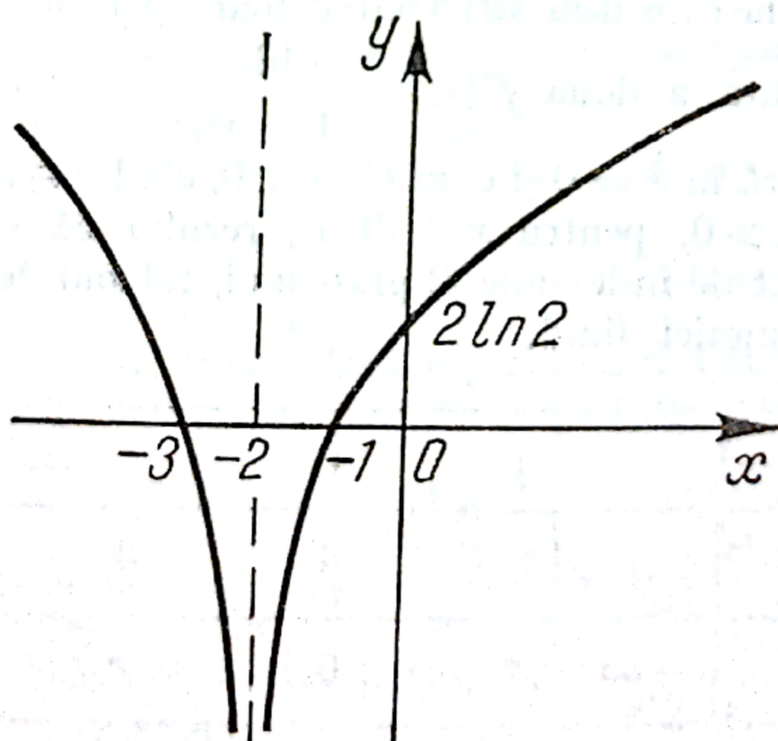


Fig. 6.43.

6.44. Punînd condițiile $1 - x^2 \neq 0$ și $\frac{1+x}{1-x} > 0$, rezultă domeniul de definiție al funcției: $(-1,1)$. Deoarece $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} f(x) = -\infty$ și $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = +\infty$, dreptele $x = -1$ și $x = 1$ sînt asimptote verticale.

Graficul este simetric în raport cu originea, căci:

$$f(-x) = \frac{-2x}{1-x^2} + \ln\frac{1-x}{1+x} =$$

$$= -\left(\frac{2x}{1-x^2} + \ln\frac{1+x}{1-x}\right) = -f(x).$$

Originea aparține graficului.

Derivata întîi $f' : (-1, 1) \to (0, \infty)$ este dată de

$$f'(x) = \frac{4}{(1-x^2)^2}.$$

Funcția este deci strict crescătoare și $f'(0) = 4$.

Derivata a doua $f''(x) = \frac{16x}{(1-x^2)^3}$, $x \in (-1, 1)$ se anulează în $x = 0$ și cum $f''(x) < 0$, cînd $x \in (-1, 0)$ iar $f''(x) > 0$, pentru $x \in (0, 1)$, rezultă că originea este punct de inflexiune al graficului, tabloul de variație al funcției fiind:

x	-1			0		1
$f'(x)$			$+$	4	$+$	
$f(x)$		$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$f''(x)$			$-$	0	$+$	

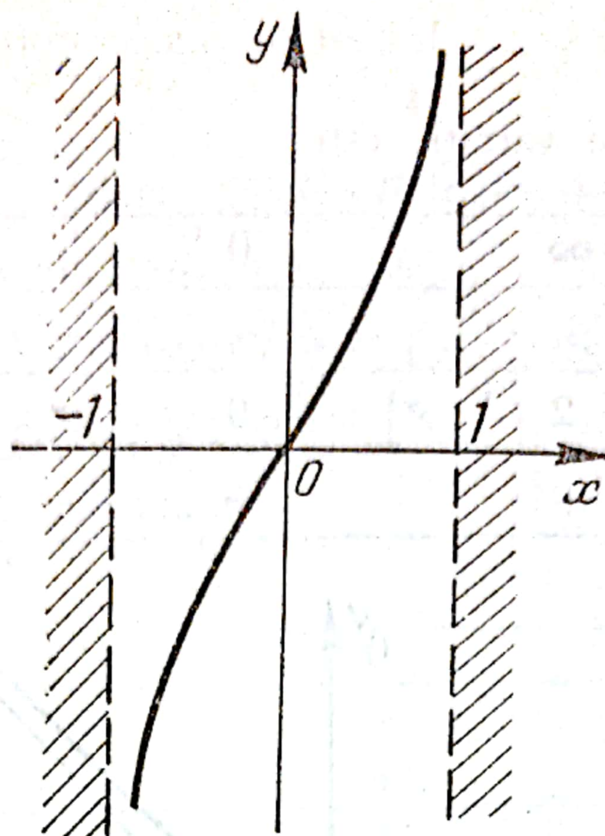


Fig. 6.44.

6.45. Domeniul de definiție al funcției este $(-\infty, +\infty)$. Avem $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\ln 2$ și $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Rezultă că $y = -\ln 2$ este asimptotă orizontală la ramura spre $-\infty$ a graficului. Originea aparține graficului.

Derivata întîi $f'(x) = \dfrac{e^x}{e^x + 1}$, $x \in R$ și derivata a doua $f''(x) = \dfrac{e^x}{(e^x + 1)^2}$; $x \in R$ fiind strict pozitive, funcția este strict crescătoare și convexă. Căutăm acum dacă există asimptotă oblică la ramura spre $+\infty$ a graficului:

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{\ln \dfrac{e^x + 1}{2}}{x} \right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\dfrac{e^x}{e^x + 1}}{1} = 1$$

(am aplicat regula lui l'Hospital),

$$n = \lim_{x \to +\infty} \left(\ln \frac{e^x + 1}{2} - x \right) = \lim_{x \to +\infty} \ln \frac{e^x + 1}{2e^x} = -\ln 2.$$

Dreapta $y = x - \ln 2$ este deci asimptotă la ramura spre $+\infty$.

Tabloul de variație este:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$+$	$+$	
$f(x)$	$-\ln 2$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$f''(x)$	$+$		$+$	$+$	

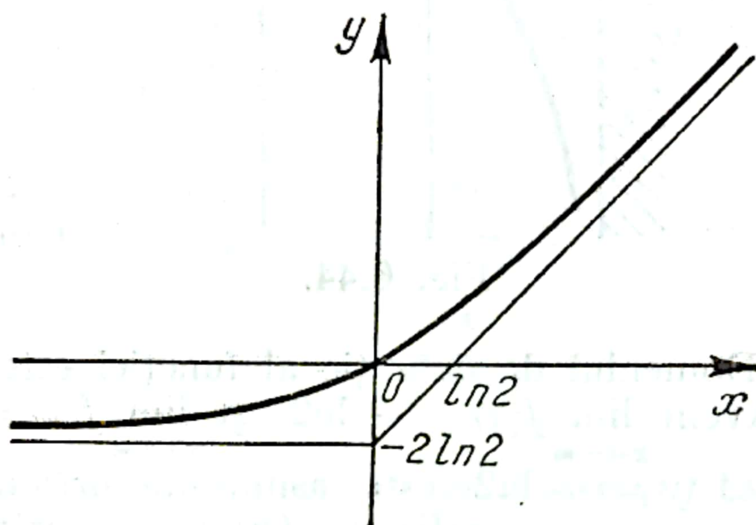


Fig. 6.45.

6.46. Funcția este definită pe $(-\infty, +\infty)$ și ia valori strict pozitive.

Deoarece $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$, vom avea

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2 \text{ și } \lim_{x \to +\infty} f(x) = 1,$$

deci $y = 2$ și $y = 1$ sînt asimptote orizontale la ramura spre $-\infty$, respectiv spre $+\infty$ a graficului. Intersecția cu Oy o constituie punctul $(0, 3/2)$.

Derivata întîi există pentru orice $x \in R$ și $f'(x) = -\frac{e^x}{(1 + e^x)^2} < 0$.

Observăm că $f'(0) = -\frac{1}{4}$ și că $f'(-\infty) =$
$= f'(+\infty) = 0$.

Derivata a doua $f'': R \to R$ dată de $f''(x) = e^x \cdot$
$\cdot \frac{e^x - 1}{(e^x + 1)^3}$ se anulează în $x = 0$.

Cum $f''(x) < 0$ pentru $x \in (-\infty, 0)$ și $f''(x) > 0$ pentru $x \in (0, +\infty)$, punctul $\left(0, \frac{3}{2}\right)$ este punct de inflexiune al graficului.

Tabloul de variație:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$	0	$-$	$-\frac{1}{4}$	$-$	0
$f(x)$	2	↘	$\frac{3}{2}$	↘	1
$f''(x)$		$-$	0 (i)	$+$	

Punctul $S\left(0, \frac{3}{2}\right)$ este centru de simetrie al graficului. Într-adevăr, avem

$$f(-x) = 1 + \frac{1}{1 + e^{-x}} = 1 + \frac{e^x}{1 + e^x}, \text{ de unde:}$$

$$\frac{f(x) + f(-x)}{2} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{1 + e^x} + 1 + \frac{e^x}{1 + e^x}\right) = \frac{3}{2}.$$

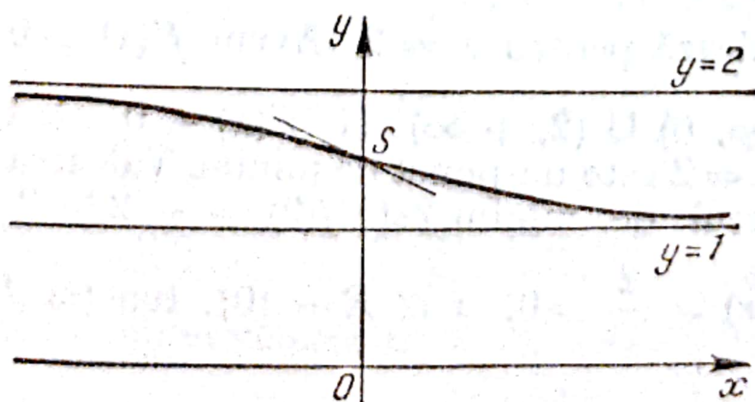


Fig. 6.46.

6.47. Domeniul de definiție al funcției este $R-\{0\}$. Avem

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty,\ \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty \text{ și}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (x-2-2\ln x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(1-\frac{2}{x}-\right.$$
$$\left.-2\frac{\ln x}{x}\right) = +\infty\cdot 1 = +\infty,$$

căci:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$ (am aplicat regula lui l'Hospital)

Rezultă că $x=0$ este asimptotă verticală.

Graficul se intersectează cu Ox în trei puncte ale căror abscise: x_1, x_2 și x_3 aparțin intervalelor $(-1, 0)$, $(0, 1)$ respectiv $(5,6)$ Într-adevăr, acest rezultat se datorează relațiilor următoare:

$$f(-1) = -3 < 0 \text{ și } \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = +\infty,\ \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) =$$
$$= +\infty \text{ și } f(1) = -1 < 0,\quad f(5) = 3-2\ln 5 < 0 \text{ și}$$
$$f(6) = 4-2\ln 6 > 0.$$

Derivata întîi $f' : R-\{0\}\to R$, dată de legea $f'(x) = \frac{x-2}{x}$, se anulează pentru $x=2$. Avem $f'(x)>0$ pentru $x\in(-\infty, 0)\cup(2, +\infty)$ și $f'(x)<0$ cînd $x\in(0, 2)$, deci $x=2$ este un punct de minim. Valoarea funcției în punctul de minim este $f(2) = -2\ln 2$.

Deoarece $f''(x) = \frac{2}{x^2} > 0$, $x\in R-\{0\}$, funcția f este convexă.

Tabloul de variație:

x	$-\infty$		x_1		0		x_2		2		x_3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	‖	$-$	$-$	$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0	↘	$-2\ln 2$	↗	0	↗	$+\infty$
$f''(x)$		$+$			‖			$+$		$+$			

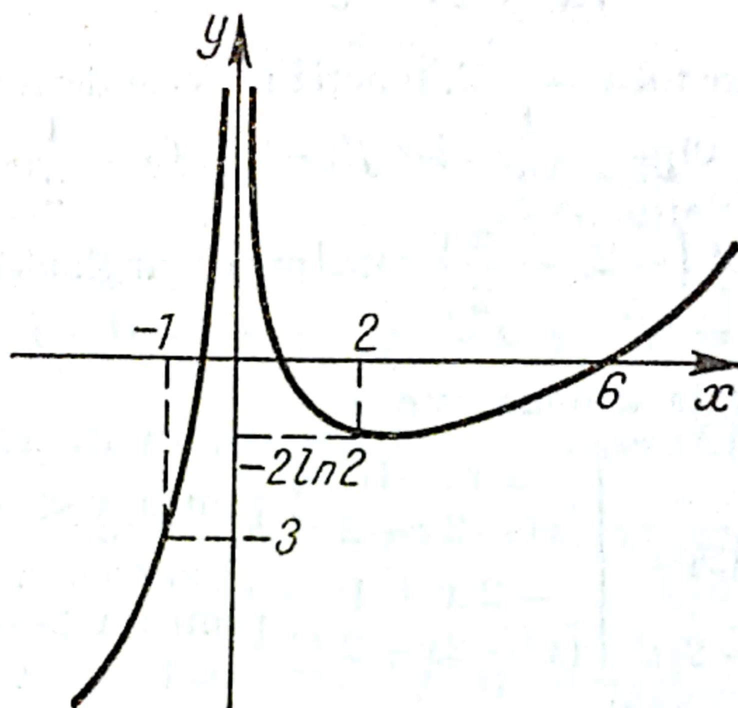


Fig. 6.47.

6.48. Domeniul de definiție al funcției este dat de valorile lui x, pentru care avem:

$$\frac{x^2}{2x^2+4x+4} \leqslant 1 \Rightarrow (x+2)^2 \geqslant 0$$

$$\text{și deci } f : R \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Avem $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{\pi}{4}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\pi}{4}$, deci graficul are asimptotele orizontale: $y = -\frac{\pi}{4}$ la ramura grafi-

cului spre $-\infty$ și $y = \frac{\pi}{4}$ la ramura spre $+\infty$. Funcția se anulează pentru $x = 0$.

Derivata întii este dată de legea:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-1}{x^2 + 2x + 2}, & \text{pentru } x < -2, \\ \dfrac{1}{x^2 + 2x + 2}, & \text{pentru } x > -2. \end{cases}$$

În punctul $x = -2$, funcția nu este derivabilă, căci $f'(-2-0) = -\frac{1}{2}$, iar $f'(-2+0) = \frac{1}{2}$, astfel că punctul $A\left(-2, -\frac{\pi}{2}\right)$ este punct unghiular al graficului.

Derivata a doua este

$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{2(x+1)}{(x^2+2x+2)^2}, & \text{pentru } x < -2 \\ \dfrac{-2(x+1)}{(x^2+2x+2)^2}, & \text{pentru } x > -2. \end{cases}$$

Ea se anulează pentru $x = -1$, deci punctul $B\left(-1, -\frac{\pi}{4}\right)$ este punct de inflexiune.

Tabloul de variație:

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$	$+$			$+$		
$f(x)$	$-\frac{\pi}{4}$	$\searrow$	$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	$-\frac{\pi}{4}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{4}$
$f''(x)$		$-$	|	$+$	0	$-$			

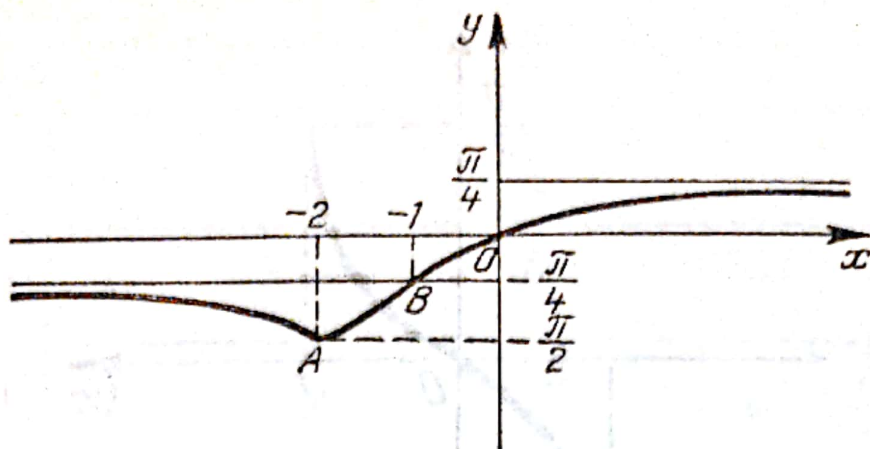


Fig. 6.48.

6.49. După cum ușor se poate observa că: $f(x) = -f(-x)$, adică graficul funcției, este simetric față de origine. $x \in [-1, 1]$.

Avem $f(-1) = -\frac{\pi}{2}$, $f(0) = 0$ și $f(1) = \frac{\pi}{2}$.

Derivata întîi $f'(x) = \frac{2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$ se anulează în $x=0$. Acesta este, după cum se va vedea, un punct de inflexiune. Avem $\lim\limits_{x \to \pm 1} f'(x) = +\infty$.

Derivata a doua este $f''(x) = \frac{2x(2-x^2)}{(\sqrt{1-x^2})^3}$, $x \in (-1, 1)$. Ea se anulează în $x = 0$ (punct de inflexiune).

Tabloul de variație:

x	-1			0		1
$f'(x)$		$+\infty$	$+$	0	$+$	$+\infty$
$f(x)$	$-\frac{\pi}{2}$		↗	0	↗	$\frac{\pi}{2}$
$f''(x)$			$-$	0	$+$	

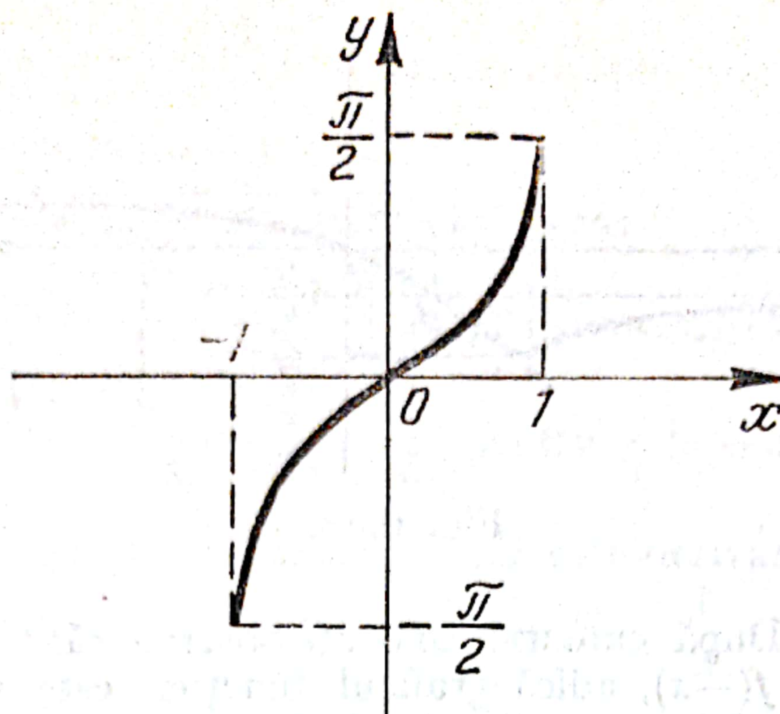


Fig. 6.49.

6.50. Funcția este definită pentru orice $x \in R$, are perioada 2π și este simetrică față de origine, căci $f(x) = -f(-x)$. O vom studia pentru $x \in [0, \pi]$.

Avem $f(0) = 0 = f(\pi)$ și $f(x) > 0$, pentru $x \in (0, \pi)$.

Derivata întîi

$$f'(x) = \frac{2\cos x - 1}{(2-\cos x)^2}$$

se anulează pentru $x \in [0, \pi]$ în $x = \frac{\pi}{3}$. Acesta e un punct de maxim, iar $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Derivata a doua este

$$f''(x) = \frac{-2\sin x(1+\cos x)}{(2-\cos x)^3} < 0$$

pentru $x \in (0, \pi)$.

Observație. Punctele $x = k\pi$, $k \in Z$ sînt puncte de inflexiune.

Tabloul de variație al funcției este următorul:

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$f'(x)$	1	$+$	0	$-$	$-\frac{1}{3}$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\searrow$	0
$f''(x)$	0	$-$		$-$	0

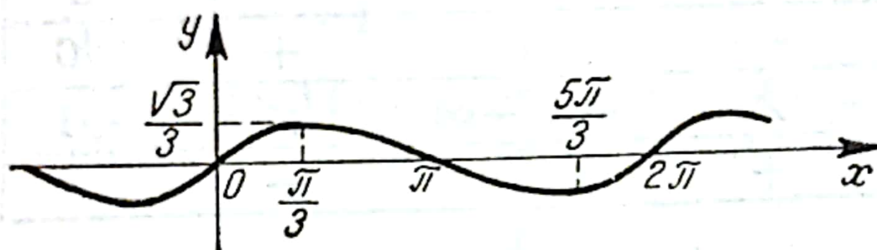


Fig. 6.50.

6.51. Funcția $f(x) = \frac{1-\cos^2 x}{(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)} =$
$= \frac{\sin^2 x}{\cos 2x}$ nu este definită pentru $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in Z$. Deoarece funcția este pară și are perioada π, o vom studia pe mulțimea $\left[0, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Avem $f(0) = 0$, $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{4}\\ x<\frac{\pi}{4}}} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{4}\\ x>\frac{\pi}{4}}} f(x) = -\infty$

și $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$.

Rezultă că $x = \frac{\pi}{4}$ este asimptotă verticală. Derivata întîi $f'(x) = \frac{\sin 2x}{\cos^2 2x}$ se anulează pentru $x = 0$ și este pozitivă pentru $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Derivata a doua este $f''(x) = \dfrac{1 + 2\sin^2 2x}{(\cos 2x)^3}$.

Funcţia este deci convexă pentru $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{4}\right)$ şi concavă cînd $x \in \left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Tabloul de variaţie:

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	0	$+$	|	$+$	0
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$ | $-\infty$	$\nearrow$	-1
$f''(x)$		$+$	|	$-$	

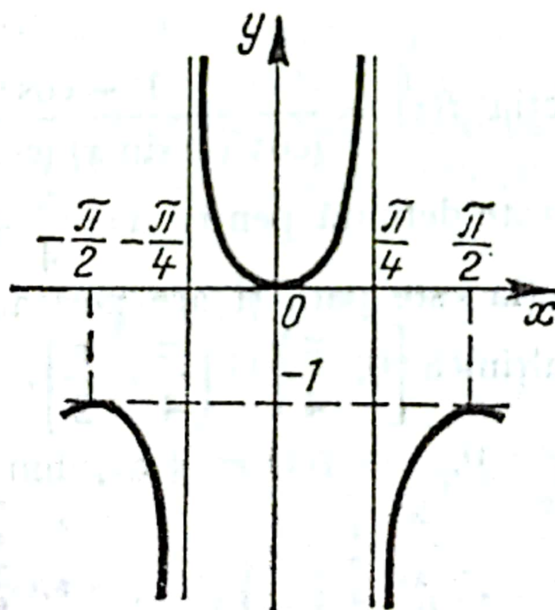


Fig. 6.51.

6.52. Pentru $x \neq k\pi$, $k \in Z$, legea funcţiei se mai scrie

$$f(x) = \frac{3 \sin x - 4 \sin^3 x}{\sin x} = 3 - 4 \sin^2 x = 2\cos 2x + 1,$$

iar cînd $x = k\pi$ funcţia prezintă forma $\dfrac{0}{0}$.

Avem:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin x}=\lim_{x\to 0} 3\,\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{x}{\sin x}=3,\quad \text{deci}\quad f(k\pi)=3.$$

Perioada este aceeași ca a lui $\cos 2x$, adică π. Funcția fiind pară este suficient să o studiem pe intervalul $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, căci graficul este simetric față de axa Oy.

Intersecțiile cu axa Ox rezultă din ecuația $\cos 2x = -\frac{1}{2} = \cos\frac{2\pi}{3}$, de unde $x = \pm\frac{\pi}{3}$. Avem $f(0) = 3$ și $f\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) = -1$.

Din graficul funcției $g(x) = f(x) - 1 = 2\cos 2x$, $x \in R$ se obține cu ușurință cel al funcției din enunț.

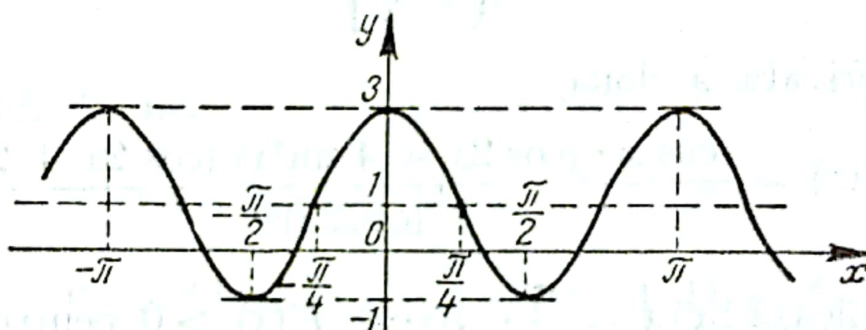


Fig. 6.52.

6.53. Funcția este definită pentru $x \in R - \bigcup_{k\in Z}\left\{\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\right\}$, are perioada 2π și este simetrică față de axa Oy, căci $f(x) = f(-x)$. Mai mult, cum

$$f\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = -f\left(\frac{\pi}{2}+x\right),$$

punctul $x = \frac{\pi}{2}$ este centru de simetrie și intervalul $[0, \pi]$. Vom studia deci funcția pe mulțimea

$$\left[0, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Avem $f(0) = 1$, $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{4} \\ x < \frac{\pi}{4}}} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{4} \\ x > \frac{\pi}{4}}} f(x) = -\infty$ și $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Rezultă că $x = \frac{\pi}{4}$ este asimptotă verticală.

Derivata întîi este

$$f'(x) = \frac{\sin x\,(2\cos^2 x + 1)}{\cos^2 2x}.$$

Ea se anulează în $x = 0$ și este pozitivă pentru

$$x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Derivata a doua,

$$f''(x) = \frac{\cos x \cdot (\cos 2x + 4\sin^2 x)(\cos 2x + 2)}{(\cos 2x)^3}$$

se anulează în $x = \frac{\pi}{2}$. Avem $f''(x) > 0$ pentru

$x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$, iar $f''(x) < 0$, pentru $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Tabloul de variație:

x	0			$\frac{\pi}{4}$			$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	0	$+$		|		$+$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$+\infty$	|	$-\infty$	$\nearrow$	0
$f''(x)$		$+$		|		$-$	0 (i)

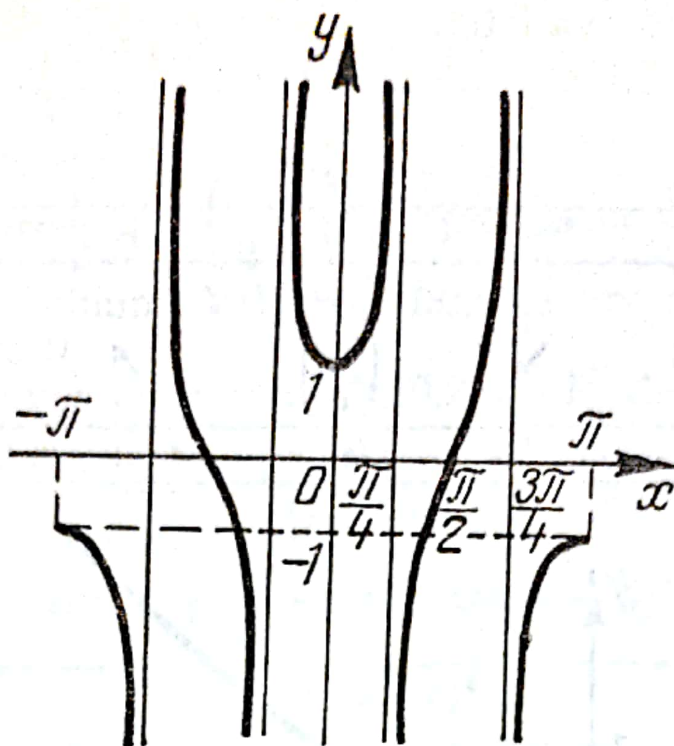


Fig. 6.53.

6.54. Avem:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^x = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} e^{x\ln x} = e^{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} -\frac{\ln\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}} = e^{-0} = 1 \text{ și } \lim_{x\to\infty} x^x = +\infty.$$

Derivata întîi $f': (0, +\infty) \to R$, dată de legea $f'(x) = x^x(1 + \ln x)$, se anulează pentru $x = \frac{1}{e} \approx 0{,}37$. Acesta este un punct de minim, deoarece pentru $x < \frac{1}{e}$ derivata întîi este negativă, iar pentru $x > \frac{1}{e}$ derivata este pozitivă.

Derivata a doua

$$f''(x) = x^x \cdot \frac{x(1 + \ln x)^2 + 1}{x},$$

$(x > 0)$ este strict pozitivă, deci f este convexă.

Tabloul de variație:

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$f'(x)$	|	$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$	$\nearrow$	$+\infty$
$f''(x)$	|	$+$	(m)	$+$	

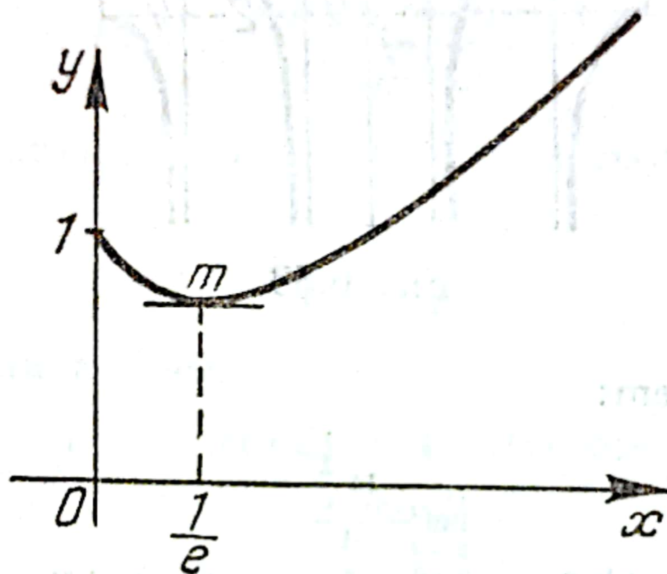


Fig. 6.54.

6.55. Funcția este definită în mulțimea $R - \bigcup_{k\in Z} \{2k\pi\}$. Fiind o funcție periodică, cu perioada 2π, o vom studia doar pe intervalul $(0, 2\pi)$.

Avem $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (f(x) = +\infty$ și $\lim\limits_{\substack{x\to 2\pi\\ x<2\pi}} f(x) = +\infty$, deci $x = 0$ și $x = 2\pi$ sînt asimptote verticale.

Intersecția cu axa Ox este $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

Derivata întîi este $f'(x) = \frac{1 - (\sin x + \cos x)}{(1 - \cos x)^2} =$

$$= \frac{1 - \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{(1 - \cos x)^2}, \quad x \in (0,2\pi).$$

Cînd $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, avem $f'(x) < 0$, iar cînd $x \in \left(\frac{\pi}{2}, 2\pi\right)$; avem $f'(x) > 0$.

În $x = \frac{\pi}{2}$, $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, deci $x = \frac{\pi}{2}$ este un punct de minim. Valoarea funcției în punctul de minim este 0.

Derivata a doua este f'': $(0,2\pi) \to R$, dată de legea

$$f''(x) = \frac{\sin^2 x + 1 + \sin x + \cos x - \sin x \cdot \cos x}{(1 - \cos x)^3} =$$

$$= \frac{\sin^2 x + \frac{1}{2}(\sin x + \cos x - 1)^2}{(1 - \cos x)^3}.$$

Se observă că pentru $x \in (0, 2\pi)$ avem $f''(x) > 0$, deci f este convexă.

Tabloul de variație:

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$f'(x)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$
$f''(x)$		$+$		$+$	(m)	$+$		$+$		$+$	

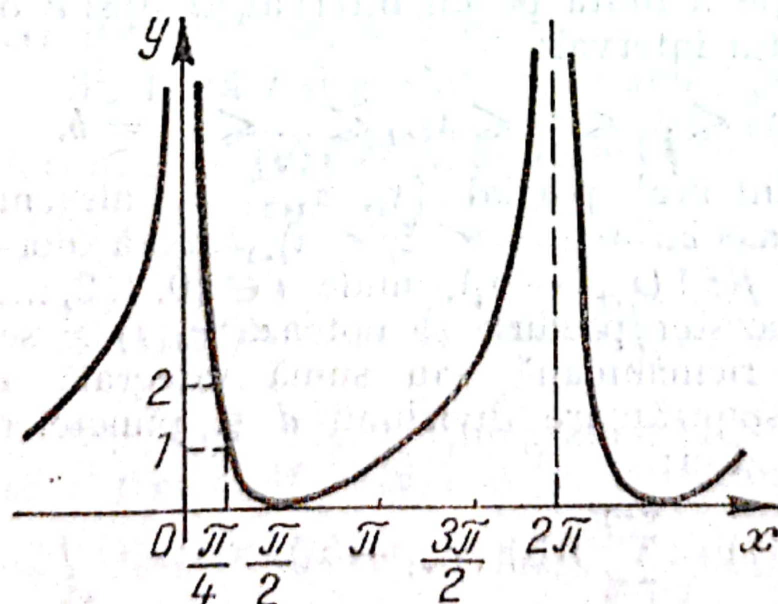


Fig. 6.55.

Capitolul VII

INTEGRALA ÎN SENSUL LUI RIEMANN. PRIMITIVE

Definiția integralei în sensul lui Riemann

Fie $[a, b]$ un interval (închis și mărginit), $a \leqslant b$. O familie finită de puncte $d:(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)$, astfel că:

$$a = x_0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_i \leqslant x_{i+1} \leqslant \ldots \leqslant \leqslant x_{n-1} \leqslant x_n = b$$

se numește diviziune a intervalului $[a,b]$. Fiecare din intervalele $[x_i, x_{i+1}]$ se numește interval parțial al diviziunii d.

Lungimea celui mai mare interval parțial al unei diviziuni $d:(x_0, x_1, \ldots, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ se numește norma diviziunii d și se notează $\nu(d)$, deci

$$\nu(d) = \max_{0 \leqslant i \leqslant n-1} (x_{i+1} - x_i).$$

Fie f o funcție definită pe un interval $[a, b]$ și d o diviziune a acestui interval:

$$d : a = x_0 \leqslant x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_i \leqslant x_{i+1} \leqslant \ldots \leqslant x_n = b.$$

În fiecare interval parțial $[x_i, x_{i+1}]$ să alegem un punct intermediar ξ_i, $x_i \leqslant \xi_i \leqslant x_{i+1}$ și să formăm produsele $f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$, unde $i \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$. Suma acestor produse se notează $\sigma_d(f)$ și se numește sumă riemanniană sau sumă integrală a funcției f, corespunzătoare diviziunii d și punctelor intermediare ξ_i, deci:

$$\sigma_d(f) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i).$$

Definiție. Se spune că funcția f este integrabilă (în sensul lui Riemann) pe intervalul $[a, b]$, dacă pentru orice șir de diviziuni (d_n) cu norma tinzînd către 0 și pentru orice alegere a punctelor intermediare ξ_i, șirurile corespunzătoare (σ_{d_n}) de sume integrale au o limită finită comună I.

Numărul I se numește integrala funcției f pe intervalul $[a, b]$ (în sensul lui Riemann) și se notează

$$I = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Notația $\int_a^b f(x)\, dx$ se citește integrală de la a la b din $f(x)dx$.

Proprietăți

1°. $\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx.$

2°. $\int_a^a f(x)\, dx = 0.$

3°. $\int_a^b m\, dx = m(b-a).$

4°. $\int_a^b [mf(x) + ng(x)]\, dx = m\int_a^b f(x)\, dx + n\int_a^b g(x)\, dx$

oricare ar fi $m, n \in R$.

5°. Dacă f și g sînt integrabile pe $[a, b]$ și dacă $f(x) \leqslant g(x)$, $(\forall)x \in [a, b]$ atunci $\int_a^b f(x)\, dx \leqslant \int_a^b g(x)\, dx$.

6°. Dacă f este integrabilă pe $[a, b]$ și $f(x) \geqslant 0$,

$$(\forall)x \in [a, b] \text{ atunci } \int_a^b f(x)\, dx \geqslant 0.$$

7°. Dacă f este integrabilă pe $[a, b]$ și dacă $m \leqslant f(x) \leqslant M$, $(\forall)x \in [a, b]$ atunci $m(b-a) \leqslant \leqslant \int_a^b f(x)\, dx \leqslant M(b-a)$.

8°. Dacă f este integrabilă pe $[a, b]$, atunci funcţia $|f|$ este integrabilă pe $[a, b]$ şi

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

9°. Dacă f este continuă pe $[a, b]$, există un punct $\xi \in (a, b)$ astfel ca

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a).$$

10°. Dacă f este integrabilă pe $[a, b]$, atunci oricare ar fi punctul $c \in [a, b]$ avem

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Clase de funcţii integrabile. Exemple

Teorema 1. Orice funcţie f monotonă pe $[a, b]$ este integrabilă pe $[a, b]$.

Teorema 2. Orice funcţie f continuă pe $[a,b]$ este integrabilă pe $[a, b]$.

Formula de integrare prin părţi pentru integrale definite este:

$$\int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx = [f(x)\,g(x)]\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx.$$

Schimbarea de variabilă la integralele definite

Fie I, J, două intervale şi funcţiile

$$u(x) : I \to J,\quad f(t) : J \to R.$$

Teorema 1. Dacă $f(t)$ este continuă pe J şi $u(x)$ are derivată $u'(x)$ continuă pe I, şi dacă a,b sînt două puncte din I, atunci:

$$\int_a^b f(u(x))\,u'(x)\,dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t)\,dt,\quad \text{unde}\quad f : I \to$$

este continuă.

Această egalitate se numeşte prima formulă de schimbare de variabilă.

Teorema 2. Dacă $f(t)$ este continuă pe J și $u(x)$ este strict monotonă pe I, dacă inversa sa $v = u^{-1} : J \to I$ are derivată continuă v' pe J și dacă $a,\ b \in I$, atunci

$$\int_a^b f(u(x))\,dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t)\ v'(t)\,dt,$$

unde $u(x)$ este monotonă pe $[a, b]$.

Primitive

Definiție. Fie $I \subseteq R$ un interval și $f : I \to R$ o funcție. Vom spune că funcția $F : I \to R$ este o primitivă a lui f dacă sînt îndeplinite simultan condițiile:

1°. F este continuă pe I.

2°. există $A \subseteq I$ o mulțime finită sau numerabilă astfel încît F este derivabilă pe $I - A$, unde A nu este mulțimea vidă.

3°. $F'(x) = f(x)$, $(\forall) x \in I - A$.

De obicei se notează $F(x)$ cu $\int f(x)\,dx$.

Teoremă. Fie $I \subseteq R$ un interval, $f : I \to R$ o funcție continuă și $F : I \to R$ o funcție definită astfel: $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ pentru orice $x \in I$, unde $x_0 \in I$ este fixat. Atunci F este derivabilă și avem $F'(x) = f(x)$, $(\forall) x \in I$.

Corolar. Fie $I \subseteq R$ un interval și $f : I \to R$ o funcție continuă.
Atunci f admite cel puțin o primitivă F pe I și avem:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a), \quad (\forall) a,\ b \in I. \qquad (1)$$

Relația (1) se numește *formula Newton—Leibniz.*

Primitivele unor funcții uzuale *

$$1°.\ \int x^n\,dx = \begin{cases} \dfrac{x^{n+1}}{n+1} & \text{pentru } \forall n \in R - \{-1\} \\ \ln|x| & \text{pentru } n = -1. \end{cases}$$

* Nu s-a mai scris constanta $+C$ după fiecare primitivă.

2°. $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a},$ $(a \neq 0)$

3°. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x - a}{x + a} \right|,$ $(a \neq 0)$

4°. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a},$ $(a \neq 0)$

5°. $\displaystyle\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a},$ unde $a \in (0,1) \cup (1, +\infty)$

6°. $\displaystyle\int \sin x \, dx = -\cos x$

7°. $\displaystyle\int \cos x \, dx = \sin x,$

8°. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x,$

9°. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x,$

10°. $\displaystyle\int \operatorname{tg} x \, dx = -\ln |\cos x|,$

11°. $\displaystyle\int \operatorname{ctg} x \, dx = \ln |\sin x|,$

12°. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right|,$

13°. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right|,$

14°. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a^2} \right|,$

unde $(a \neq 0)$.

Teoremă. Dacă f şi g sînt două funcţii definite pe un interval I şi au derivate continue f' şi g' pe I, atunci are loc formula de integrare prin părţi:

$$\int f(x)\, g'(x)\, \mathrm{d}x = f(x)\, g(x) - \int f'(x)\, g(x)\, \mathrm{d}x.$$

Metodele de calcul ale primitivelor prin schimbare de variabilă rezultă din următoarele două teoreme:

Teoremă. Fie funcţiile $u(x) : I \to J$ şi $f(t) : J \to R$, unde I şi J sînt intervale. Dacă $u(x)$ este derivabilă pe I, iar $f(t)$ are primitive pe J, atunci funcţia $f(u(x)) \cdot u'(x) : I \to R$ are primitive pe I. În acest caz, dacă

$$\int f(t)\, \mathrm{d}t = F(t) + C,$$

atunci

$$\int f(u(x)) \cdot u'(x)\, \mathrm{d}x = F(u(x)) + C.$$

Teoremă. Fie funcţiile $u(x) : I \to J$ şi $f(t) : J \to R$, unde I şi J sînt intervale. Dacă funcţia $f(t)$ este continuă pe J, dacă funcţia $u(x)$ este strict monotonă şi derivabilă pe I, iar inversa sa $v(t) : J \to I$ are derivată continuă $v'(t)$ pe J şi dacă

$$\int f(t)\, v'(t)\, \mathrm{d}t = F(t) + C,$$

atunci

$$\int f(u(x))\, \mathrm{d}x = F(u(x)) + C.$$

Primitivele funcţiilor raţionale

Primitivele funcţiilor raţionale sînt funcţii elementare şi, dacă se cunosc rădăcinile polinomului de la numitor, primitivele funcţiilor raţionale se pot calcula. O funcţie raţională este de forma:

$$f(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$$

unde $A(x)$ şi $B(x)$ sînt polinoame cu coeficienţi reali.

Pentru a integra o funcție rațională, vom avea în vedere următoarea:

Teoremă. Dacă $\frac{A(x)}{B(x)}$ este o funcție rațională, iar

$$B(x) = a(a_1x + b_1)^{\alpha_1} (a_2x + b_2)^{\alpha_2} \dots (a_sx +$$

$$+ b_s)^{\alpha_s} (p_1x^2 + q_1x + r_1)^{\beta_1} \dots (p_tx^2 + q_tx + r_t)^{\beta_t},$$

unde $a, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_s, b_s, p_1, q_1, r_1, \dots, p_t, q_t, r_t$ sînt numere reale, $a, a_1, a_2, \dots, a_s, p_1, p_2, \dots, p_t, r_1, r_2, \dots$ $\dots, r_t$ fiind diferite de zero, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta_1, \beta_2, \dots \beta_t$ sînt numere naturale, iar $q_i^2 - 4p_ir_i < 0$, $(\forall)\ i \in \{1, 2, \dots, t\}$, atunci avem scrierea unică

$$\frac{A(x)}{B(x)} = Q(x) + \sum_{i=1}^{\alpha_1} \frac{A_1^i}{(a_1x + b_1)^i} + \dots +$$

$$+ \sum_{i=1}^{\beta_1} \frac{M_1^ix + N_1^i}{(p_1x^2 + q_1x + r_1)^i} + \dots,$$

unde $Q(x)$ este cîtul împărțirii lui $A(x)$ la $B(x)$, iar $A_1^1, A_1^2, \dots, A_1^{\alpha_1}, \dots, M_1^1, N_1^1, \dots M_1^{\beta_1}, N_1^{\beta_1} \dots$ sînt numere reale.

Ținînd seama de această teoremă, calculul unei primitive a unei funcții raționale se reduce la calculul integralelor de forma

1°. $\int \frac{1}{(x - x_0)^n} \mathrm{d}x$ unde $(n \in N)$.

2°. $\int \frac{Ax + B}{(ax^2 + bx + c)^n}$ unde $(b^2 - 4ac < 0,\ ac \neq 0,$ $n \in N)$.

Pentru integralele de forma 1° avem:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x - x_0)^n} = \begin{cases} \ln|x - x_0| + C & \text{dacă } n = 1 \\ \frac{1}{(n-1)(x - x_0)^{n-1}} + C & \text{dacă } n \geqslant 2 \end{cases}$$

Pentru a integra o funcție rațională, vom avea în vedere următoarea:

Teoremă. Dacă $\frac{A(x)}{B(x)}$ este o funcție rațională, iar

$$B(x) = a(a_1x + b_1)^{\alpha_1} (a_2x + b_2)^{\alpha_2} \dots (a_sx +$$

$$+ b_s)^{\alpha_s}(p_1x^2 + q_1x + r_1)^{\beta_1} \dots (p_tx^2 + q_tx + r_t)^{\beta_t},$$

unde $a, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_s, b_s, p_1, q_1, r_1, \dots, p_t, q_t, r_t$ sînt numere reale, $a, a_1, a_2, \dots, a_s, p_1, p_2, \dots, p_t, r_1, r_2, \dots$ $\dots, r_t$ fiind diferite de zero, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta_1, \beta_2, \dots \beta_t$ sînt numere naturale, iar $q_i^2 - 4p_ir_i < 0$, $(\forall)\ i \in \{1, 2, \dots, t\}$, atunci avem scrierea unică

$$\frac{A(x)}{B(x)} = Q(x) + \sum_{i=1}^{\alpha_1} \frac{A_1^i}{(a_1x + b_1)^i} + \dots +$$

$$+ \sum_{i=1}^{\beta_1} \frac{M_1^ix + N_1^i}{(p_1x^2 + q_1x + r_1)^i} + \dots,$$

unde $Q(x)$ este cîtul împărțirii lui $A(x)$ la $B(x)$, iar $A_1^1, A_1^2, \dots, A_1^{\alpha_1}, \dots, M_1^1, N_1^1, \dots M_1^{\beta_1}, N_1^{\beta_1} \dots$ sînt numere reale.

Ținînd seama de această teoremă, calculul unei primitive a unei funcții raționale se reduce la calculul integralelor de forma

1°. $\int \frac{1}{(x - x_0)^n} dx$ unde $(n \in N)$.

2°. $\int \frac{Ax + B}{(ax^2 + bx + c)^n}$ unde $(b^2 - 4ac < 0,\ ac \neq 0,$ $n \in N)$.

Pentru integralele de forma 1° avem:

$$\int \frac{dx}{(x - x_0)^n} = \begin{cases} \ln |x - x_0| + C & \text{dacă } n = 1 \\ \frac{1}{(n - 1)(x - x_0)^{n-1}} + C & \text{dacă } n \geq 2 \end{cases}$$

Pentru integralele de forma 2° avem

$$I = \int \frac{Ax + B}{(ax^2 + bx + c)^n}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a^n}\int \frac{(Ax + B)\,\mathrm{d}x}{\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + k^2\right]^n}$$

$\left(\text{am notat } k^2 = \dfrac{4ac - b^2}{4a^2} > 0\right).$

Făcînd înlocuirea $x + \dfrac{b}{2a} = z$ obținem

$$I = \frac{1}{a^n}\int \frac{Az - \frac{bA}{2a} + B}{(z^2 + k^2)^n}\,\mathrm{d}z = \frac{A}{2a^n}\int \frac{\mathrm{d}(z^2 + k^2)}{(z^2 + k^2)^n} +$$

$$+ \frac{2aB - bA}{2a^{n+1}}\int \frac{\mathrm{d}z}{(z^2 + k^2)^n}.$$

Pentru integrala

$$I_n = \frac{\mathrm{d}z}{(z^2 + k^2)^n},$$

există următoarea relație de recurență

$$I_n = \frac{1}{k^2}\left[\frac{1}{2(n-1)} \cdot \frac{z}{(z^2 + k^2)^{n-1}} + \frac{2n - 3}{2(n-1)} I_{n-1}\right]$$

Exemplu. Să se calculeze

$$\int \frac{(7x^2 + 26x - 9)\,\mathrm{d}x}{x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 9}.$$

Numitorul fracției de integrat se poate scrie

$$x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 9 = (x^2 + 2x)^2 - 3^2 + (x^2 + $$
$$+ 2x + 3)(x^2 + 2x - 3) = (x - 1)(x + 3)(x^2 + 2x + 3).$$

Deci

$$\frac{7x^2+26x-9}{x^4+4x^3+4x^2-9}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+3}+$$

$$+\frac{Cx+D}{x^2+2x+3}.$$

Eliminînd numitorii obținem:

$$7x^2+26x-9=(x^2+2x+3)[A(x+$$
$$+3)+B(x-1)]+(Cx+D)\ (x-1)\ (x+3).$$

Egalînd coeficienții puterilor egale ale lui x avem:

$$A+B+C=0$$
$$5A+B+2C+D=7$$
$$9A+B-3C+2D=26$$
$$9A-3B-3D=-9.$$

Rezolvînd acest sistem avem:

$$A=1;\ B=1;\ C=-2;\ D=5.$$

Deci

$$\int\frac{(7x^2+26x-9)\,\mathrm{d}x}{x^4+4x^3+4x^2-9}=\int\frac{\mathrm{d}x}{x-1}+\int\frac{\mathrm{d}x}{x+3}+$$

$$+\int\frac{(-2x+5)\,\mathrm{d}x}{x^2+2x+3}=\ln|x-1|+\ln|x+$$

$$+3|-\ln(x^2+2x+3)+\frac{7}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C.$$

Calculul primitivelor de forma

$$\int R(x,\ \sqrt{ax^2+bx+c})\,\mathrm{d}x$$

unde $ax^2+bx+c\geqslant 0$, $(\forall)x\in I$ iar R este o funcție rațională de două variabile.

Una din substituţiile:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t \pm x\sqrt{a} \quad \text{dacă } a \geqslant 0$$

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = tx \pm \sqrt{c} \quad \text{dacă } c \geqslant 0$$

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - x_0) \quad \text{unde } b^2 - 4ac \geqslant 0 \text{ şi}$$

$ax_0^2 + bx_0 + c = 0$, numite substituţiile lui Euler, reduc calculul primitivei date la calculul primitivei unei funcţii raţionale.

Calculul primitivelor de forma

$$\int R(\cos x, \sin x)\, dx$$

unde $R(\cos x, \sin x)$ este o funcţie raţională de două variabile.

Integrala se reduce la o integrală dintr-o funcţie raţională făcînd înlocuirea

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t.$$

În particular:

1°. dacă $R(-\cos x, -\sin x) = R(\cos x, \sin x)$

se poate face înlocuirea

$$\operatorname{tg} x = t.$$

2°. dacă $R(-\cos x, \sin x) = -R(\cos x, \sin x)$

se poate face înlocuirea

$$\sin x = t.$$

3°. dacă

$$R(\cos x, -\sin x) = -R(\cos x, \sin x)$$

se poate face înlocuirea

$$\cos x = t.$$

Calculul primitivelor de forma

$$R(e^{ax})\,\mathrm{d}x, \qquad a \neq 0$$

unde $R(e^{ax})$ este o funcție rațională.

Integrala se reduce la o integrală dintr-o funcție rațională făcînd înlocuirea

$$e^{ax} = t.$$

Calculul primitivelor de forma

$$\int R(x, \sqrt[n_1]{ax+b}, \sqrt[n_2]{ax+b}, \ldots, \sqrt[n_k]{ax+b})\,\mathrm{d}x$$

unde R este o funcție rațională de $k+1$ variabile. Integrala se reduce la o integrală dintr-o funcție rațională dacă facem substituția

$$\sqrt[n]{ax+b} = t$$

unde n este cel mai mic multiplu comun al numerelor $n_1, n_2, \ldots, n_k$.

Integralele de forma

$$\int x^{\alpha}(ax^{\beta}+b)^{\gamma}\,\mathrm{d}x$$

unde $\alpha, \beta, \gamma \in Q$ se numesc *integrale binome*.

Calculul acestor integrale se reduce la integrale din funcții raționale doar într-unul din următoarele trei cazuri:

1°. Dacă $\gamma \in Z$, atunci se face substituția $\sqrt[r]{x} = t \Leftrightarrow x = t^r$, unde r este un multiplu comun al numerelor α și β.

2°. Dacă $\dfrac{\alpha+1}{\beta} \in Z$, atunci se face înlocuirea

$$\sqrt[p]{ax^{\beta}+b} = t \Leftrightarrow ax^{\beta}+b = t^{p},$$

unde p este numitorul lui γ.

3°. Dacă $\frac{\alpha + 1}{\beta} + \gamma \in Z$, în acest caz se face înlocuirea

$$\sqrt[p]{\frac{ax^{\beta} + b}{x^{\beta}}} = t \Leftrightarrow \frac{ax^{\beta} + b}{x^{\beta}} = t^{p},$$

unde p este numitorul lui γ.

Calculul unor limite de șiruri cu ajutorul integralei definite

Fie f o funcție continuă definită pe intervalul $[a, b]$ și fie un șir de diviziuni $\{d_n\}_{n \in N}$ al intervalului $[a, b]$ definit astfel:

$$d_n : \left(a,\ a + \frac{b-a}{n},\quad a + 2 \cdot \frac{b-a}{n}, \ldots, a + n \cdot \frac{b-a}{n}\right)$$

și fie punctele capete de intervale de subdiviziuni

$$\xi_i = a + i\frac{b-a}{n} \in \left[a + (i-1) \cdot \frac{b-a}{n},\ a + i \cdot \frac{b-a}{n}\right]$$

unde $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Suma Riemann corespunzătoare diviziunii d_n și funcției f va fi:

$$\sigma_{d_n}(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right).$$

Deoarece funcția f este integrabilă pe $[a, b]$, rezultă că avem egalitatea:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Exemplu

Să se calculeze $\lim_{n \to \infty} \frac{1^k + 2^k + \ldots + n^k}{n^{k+1}}$ unde

$$k \in R - \{-1\}.$$

Avem:

$$a_n = \frac{1^k + 2^k + \ldots + n^k}{n^{k+1}} = \frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^k + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{2}{n}\right)^k + \ldots + \left(\frac{n}{n}\right)^k\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^k \cdot$$

Rezultă că $f(x) = x^k$, deci avem egalitatea

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^k + 2^k + \ldots + n^k}{n^{k+1}} = \int_0^1 x^k \,\mathrm{d}x = \left.\frac{x^{k+1}}{k+1}\right|_0^1 = \frac{1}{k+1}.$$

PROBLEME

7.1. Să se calculeze

$$I = \int_0^{2\pi} |\sin x|\, dx.$$

7.2. Să se calculeze

$$\int_0^1 \frac{2x\, dx}{\sqrt{3 + 4x^2}}.$$

7.3. Să se calculeze

$$I = \int \frac{\sin x\, dx}{4 + \cos^2 x}.$$

7.4. Să se calculeze

$$I = \int \frac{e^{\frac{1}{x}}\, dx}{x^2}.$$

7.5. Să se calculeze

$$I = \int \frac{dx}{x(x+2)}.$$

7.6. Să se calculeze

$$I = \int \frac{x\, dx}{\sqrt{1 - x^4}}.$$

7.7. Să se calculeze

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{5 - 4x^2}}.$$

7.8. Să se calculeze integrala

$$I = \int_{-a}^{a} \frac{x^4}{x^2 + a^2}\, dx.$$

7.9. Să se calculeze

$$I = \int \frac{x - 3}{\sqrt{x^2 - 6x + 5}}\, dx.$$

7.10. Să se calculeze

$$I = \int x^2 \sqrt[3]{4 - x^3}\, dx.$$

7.11. Să se calculeze

$$I = \int \sin^5 x \cos^3 x\, dx.$$

7.12. Să se calculeze

$$I = \int \frac{dx}{x^4 - 1}.$$

7.13. Să se calculeze

$$I = \int \frac{dx}{\sin x \cos x}.$$

7.14. Să se calculeze

$$I = \int \frac{dx}{x^2 - 8x + 7}.$$

7.15. Să se calculeze

$$I = \int \frac{dx}{\cos 4x}.$$

7.16. Să se calculeze

$$I = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

7.17. Să se calculeze

$$I = \int \sqrt{1 - 2x}\,dx.$$

7.18. Să se calculeze

$$I = \int \left[\frac{a}{x^2} - \frac{b}{(x + 1)^2}\right] dx$$

7.19. Să se arate că

$$\int_0^a \frac{x\,dx}{\sqrt{x^4 + a^4}}$$

nu depinde de a.

7.20. Să se calculeze

$$I = \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x}\,dx.$$

7.21. Să se calculeze integralele

$$I_1 = \int \frac{dx}{x \ln x}; \qquad I_2 = \int \frac{(\cos x + \sin x)\,dx}{\cos x - \sin x + 2};$$

$$I_3 = \int \left[(3x^2 + 2)e^{x^3 + 2x - 1}\right] dx.$$

7.22. Să se calculeze

$$I = \int \frac{x^2}{e^{x^3}}\,dx.$$

7.23. Să se calculeze

$$\int \frac{dx}{\cos^6 x}.$$

7.24. Să se calculeze

$$I = \int \frac{dx}{x(x^5 + 2)}.$$

7.25. Să se calculeze

$$I = \int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}\, dx.$$

7.26. Să se arate că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} \sqrt[p]{i^k}}{\sqrt[p]{n^{p+k}}} = \frac{p}{p+k}, \quad \text{unde } p,\ k \in N.$$

(*N. Păun*, G.M.B., 11375, 1971)

7.27. Să se arate că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{k=1}^{n} \sqrt{n^2 - k^2} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k^2} = \frac{\pi}{4}.$$

(*C. Ionescu-Ţiu*, Revista Pitagora, 1936)

7.28. Să se calculeze

$$I = \int \frac{3x + 7}{2x^2 + 3x + 8}\, dx.$$

(*L. Pîrşan*, Concurs elevi, 1974)

7.29. Să se calculeze:

$$I = \int x^3 e^{x^2}\, dx.$$

7.30. Să se calculeze

$$I = \int \frac{x^5\, dx}{(2 + x^2)^3}.$$

7.31. Să se calculeze

$$I = \int \frac{x^3\, dx}{\sqrt{4 + x^2}}.$$

7.32. Să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \ldots + \sin\frac{n\pi}{n}\right),$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\cos\frac{\pi}{n} + \cos\frac{2\pi}{n} + \ldots + \cos\frac{n\pi}{n}\right).$$

7.33. Să se calculeze

$$I = \int \frac{e^{3x}}{e^x + 1}\,\mathrm{d}x.$$

7.34. Să se calculeze

$$\int \frac{(e^{3x} - e^x)\mathrm{d}x}{e^{4x} - e^{3x} + 2e^{2x} - e^x + 1}.$$

(*S. Păunoiu*, G.M.B., 14294, 1974)

7.35. Să se arate că

a) $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{4n^2 - k^2} = \ln 3 - 1.$$

b) $$\lim_{n\to\infty} n\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3n^2 + k^2} = \frac{\pi\sqrt{3}}{18}.$$

(*C. Ionescu-Țiu*, G.M.B., 9562, 1967)

7.36. Să se arate că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 2,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{2}{\sqrt{n+2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{3}{\sqrt{n+3}} + \ldots + \frac{n}{\sqrt{2n}}\right) = \frac{4 - 2\sqrt{2}}{3}.$$

(*C. Ionescu-Țiu*, G.M.B., 9626, 1969)

7.37. Să se arate că

1°) $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n\sqrt{n}}(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{n})\right]=\frac{2}{3}$.

2°) $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n+k}+\frac{1}{n+2k}+\frac{1}{n+3k}+\ldots+\right.$

$$\left.+\frac{1}{n(1+k)}\right]=\ln\sqrt[k]{1+k}.$$

(*C. Ionescu-Țiu*, G.M.B., 9439, 1969)

7.38. Să se calculeze integrala

$$I=\int \sin^2 x\ \cos^4 x\, dx.$$

7.39. Să se calculeze integrala

$$I=\int\frac{1+\sin x}{(1+\cos x)\sin x}dx.$$

7.40. Să se calculeze integrala

$$I=\int \sin^2 x \cos^5 x\, dx.$$

7.41. Să se calculeze

$$I=\int\frac{\operatorname{tg} x\, dx}{\cos x(\cos x+\sin x)}$$

(*C. Popescu*, G.M.B., 9733, 1969)

7.42. Să se calculeze integralele

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\operatorname{tg} x\, dx}{1+\sqrt{2}\cos x}.$$

$$I_2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x\, dx}{\sin x+\cos x}.$$

(*C. Ionescu-Țiu*, G.M.B., 9685, 1969)

7.43. Să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k e^{\frac{k}{n}}.$$

(*C. Ionescu-Țiu*, G.M.B., 9824, 1969)

7.44. Să se arate că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\sin^2\frac{\pi}{n} + \sin^2\frac{2\pi}{n} + \sin^2\frac{3\pi}{n} + \dots + \sin^2\frac{n\pi}{n}\right) = \frac{1}{2}.$$

(*C. Ionescu-Țiu*, G.M.B., 9624, 1969)

7.45. Să se calculeze limita șirului cu termenul general

$$a_n = n^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n^2+k^2)\left(\sqrt{n^2+k^2}+n\right)}.$$

(*C. Ionescu-Țiu*, G.M.B., 9948, 1969)

7.46. Să se calculeze limita șirului cu termenul general

$$a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \operatorname{tg}^2\frac{k\pi}{3n}.$$

(*C. Ionescu-Țiu*, G.M.B., 10720, 1970)

7.47. Să se calculeze

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1+\sin^4 x}\,dx.$$

(*M. Oprea*, G.M.B., 9827, 1969)

7.48. Să se calculeze

$$I = \int \frac{dx}{a + b\cos x},$$

știind că $a, b \in (0, +\infty)$.

7.49. Se consideră integrala

$$I_{m,n} = \int \sin^m x \cdot \cos^n x \, dx$$

unde $m, n \in Z - \{-1\}$ și $m + n \neq 0$.

Să se arate că

$$I_{m,n} = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} I_{m,n-2},$$

$$I_{m,n} = -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} I_{m-2,n}.$$

7.50. Să se calculeze

$$I_1 = \int \frac{\sin^7 x}{\cos x} dx,$$

$$I_2 = \int \frac{\cos^4 x}{\sin x} dx.$$

7.51. Să se calculeze

$$I = \int \cos x \cos 3x \cos 6x \, dx.$$

7.52. Să se calculeze

$$I = \int \frac{dx}{\cos^2 x + 2 \sin^2 x}.$$

7.53. Să se calculeze

$$I = \int \frac{dx}{3 \cos x + \sin x + 1}.$$

7.54. Să se calculeze

$$I = \int \frac{1 + \sin x}{\sin x(1 + \cos x)} dx.$$

7.55. Să se calculeze

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x - \cos^2 a}.$$

unde

$$a \neq \frac{k\pi}{2}, \quad k \in Z.$$

(*M. Chiriță*, G.M.B., 10838, 1970)

7.56. Să se calculeze

$$\int \frac{dx}{x(x+r)(x+2r)\ldots[x+(n-1)r]}$$

unde $r \in R$.

(*L. Pirșan*, G.M.B., 11991, 1972)

7.57. Să se calculeze integrala

$$I = \int_0^1 \frac{1+x^4}{1+x^6}\,dx.$$

7.58. Să se calculeze integrala

$$I = \int_0^1 \frac{(x^2+x)\,dx}{x^6+1}.$$

7.59. Să se calculeze integralele

$$I_1 = \int_0^1 \frac{x^4\,dx}{x^3+1}.$$

$$I_2 = \int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}+1}.$$

7.60. Să se calculeze integralele

$$I_1 = \int \frac{12x^2 - 70x + 98}{x^3 - 9x^2 + 26x - 24}\,dx; \quad I_2 = \int \frac{(x^2+1)^2}{(x-1)^6}\,dx.$$

7.61. 1°. Să se descompună în elemente simple fracția

$$f(x) = \frac{(2x+1)(2x^2+6)}{(x-1)^2(x^2+2x+5)}$$

2°. Să se calculeze apoi $\int f(x)\,dx$

7.62. Să se calculeze

$$I = \int \frac{2x^2+3x+9}{x^2(x^2+3x+3)}\,dx.$$

7.63. Să se calculeze

$$I = \int_0^1 \frac{x^7}{1+x^{12}}\,dx.$$

7.64. Să se calculeze

$$I = \lim_{\alpha\to\infty} \int_0^{\alpha} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+2)(x^2+3)}.$$

7.65. Să se calculeze

$$I = \int \frac{dx}{(x^2+x+1)^2}.$$

7.66. Să se calculeze

$$I = \int \frac{x^4-8x^3+24x^2-27x+11}{x^3-6x^2+11x-6}\,dx.$$

7.67. Să se calculeze

$$I = \int \frac{2x^3-3x^2+2x}{(x^2+4)(x^2+1)}\,dx.$$

7.68. Să se calculeze

$$\lim_{\alpha\to\infty} \int_0^{\alpha} e^{-x}\cdot x^2\,dx.$$

7.69. Să se calculeze

$$\lim_{\alpha\to\infty}\int_0^\alpha e^{-x}\cdot x\,\mathrm{d}x \text{ și } \lim_{\alpha\to 0}\int_0^\alpha e^{-x}\cdot x\,\mathrm{d}x.$$

7.70. Să se calculeze integralele

$$I_1=\int \ln x\,\mathrm{d}x.$$

$$I_2=\int (\ln x)^2\,\mathrm{d}x.$$

$$I_3=\int (\ln x)^3\,\mathrm{d}x.$$

7.71. Să se calculeze integrala

$$I=\int x^\alpha \ln x\,\mathrm{d}x.$$

unde $\alpha \in R$.

7.72. Să se calculeze

$$I=\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}e^x\,\mathrm{d}x.$$

(Concurs elevi, 1973)

7.73. Să se calculeze

$$\int \frac{x^2+x+1}{x^2+1}e^{\operatorname{arc\,tg} x}\,\mathrm{d}x.$$

(*M. Chiriță*, G.M.B., 13257, 1973)

7.74. Să se calculeze integrala $I=\int e^{\arcsin x}\,\mathrm{d}x$, calculîndu-se mai întîi integrala

$$J=\int e^{\arcsin x}\cdot\frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

7.75. Să se calculeze

$$I=\int_{-1}^{1} e^x(x+|x|)\,\mathrm{d}x.$$

7.76. Să se calculeze

$$I = \int_{-1}^{1} |x| e^{2x} \, dx.$$

7.77. Să se calculeze integrala

$$I = \int \ln(x^2 + x + 1) \, dx.$$

7.78. Să se calculeze

$$I_4 = \int \cos^4 x \, dx.$$

7.79. Să se calculeze

$$I = \int e^x \sin 2x \, dx.$$

7.80. Să se calculeze

$$I_6 = \int \sin^6 x \, dx.$$

7.81. Să se calculeze integralele

$$I_1 = \int_0^1 \frac{\ln(x + \sqrt{1 + x^2})}{\sqrt{1 + x^2}} \, dx \text{ şi}$$

$$I_2 = \int_0^1 \frac{x \ln(x + \sqrt{1 + x^2})}{\sqrt{1 + x^2}} \, dx.$$

(*E. Constantinescu*, G.M.B., 11582, 1971)

7.82. Să se calculeze

$$\int_0^{\pi} (x \cos x)^2 \, dx.$$

(Admitere, Institutul Politehnic, București, 1973)

7.83. Să se arate că

$$\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)} = \frac{4 \ln 2}{\sqrt{3}}.$$

(*H. Müller*, G.M.B., 11373, 1971)

7.84. Pentru $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ și $k \in (0,1)$ să se arate că

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}}\,dt = \int_0^{\sin x} \frac{1}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}}\,ds.$$

7.85. Să se arate că

$$\lim_{n\to\infty}\left(n^2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^3+k^3}\right) = \frac{\ln 8+\sqrt{3}\pi}{9}.$$

(*C. Ionescu-Țiu*, G.M.B., 9825, 1969)

7.86. Să se calculeze limita șirului cu termenul general:

$$a_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{n}{(n+k)\sqrt{n^2+k^2}}.$$

(*C. Ionescu-Țiu*, G.M.B., 9949, 1969)

7.87. Să se arate că

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n}}{n^3}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{\sqrt{2n-k}}\right) = \frac{2}{15}(32\sqrt{2}-43).$$

(*C. Ionescu-Țiu*, G.M.B., 9731, 1968)

7.88. Să se arate că

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{(2n+k)(\sqrt{2n+k})\,k} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

(*C. Ionescu-Țiu*, G.M.B., 9627, 1968)

7.89. Să se calculeze integralele:

$$I_1 = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1-x^2}},$$

$$I_2 = \int_0^1 \frac{x^3\,dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}.$$

7.90. Să se calculeze integrala

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} \quad \text{unde } a, b, c \in R \text{ și } a \neq 0.$$

7.91. Să se calculeze

$$I = \int \frac{dx}{x\sqrt{1 - x^2}}.$$

7.92. Să se calculeze

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

7.93. Să se găsească o formulă de recurență pentru integrala:

$$I_m = \int \frac{x^m \, dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} \quad \text{unde } m \in N \text{ și } a \neq 0.$$

7.94. Se consideră integrala

$$I_n = \int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^n} \quad \text{unde } a \neq 0.$$

Să se calculeze I_2 și I_3.

7.95. Să se găsească limita șirului cu termenul general:

$$a_n = \frac{1}{n^4} [1^2\sqrt[3]{1^3 + n^3} + 2^2\sqrt[3]{2^3 + n^3} + \dots +$$

$$+ n^2\sqrt[3]{n^3 + n^3}].$$

7.96. Să se calculeze integrala

$$I = \int \frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x}}}{x} \, dx.$$

7.97. Să se calculeze integrala

$$I = \int x^{\frac{1}{5}} \left(3 - 2x^{\frac{3}{5}}\right)^{-\frac{1}{2}} dx.$$

7.98. Să se calculeze integrala

$$I = \int x^{-6}(1 + 2x^3)^{\frac{2}{3}} \, dx.$$

7.99. Elementele şirului de funcţii $\{f_n\}_{n\in N}$ se definesc astfel:

$$f_1(x) = 1; \; f_{n+1}(x) = \int_1^x f_n(t) \, dt, \text{ unde } n \in N.$$

Fie $a_n = f_n(2)$. Să se demonstreze că $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

7.100. Să se arate că funcţia continuă $f\colon R \to R$ este periodică de perioadă T dacă şi numai dacă pentru orice $x \in R$ avem:

$$\int_x^{x+T} f(t) \, dt = \text{constant}.$$

(*D. Radu*, G.M.B., 1970)

7.101. Să se arate că funcţia continuă $f: R \to R$ este impară dacă şi numai dacă $\forall x \in R$ avem

$$\int_{-x}^{x} f(t) \, dt = C, \quad C = \text{constant}.$$

(G.M.B., 13363, 1973)

7.102. Să se calculeze integrala:

$$I = \int \ln(x^4 + x^2 + 1) \, dx.$$

(*Gh. Albu*, G.M.B., 13491, 1973)

7.103. Să se calculeze integrala:

$$\int \frac{1}{\mathrm{tg}^2 x - \mathrm{tg}^2 a} \, dx.$$

(*M. Chiriţă*, G.M.B., 13036, 1973)

7.104. 1°. Să se demonstreze că dacă funcțiile f și g sînt integrabile pe intervalul $[a, b]$ și $g(x) > 0$ $(\forall) x \in [a, b]$, atunci

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx \leqslant \max_{a \leqslant x \leqslant b} \{f(x)\} \cdot \int_a^b g(x)\, dx$$

$$\int_a^b |f(x)\, g(x)\, dx| \leqslant \max_{a \leqslant x \leqslant b} \{|f(x)|\} \cdot \int_a^b g(x)\, dx.$$

2°. Să se dea un exemplu de funcții f și g pentru care g nu este pozitivă și

$$\left| \int_a^b f(x) \cdot g(x)\, dx \right| > \max_{a \leqslant x \leqslant b} \{|f(x)|\} \cdot \left| \int_a^b g(x)\, dx \right| \cdot$$

3°. Funcția h se anulează în $x = 0$ și este derivabilă. Să se arate că:

$\int_0^a h(x)\, dx = \int_0^a (a - x)\, h'(x)\, dx$ și să se deducă de aici că:

$$\left| \int_b^a h(x)\, dx \right| \leqslant \frac{1}{2} a^2 M \text{ unde } M = \max_{0 \leqslant x \leqslant a} \{|h'(x)|\}.$$

(Concurs, Cambridge, 1972)

7.105. Se consideră funcția f, $f\colon [1, \infty) \to R$ dată de relația

$$f(x) = \int_0^1 e^{-t} t^{x-1}\, dt.$$

a). Să se arate că funcția f este pozitivă și descrescătoare pe $[1, +\infty)$.

b). Să se stabilească relația $f(x + 1) = x\, f(x) - \frac{1}{e}$.

c). Să se arate că $\forall n \in N$, are loc egalitatea

$$f(n + 1) = n! - \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{n} A_n^k$$

unde A_n^k reprezintă aranjamente de n obiecte luate cîte k.

d). Folosind cele stabilite anterior, să se arate că şirul cu termen general

$$a_n = n! - \frac{1}{e}\sum_{n=0}^{n} A_n^k$$

este convergent.

(*D. Radu*, Concurs elevi, 1973)

7.106. Să se calculeze integrala

$$\int a^{f(x)} \ln a^{f(x)\cdot f'(x)}\,\mathrm{d}x,\ a > 0,\ a \neq 1.$$

(*I. Negulici*, G.M.B., 13037, 1973)

7.107. Să se determine abscisele punctelor de maxim şi de minim ale funcţiei:

$$f(t) = \int_0^t e^{x^4}(x^2 - 3x + 2)\,\mathrm{d}x.$$

(*I. Popescu*, G.M.B., 13419, 1973

7.108. Să se arate că

$$\int_0^{\frac{\pi}{n}} xf(\sin nx)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2n}\int_0^{\frac{\pi}{n}} f(\sin nx)\,\mathrm{d}x,\quad \text{unde } n \in N.$$

(*N. Bebea*, G.M.B., 9734, 1970)

7.109. Să se calculeze integrala

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} x\cos\frac{3x}{2}\left(\sin\frac{3x}{2} - 8\sin^3\frac{3x}{4}\cos^2\frac{3x}{2}\cos^3\frac{3x}{4}\right)\mathrm{d}x.$$

(*C. Cărbunaru*, G.M.B., 13493, 1970)

7.110. Se consideră funcţia

$$f_n(x) = (1 - x)^x(1 + x)^n;\ x \in [0,1],\ n \in N.$$

a). Să se arate că

$$0 \leqslant \int_0^1 f_n(x)\,dx \leqslant 1.$$

b). Să se arate că șirul

$$I_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$$

este convergent.

(*S. Anița, I. Voicu*, G.M.B., 11118)

7.111. Să se calculeze integrala

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2^{n+1}}} \sin x \cdot \cos x \cdot \cos 2x \ldots \cos 2^{n-1}x\,dx;\ n \in N.$$

(*N. Bebea*, G.M.B., 11119)

7.112. Să se determine a, b, c astfel ca

$$F(x) = (ax^2 + bx + c)\sqrt{3 - 2x}$$

să fie o primitivă a lui $f(x) = x\sqrt{3 - 2x}$.

7.113. Fie $T_n(x) = a \sin\left(\alpha x + n\dfrac{\pi}{2}\right) + b\cos\left(\alpha x + n\dfrac{\pi}{2}\right)$ cu $\alpha, a, b \in R$ și $n \in N \cup \{0\}$. Dacă notăm: $T_n^1 = \int T_n(x)\,dx$, $T_n^2(x) = \int T_n^1(x)\,dx, \ldots, T_n^m(x) = \int T_n^{m-1}(x)\,dx$ unde $m \in N$, să se arate că:

$T_n^m(x) = (-1)^m \alpha^{-m} T_{n+m}(x) + P_{m-1}(x)$ unde $P_{m-1}(x)$ este un polinom arbitrar de gradul $m - 1$ în x.

(*D. Bătinețu*, G.M.B., 10573)

7.114. Dacă $f(x)$ este o funcție continuă, să se demonstreze că:

$$\int_0^a f(x)\,dx \leqslant \sqrt{a\int_0^a f^2(x)\,dx}$$

unde a este un număr real pozitiv.

Aplicație: $0 \leqslant \int_0^{\pi} \sqrt{x} \sin x \, dx \leqslant \frac{\pi\sqrt{\pi}}{2}$.

(*I. I. Tomescu*, G.M.B., 8378)

7.115. Se consideră funcția f de variabilă reală definită prin relația:

$$f(x) = \int_0^{\operatorname{arctg} x} e^{\operatorname{tg}^2 t} \, dt, \quad f: I \to R \text{ unde } I \subset R.$$

a). Să se arate că funcția f este definită pe R.
b). Să se arate că f este derivabilă pe R și să se calculeze derivata ei.
c). Să se deducă relația:

$$\int_0^1 \frac{xf(x)}{e^{x^2}} dx + \frac{1}{2e} \cdot \int_0^1 \frac{e^{x^2}}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{8}.$$

(*N. Manolache*, Concurs elevi, 1971)

7.116. Să se calculeze

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 kx}{\sin x} dx; \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2k-1)\,x}{\sin x} dx; \; k \in N.$$

(*N. Popescu*, G.M.B., 11884, 1972)

7.117. Calculînd în două moduri integrala $\int_a^b (x-a)^m (b-x)^n \, dx$ să se stabilească egalitatea

$$\frac{1}{m+1} C_n^0 - \frac{1}{m+2} C_n^1 + \frac{1}{m+3} C_n^3 - \ldots + $$
$$+ \frac{(-1)^n}{m+n+1} C_n^n = \frac{1}{m+n+1} C_{m+n}^n.$$

(*E. Onofraș*, G.M.B., 9951, 1970)

7.118. Să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{1}{n} \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \ln\left(\sin \frac{k}{n} \pi \right) \right] \right\}.$$

7.119. Să se calculeze

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x)\, dx.$$

(G.M.B., 10312, 1970)

7.120. Să se calculeze

$$\int_0^a \frac{\ln(a+x)}{a^2+x^2} dx, \quad a > 1.$$

(*M. Chiriță*, G.M.B., 10482, 1970)

7.121. Să se calculeze integrala

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2n+1} x\, dx}{\sqrt{1-\cos x}}; \quad n \in N \cup \{0\}.$$

(*M. Chiriță*, G.M.B., 12298, 1972)

7.122. Fără a calcula efectiv integrala, să se arate că

$$\frac{1}{5} \leqslant \int_5^8 \frac{2x-9}{2x+5} dx \leqslant 1.$$

(*I. Popescu*, G.M.B.)

7.123. Fie $f\colon [a, b] \to [a, b]$ o funcție continuă cu $0 \leqslant a < b$. Să se arate că există un punct x_0, $x_0 \in (a, b)$, astfel încît

$$\int_a^b f(x)\, dx \leqslant f(x_0) \cdot \frac{(b-a)\sqrt{b^2-a^2}}{\sqrt{b^2-f(x_0)^2}}.$$

7.124. Să se determine constantele reale a și b astfel ca funcția $F(x) = e^{-x}(a \cos 4x + b \sin 4x)$ să fie o primitivă a funcției $f(x) = e^{-x}\cos 4x$.

(Bacalaureat, Franța, 1972)

7.125. Se știe că orice funcție continuă pe un interval închis este integrabilă pe acest interval. Reciproca acestei afirmații este adevărată?

(Concurs elevi, 1972)

7.126. Fie f o funcţie reală continuă într-un interval $[a, b]$. Să se arate că

a). Dacă $f(x) \geqslant 0$ pentru orice $x \in [a, b]$, atunci

$$\int_a^b f(x)\, dx \geqslant 0.$$

b). Dacă există un punct $x_0 \in [a, b]$ cu $f(x_0) \neq 0$, atunci există o întreagă vecinătate a lui x_0 pe care funcţia f este nenulă.

c). Dacă $f(x) \geqslant 0$ pentru orice $x \in [a, b]$ şi dacă

$$\int_a^b f(x)\, dx = 0,$$

atunci f este funcţia nulă.

(*D. Radu*, Concurs elevi, 1972)

7.127. Fie f o funcţie reală continuă în intervalul $[a, b]$ şi care are proprietăţile:

$$(1)\ f(a) > 0,$$

$$(2)\ \int_a^b f(t)\, dt < 0.$$

1°. Să se arate că există $\xi \in (a, b)$ astfel încît $f(\xi) = 0$.

2°. Să se arate că există $\eta \in (a, b)$ astfel încît $\int_a^{\eta} f(t)\, dt = 0$.

3°. Presupunînd că ξ a cărui existenţă a fost demonstrată la pct. 1°) este unic, să se arate că $\xi < \eta$.

(*C. Foiaş*, Concurs elevi, 1973)

7.128. Să se calculeze

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{\pi} \frac{1 - \cos kx}{1 - \cos x}\, dx, \text{ unde } k \in Z.$$

7.1. Avem:

$$I = \int_0^{\pi} \sin x \, dx + \int_{\pi}^{2\pi} (-\sin x) \, dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} +$$

$$+ \cos x \Big|_{\pi}^{2\pi} = 2 + 2 = 4.$$

7.2. Avem:

$$\int_0^1 \frac{2x \, dx}{\sqrt{3 + 4x^2}} = \frac{1}{2} \sqrt{3 + 4x^2} \Big|_0^1 = \frac{\sqrt{7} - \sqrt{3}}{2}.$$

7.3. Avem:

$$I = -\frac{2}{4} \int \frac{d\left(\frac{\cos x}{2}\right)}{1 + \left(\frac{\cos x}{2}\right)^2} = -\frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\cos x}{2}\right) + C.$$

7.4. Avem:

$$I = -\int e^{\frac{1}{x}} \, d\left(\frac{1}{x}\right) = -e^{\frac{1}{x}} + C.$$

7.5. Avem:

$$I = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x + 2} = \frac{1}{2} \left[\ln |x| - \ln |x + 2|\right] +$$

$$+ C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x}{x + 2} \right| + C.$$

7.6. Avem:

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2)}{\sqrt{1-(x^2)^2}} = \frac{1}{2}\arcsin(x^2) + C.$$

7.7. Avem:

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{d(2x)}{\sqrt{5-(2x)^2}} = \frac{1}{2}\arcsin\frac{2x}{\sqrt{5}} + C.$$

7.8. Avem:

$$I = 2\int_0^a \left(x^2 - a^2 + \frac{a^4}{x^2+a^2}\right)dx = \frac{2x^3}{3}\Big|_0^a -$$

$$- 2a^2x\Big|_0^a + 2a^3 \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}\Big|_0^a = a^3\left(\frac{\pi}{2} - \frac{4}{3}\right).$$

7.9. Avem:

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2-6x+5)}{\sqrt{x^2-6x+5}} = \sqrt{x^2-6x+5} + C.$$

7.10. Avem:

$$I = -\frac{1}{3}\int (4-x^3)^{\frac{1}{3}}\, d(4-x^3) =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}(4-x^3)^{\frac{4}{3}} + C = -\frac{1}{4}(4-x^3)^{\frac{4}{3}} + C.$$

7.11. Avem:

$$I = \int \sin^5 x(1-\sin^2 x)\, d(\sin x) = \frac{\sin^6 x}{6} - \frac{\sin^8 x}{8} + C.$$

7.12. Avem:

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+1)-(x^2-1)}{(x^2-1)\,(x^2+1)}dx =$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x + C.$$

7.13. Avem:

$$I=\int\frac{\mathrm{d}(\operatorname{tg}x)}{\operatorname{tg}x}=\ln|\operatorname{tg}x|+C.$$

7.14. Avem:

$$I=\int\frac{\mathrm{d}(x-4)}{(x-4)^2-9}=\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-4-3}{x-4+3}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-7}{x-1}\right|+C.$$

7.15. Avem:

$$I=\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}(4x)}{\cos 4x}=\frac{1}{4}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+2x\right)\right|+C.$$

7.16. Avem:

$$I=\sqrt{1+x^2}+C.$$

7.17. Avem:

$$I=-\frac{1}{2}\int\sqrt{1-2x}\,\mathrm{d}(1-2x)=$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{3}{2}}(\sqrt{1-2x})^3+C.$$

7.18. Avem:

$$I=a\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2}-b\int\frac{\mathrm{d}x}{(1+x)^2}=-\frac{a}{x}+\frac{b}{x+1}.$$

7.19. Punem $x=at$ și obținem:

$$I=\int_0^1\frac{t\,\mathrm{d}t}{\sqrt{t^4+1}}.$$ Notăm $t^2=u\Rightarrow 2t\mathrm{d}t=\mathrm{d}u.$

$$I=\int_0^1\frac{\mathrm{d}u}{2\sqrt{u^2+1}};$$ deci nu depinde de a.

Avem:

$$I = \frac{1}{2} \cdot \ln(u + \sqrt{u^2 + 1})\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2} \ln(1 + \sqrt{2}) = \ln \sqrt{1 + \sqrt{2}}.$$

7.20. Notăm $\operatorname{arctg} \frac{1}{x} = u$ și $dv = dx$;

$$du = -\frac{dx}{x^2 + 1},$$

$$I = x \operatorname{arctg} \frac{1}{x}\Big|_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}} + \frac{1}{2}\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}} \frac{d(x^2 + 1)}{x^2 + 1} =$$

$$= 3 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} \sqrt{3} + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1)\Big|_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}} =$$

$$= \sqrt{3} \cdot \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}\left(\ln 4 - \ln \frac{4}{3}\right) =$$

$$= \frac{\pi\sqrt{3}}{18} + \frac{1}{2} \ln 3.$$

7.21. Avem:

$$I_1 = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} dx = \int \frac{(\ln x)' dx}{\ln x} = \ln |\ln x| + C.$$

$$I_2 = -\ln |\cos x - \sin x + 2| + C.$$

$$I_3 = e^{x^3 + 2x - 1} + C.$$

7.22. Avem:

$$I = -\frac{1}{3}\int e^{-x^3} d(-x^3) = -\frac{1}{3} e^{-x^3} + C.$$

7.23. Avem:

$$\int \frac{dx}{\cos^6 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x}(1 + \mathrm{tg}^2 x)^2 = \int \frac{dx}{\cos^2 x}(\mathrm{tg}^4 x +$$

$$+ 2\,\mathrm{tg}^2 x + 1) = \frac{1}{5}\mathrm{tg}^5 x + \frac{2}{3}\mathrm{tg}^3 x + \mathrm{tg}\, x + C.$$

7.24. Avem:

$$I = \int \frac{x^4\, dx}{x^5(x^5 + 2)} = \frac{1}{5}\int \frac{d(x^5)}{x^5(x^5 + 2)} = \frac{1}{10}\int \frac{d(x^5)}{x^5} -$$

$$- \frac{1}{10}\int \frac{d(x^5)}{x^5 + 2} = \frac{1}{10}\ln\left|\frac{x^5}{x^5 + 2}\right| + C.$$

7.25. Avem:

$$I = \int (\mathrm{tg}\, x)^{\frac{1}{2}}\, d(\mathrm{tg}\, x) = \frac{2}{3}\sqrt{\mathrm{tg}^3 x} + C.$$

7.26. Ținînd seama de definiția integralei definite, avem:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} \sqrt[p]{i^k}}{\sqrt[p]{n^{p+k}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} \sqrt[p]{i^k}}{n\sqrt[p]{n^k}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\sqrt[p]{\left(\frac{i}{n}\right)^k} =$$

$$= \int_0^1 \sqrt[p]{x^k}\, dx = \int_0^1 x^{\frac{k}{p}}\, dx = \frac{p}{k + p}\cdot x^{\frac{k}{p}+1}\Big|_0^1 = \frac{p}{p + k}.$$

7.27. Deoarece

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\cdot\sum_{k=1}^{n}\sqrt{n^2 - k^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1 - \left(\frac{k}{n}\right)^2} =$$

$$= \int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\, dx,$$

iar

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}=$$

$$=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2},$$

va trebui să verificăm că:

$$\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}.$$

Într-adevăr, prin substituția $x=\sin t$, avem:

$$\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt=\frac{1}{2}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)dt=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$$

și

$$\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\text{arc tg}\,x\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}.$$

7.28. Avem:

$$I=\frac{3}{4}\ln(2x^2+3x+8)+\frac{19}{2\sqrt{55}}\text{arctg}\frac{4x+3}{\sqrt{55}}.$$

7.29. Avem:

$$I=\frac{1}{2}\int ue^u\,du,\text{ unde s-a notat } x^2=u,$$

apoi se integrează prin părți.

7.30. Se notează $2+x^2=t\Rightarrow 2xdx=dt$ și $x^2=t-2$.

Integrala devine:

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{(t-2)^2\,\mathrm{d}t}{t^3}$$

care se integrează ușor.

7.31. Se notează $4 + x^2 = t$, $2x\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$, $x^2 = t - 4$. Integrala devine

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{(t-4)\,\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$$ care se integrează ușor.

7.32. Utilizînd definiția integralei avem:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n}\pi\right) = \int_0^1 \sin(\pi x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\cos\pi x\Big|_0^1 = -\frac{1}{\pi}(\cos\pi - \cos 0) = \frac{2}{\pi}$$

și

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{k}{n}\pi\right) = \int_0^1 \cos(\pi x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{\pi}\sin\pi x\Big|_0^1 = \frac{0}{\pi} = 0.$$

7.33. Notăm $e^x = t$, deci $e^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$, și integrala devine

$$I = \int \frac{t^3}{(t+1)t}\,\mathrm{d}t = \int (t-1)\,\mathrm{d}t + \int \frac{\mathrm{d}t}{t+1} =$$

$$= \frac{t^2}{2} - t + \ln|t+1| + C.$$

Revenind la vechile notații, avem:

$$I = \frac{e^{2x}}{2} - e^x + \ln(e^x + 1) + C.$$

7.34. Fie $e^x = t$, $x = \ln t$, $dx = \frac{1}{t}\,dt$. Integrala devine:

$$\int \frac{(e^{3x} - e^x)\,dx}{e^{4x} - e^{3x} + 2e^{2x} - e^x + 1} =$$

$$\int \frac{(t^3 - t)\cdot \frac{1}{t}\,dt}{t^4 - t^3 + 2t^2 - t + 1} = \int \frac{(t^2 - 1)\,dt}{(t^2+1)^2 - t(t^2+1)} =$$

$$= \int \frac{(t^2-1)\,dt}{(t^2+1)(t^2-t+1)}.$$

$$\frac{t^2 - 1}{(t^2+1)(t^2-t+1)} \equiv \frac{At + B}{t^2+1} + \frac{Ct + D}{t^2 - t + 1}.$$

$$t^2 - 1 \equiv At^3 - At^2 + At + Bt^2 - Bt + B +$$
$$+ Ct^3 + Ct + Dt^2 + D.$$

$$t^2 - 1 \equiv (A + C)t^3 + (-A + B + D)t^2 +$$
$$+ (A - B + C)t + B + D.$$

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ -A + B + D = 1 \\ A - B + C = 0 \\ B + D = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + C = 0 \\ -A + B + D = 1 \\ B = 0 \\ B + D = -1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A + C = 0 \\ -A + D = 1 \\ B = 0 \\ D = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + C = 0 \\ A = -2 \\ B = 0 \\ D = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -2 \\ B = 0 \\ C = 2 \\ D = -1. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{t^2 - 1}{(t^2+1)(t^2-t+1)} = -\frac{2t}{t^2+1} + \frac{2t - 1}{t^2 - t + 1}, \text{ deci}$$

$$\int \frac{(t^2-1)\,dt}{(t^2+1)(t^2-t+1)} = -\int \frac{2t}{t^2+1}\,dt + \int \frac{(2t-1)\,dt}{t^2-t+1} =$$

$$= -\ln(t^2+1) + \ln(t^2 - t + 1) = \ln \frac{t^2 - t + 1}{t^2 + 1}.$$

Revenind la substituția făcută, obținem:

$$\int \frac{(e^{3x} - e^{x})\,dx}{e^{4x} - e^{3x} + 2e^{2x} - e^{x} + 1} = \ln \frac{e^{2x} - e^{x} + 1}{e^{2x} + 1}.$$

7.35. Avem:

a). $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{4n^2 - k^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k^2}{n^2}}{4 - \frac{k^2}{n^2}}$ și deci $f(x) = \frac{x^2}{4 - x^2}$

integrabilă pe [0,1] și limita este

$$\int_0^1 \frac{x^2}{4 - x^2}\,dx = -\int_0^1 \frac{4 - x^2 - 4}{4 - x^2}\,dx =$$

$$= -\int_0^1 dx + 4\int_0^1 \frac{dx}{4 - x^2} = -1 + 4\int_0^1 \frac{dx}{4 - x^2}.$$

Ultima integrală, o calculăm astfel:

$$\frac{1}{4 - x^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2 - x} + \frac{1}{2 + x}\right);$$

$$4\int_0^1 \frac{dx}{4 - x^2} = \ln \frac{2 + x}{2 - x}\Big|_0^1 = \ln 3.$$

Deci:

$$\int_0^1 \frac{x^2}{4 - x^2}\,dx = \ln 3 - 1.$$

b). $n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3n^2 + k^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{n^2}{3n^2 + k^2} =$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3 + \frac{k^2}{n^2}}.$$

Așa că

$f(x) = \frac{1}{3 + x^2}$, iar limita este $\int_0^1 \frac{dx}{3 + x^2}$. Integrala o

calculăm făcînd substituția $x = \sqrt{3}t \Rightarrow dx = \sqrt{3}\, dt$, iar noile limite sînt 0 și $\frac{1}{\sqrt{3}}$,

$$\int_0^1 \frac{dx}{3 + x^2} = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{\sqrt{3}\, dt}{3(1 + t^2)} = \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3} \cdot \pi}{18}.$$

7.36. 1°). Avem:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n}}} \cdot \left(\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n} \right) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} =$$

$$= 2\sqrt{x} \Big|_0^1 = 2\sqrt{1} - 2\sqrt{0} = 2.$$

2°). Avem:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{2}{\sqrt{n+2}} + \ldots + \frac{n}{\sqrt{2n}} \right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{k}{n}}{\sqrt{\frac{k}{n} + 1}} \left(\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n} \right) =$$

$$= \int_0^1 \frac{x\, dx}{\sqrt{x+1}} = \int_0^1 \sqrt{x+1}\, dx - \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+1}} =$$

$$= \frac{2}{3} (x+1)^{2/3} \Big|_0^1 - 2\sqrt{x+1} \Big|_0^1 =$$

$$= \left(\frac{2\sqrt{2^3}}{3} - \frac{2}{3} \right) - (2\sqrt{2} - 2) = \frac{4 - 2\sqrt{2}}{3}.$$

7.37. Avem: 1°).

$$1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{n}=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}$$

și deci

$$\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}}.$$

Deci $f(x)=\sqrt{x}$ și

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}=\int_0^1\sqrt{x}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_0^1=\frac{2}{3}.$$

2°). $$\frac{1}{n+k}+\frac{1}{n+2k}+\frac{1}{n+3k}+\ldots+\frac{1}{n+nk}=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+ki}.$$

Însumarea se face în raport cu i. Scriem suma astfel:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+ki}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{n+ki}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+k\frac{i}{n}}.$$

Funcția $f(x)$ se obține punînd $\frac{i}{n}=x$, $f(x)=\frac{1}{1+kx}$.

Deci limita este:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+ki}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+kx}=\frac{1}{k}\ln(1+kx)\Big|_0^1=$$

$$=\ln\sqrt[k]{1+k}.$$

7.38. Avem:

$$I = \int (\sin x \cos x)^2 \cos^2 x \, dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int \sin^2 2x(1 + \cos 2x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int \sin^2 2x \cos 2x \, dx + \frac{1}{16}\int (1 - \cos 4x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{48}\sin^3 2x + \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 4x + C.$$

7.39. Notăm $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$; $dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$;

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2};\quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Înlocuind obținem:

$$I = \frac{1}{2}\int\left(t + 2 + \frac{1}{t}\right)dt = \frac{t^2}{4} + t + \frac{1}{2}\ln|t|$$

sau

$$I = \frac{1}{4}\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} + \operatorname{tg}\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

7.40. Integrala se mai poate scrie:

$$I = \int \sin^2 x(1 - \sin^2 x)^2 \cos x \, dx =$$

$$= \int \sin^2 x(1 - \sin^2 x)^2 \, d(\sin x).$$

Deci:

$$I = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{2}{5}\sin^5 x + \frac{\sin^7 x}{7} + C.$$

7.41. Avem:

$$I = \int \frac{\operatorname{tg} x \, dx}{\cos^2 x(1 + \operatorname{tg} x)} = \int \frac{\operatorname{tg} x \, d(\operatorname{tg} x)}{1 + \operatorname{tg} x}.$$

Facem substituția $\operatorname{tg} x = t$ și avem:

$$I = \int \frac{t \, dt}{1 + t} = \int \left(1 - \frac{1}{t + 1}\right) dt = t - \ln|t + 1| + C.$$

Deci:

$$I = \operatorname{tg} x - \ln|1 + \operatorname{tg} x| + C.$$

7.42. Facem substituția $\cos x = t$; $dx = \frac{-dt}{\sqrt{1 - t^2}}$.

$$I_1 = -\int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{\sqrt{1 - t^2} \, dt}{\sqrt{1 - t^2}\,(t + t^2\sqrt{2})} =$$

$$= \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \frac{dt}{t(1 + t\sqrt{2})} = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \left(\frac{1}{t} - \frac{\sqrt{2}}{1 + t\sqrt{2}}\right) dt =$$

$$= (\ln t - \sqrt{2}\ln(1 + t\sqrt{2}))\Big|_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} = -\sqrt{2}\ln(1 + \sqrt{2}) -$$

$$- \ln\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2}\ln 2 = \sqrt{2}\ln\frac{2}{\sqrt{2} + 1} +$$

$$+ \frac{1}{2}\ln 2 = \sqrt{2}\ln[2(\sqrt{2} - 1)] + \frac{1}{2}\ln 2.$$

$$I_1 = \ln\sqrt{2} + \sqrt{2}\ln 2(\sqrt{2} - 1).$$

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x \, dx}{\sin x + \cos x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1 + \operatorname{tg} x}.$$

Facem substituția $\operatorname{tg} x = t$; $dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$.

$$I_2 = \int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)(1+t)} = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{1}{1+t} +\right.$$

$$\left. + \frac{1-t}{1+t^2}\right) dt = \frac{1}{2}\ln(1+t)\Big|_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1-t}{1+t^2}\, dt =$$

$$= \ln\sqrt{2} + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{t\, dt}{1+t^2} =$$

$$= \ln\sqrt{2} + \frac{\operatorname{arc\,tg} t}{2}\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\frac{1}{2}\, d(t^2)}{1+t^2} = \ln\sqrt{2} +$$

$$+ \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\ln(1+t^2)\Big|_0^1 = \ln\sqrt{2} + \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\ln 2 =$$

$$= \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\ln 2 = \frac{1}{4}\left(\ln 2 + \frac{\pi}{2}\right).$$

$$I_2 = \frac{\ln 2 + \frac{\pi}{2}}{4}.$$

7.43. Avem:

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k e^{\frac{k}{n}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} e^{\frac{k}{n}}, \text{ și deci } f(x) = xe^x$$

și $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n} k e^{\frac{k}{n}} = \displaystyle\int_0^1 xe^x\, dx = 1$ (se integrează prin părți).

7.44. Avem:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sin^2 \frac{k\pi}{n} = \int_0^1 \sin^2 \pi x \, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (1 - \cos 2\pi x)\, dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{\sin 2\pi x}{2\pi}\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2}(1 - 0) = \frac{1}{2}.$$

7.45. Scriem:

$$n^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n^2 + k^2)\left(\sqrt{n^2 + k^2} + n\right)} =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{n^3}{(n^2 + k^2)\left(\sqrt{n^2 + k^2} + n\right)} =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right)\left(\sqrt{1 + \frac{k^2}{n^2}} + 1\right)}.$$

Așa că $f(x) = \dfrac{1}{(1 + x^2)\left(\sqrt{1 + x^2} + 1\right)}$ și limita este

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1 + x^2)\left(\sqrt{1 + x^2} + 1\right)}.$$

Pentru calculul integralei, facem schimbarea de variabilă

$x = \operatorname{tg} t \Rightarrow dx = \dfrac{1}{\cos^2 t}\, dt$ și noile limite sînt 0 și $\dfrac{\pi}{4}$, și

$$1 + x^2 = 1 + \operatorname{tg}^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}.$$

Deci: $$\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)(\sqrt{1+x^2}+1)} =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{1}{\cos^2 t}\,dt}{\frac{1}{\cos^2 t}\left(\frac{1}{\cos t}+1\right)} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos t\, dt}{1+\cos t} =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} dt - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{1+\cos t} = \frac{\pi}{4} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{2\cos^2\frac{t}{2}} =$$

$$= \frac{\pi}{4} - \operatorname{tg}\frac{t}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4} + 1 - \sqrt{2}.$$

7.46. Avem: $f(x) = \operatorname{tg}^2\frac{\pi}{3}x$ și

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\operatorname{tg}^2\frac{k\pi}{3n} = \int_0^1 \operatorname{tg}^2\frac{\pi}{3}x\,dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{1-\cos^2\frac{\pi}{3}x}{\cos^2\frac{\pi}{3}x}\,dx = \int_0^1 \frac{dx}{\cos^2\frac{\pi}{3}x} -$$

$$- \int_0^1 dx = \frac{3}{\pi}\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}x\Big|_0^1 - x\Big|_0^1 = \frac{3\sqrt{3}}{\pi} -$$

$$-1 = \frac{3\sqrt{3}-\pi}{\pi}.$$

7.47. Punem $\sin^2 x = t$, deci $2\sin x \cos x dx = dt$, adică $\sin 2x\, dx = dt$. Cînd x variază de la 0 la $\frac{\pi}{2}$ atunci t variază de la 0 la 1.

Integrala devine:

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \ln(t+\sqrt{1+t^2})\Big|_0^1 = \ln(1+\sqrt{2}).$$

7.48. Dacă $a > b$, integrala devine:

$$I = \int \frac{dx}{(a+b)\cos^2\frac{x}{2} + (a-b)\sin^2\frac{x}{2}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}} \operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + C.$$

Dacă $a < b$ avem:

$$I = \int \frac{dx}{(b+a)\cos^2\frac{x}{2} - (b-a)\sin^2\frac{x}{2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}} \ln\left|\frac{\sqrt{b-a}\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \sqrt{b+a}}{\sqrt{b-a}\operatorname{tg}\frac{x}{2} - \sqrt{b+a}}\right| + C.$$

7.49. Pentru a demonstra cele două relații de recurență, se integrează prin părți. Avem:
$u = \cos^{n-1} x$; $dv = \sin^m x \cos x\, dx$;
$du = -(n-1)\cos^{n-2} x \sin x\, dx$ și

$$v = \frac{\sin^{m+1} x}{m+1}.$$

Deci:

$$I_{m,n} = \frac{\sin^{m+1} x \cdot \cos^{n-1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1}\int \sin^{m+2} x \cdot$$

$$\cdot \cos^{n-2} x\, dx = \frac{\sin^{m+1} x \cdot \cos^{n-1} x}{m+1} +$$

$$+ \frac{n-1}{m+1}\int \sin^m x \cos^{n-2} x\, dx -$$

$$+ \frac{n-1}{m+1}\int \sin^m x \cos^n x\, dx,$$

de unde rezultă prima relație.

A doua se demonstrează analog.

7.50. Pentru prima integrală se notează $\sin x = t$, deci $\cos x \, dx = dt$.
Rezultă:

$$I_1 = \int \frac{t^7}{1-t^2} dt = -\int (t^5 + t^3 + t) \, dt +$$

$$+ \int \frac{t}{1-t^2} dt = -\frac{t^6}{6} - \frac{t^4}{4} - \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2} \ln |1 - t^2| + C,$$

sau:

$$I_1 = -\frac{\sin^6 x}{6} - \frac{\sin^4 x}{4} - \frac{\sin^2 x}{2} - \frac{1}{2} \ln \cos^2 x + C.$$

În mod analog se calculează a doua integrală.

7.51. Avem succesiv:

$$I = \frac{1}{2} \int (2 \cos x \cos 3x) \cos 6x \, dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int (\cos 4x + \cos 2x) \cos 6x \, dx =$$

$$= \frac{1}{4} \int (2 \cos 4x \cos 6x + 2 \cos 2x \cos 6x) \, dx =$$

$$= \frac{1}{4} \int (\cos 10x + \cos 2x + \cos 8x + \cos 4x) \, dx =$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{\sin 10x}{10} + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 8x}{8} + \frac{\sin 4x}{4} \right) + C.$$

7.52. Avem prin substituția $\operatorname{tg} x = t$

$$I = \int \frac{dt}{1 + 2t^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arc\,tg}(\sqrt{2}t) + C,$$

sau:

$$I = \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arc\,tg}(\sqrt{2} \operatorname{tg} x) + C.$$

7.53. Se face substituția $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$ și avem

$$3\cos x+\sin x+1=\frac{3(1-t^2)}{1+t^2}+\frac{2t}{1+t^2}+$$

$$+1=\frac{4+2t-2t^2}{1+t^2},$$

deci:

$$I=\int\frac{1+t^2}{4+2t-2t^2}\cdot\frac{2dt}{1+t^2}=$$

$$=\int\frac{dt}{2+t-t^2}=-\int\frac{dt}{(t+1)(t-2)}=$$

$$=-\frac{1}{3}\ln\left|\frac{t-2}{t+1}\right|+C,$$

sau:

$$I=-\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-2}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}\right|+C.$$

7.54. Se face substituția $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$. Făcînd calculele avem:

$$I=\frac{1}{4}\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C.$$

7.55. Făcînd substituția $\operatorname{tg} x = t$, obținem $dt = \dfrac{dx}{\cos^2 x}$ și integrala de calculat devine:

$$\int \frac{\dfrac{dx}{\cos^2 x}}{1 - \dfrac{\cos^2 a}{\cos^2 x}} = \int \frac{dt}{1 - \cos^2 a(1 + t^2)} =$$

$$= \int \frac{dt}{\sin^2 a - \cos^2 a \cdot t^2} = \frac{1}{\cos^2 a} \cdot \frac{1}{2 \operatorname{tg} a}\left[\int \frac{dt}{\operatorname{tg} a + t} + \right.$$

$$\left. + \int \frac{dt}{\operatorname{tg} a - t}\right] = \frac{1}{\sin 2a}[\ln |t + \operatorname{tg} a| -$$

$$- \ln |t - \operatorname{tg} a|] + C =$$

$$= \frac{1}{\sin 2a} \ln \left|\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} a}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{\sin 2a} \ln \left|\frac{\sin(x + a)}{\sin(x - a)}\right| + C.$$

7.56. Fie

$$\frac{1}{x(x + r) \dots [x + (n - 1) r]} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x + r} + \dots +$$

$$+ \frac{A_k}{x + (k - 1) r} + \dots + \frac{A_n}{x + (n - 1) r}.$$

Înmulțind ambii membri ai acestei egalități cu $x + (k - 1) r$ și făcînd apoi $x = -r(k - 1)$, vom obține:

$$A_k = \frac{1}{[-(k-1) r][-(k-2) r] \dots (-r) \cdot (r) \dots [(n-k)r]} =$$

$$= \frac{(-1)^{k-1}}{(k - 1)!(n - k)! \, r^{n-1}} = (-1)^{k-1} \cdot \frac{k \cdot C_n^k}{n! \, r^{n-1}},$$

deci:

$$\frac{1}{x(x+r)\dots[x+(n-1)r]}=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\cdot$$

$$\cdot\frac{k\cdot C_n^k}{n!\,r^{n-1}}\cdot\frac{1}{x+(k-1)r}.$$

Rezultă:

$$\int\frac{dx}{x(x+r)\dots[x+(n-1)r]}=\frac{1}{n!\,r^{n-1}}\cdot$$

$$\cdot\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\cdot k\cdot C_n^k\cdot\int\frac{dx}{x+(k-1)r}=$$

$$=\frac{1}{n!\,r^{n-1}}\cdot\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\cdot(k\cdot C_n^k)\cdot\ln|x+(k-1)r|+C.$$

7.57. Avem succesiv:

$$I=\int_0^1\frac{1-x^2+x^4}{1+x^6}dx+\int_0^1\frac{x^2\,dx}{1+x^6}=$$

$$=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}+\frac{1}{3}\int_0^1\frac{d(x^3)}{1+(x^3)^2}=\operatorname{arc\,tg}x\Big|_0^1+$$

$$+\frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg}x^3\Big|_0^1=\frac{\pi}{3}.$$

7.58. Avem:

$$I=\int_0^1\frac{x^2\,dx}{x^6+1}+\int_0^1\frac{x\,dx}{x^6+1}=\frac{1}{3}\int_0^1\frac{d(x^3)}{x^6+1}+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^1\frac{dt}{t^3+1}.$$

Însă

$$\int_0^1\frac{d(x^3)}{x^6+1}=\frac{\pi}{4}\quad\text{și}\quad\frac{1}{t^3+1}=\frac{1}{3(t+1)}-\frac{t-2}{3(t^2-t+1)}.$$

Deci:

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dt}{t^3+1} = \frac{1}{6}\int_0^1 \frac{dt}{t+1} - \frac{1}{6}\int_0^1 \frac{t-2}{t^2-t+1}\, dt =$$

$$= \frac{1}{6}\ln|t+1|\Big|_0^1 - \frac{1}{12}\ln|t^2-t+1|\Big|_0^1 +$$

$$+ \frac{\sqrt{3}}{6}\operatorname{arc\,tg}\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\Big|_0^1 = \frac{\ln 2}{6} + \frac{\sqrt{3}\,\pi}{18}.$$

Rezultă:

$$I = \frac{\pi}{12} + \frac{\ln 2}{6} + \frac{\sqrt{3}\,\pi}{18}.$$

7.59. Avem:

$$I_1 = \int_0^1 \left(x - \frac{x}{x^3+1}\right) dx = \int_0^1 x\, dx -$$

$$- \int_0^1 \frac{x\, dx}{x^3+1} = \frac{1}{2} - I_3.$$

Deoarece

$$\frac{x}{x^3+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1},$$

ezultă din identificare că $A = -\frac{1}{3}$; $B = \frac{1}{3}$;

$; = \frac{1}{3}$.

Deci:

$$I_3 = \int_0^1 \frac{x\, dx}{x^3+1} = -\frac{1}{3}\int_0^1 \frac{dx}{x+1} +$$

$$+ \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{(x+1)\, dx}{x^2-x+1} = -\frac{1}{3}\ln|x+1|\Big|_0^1 +$$

$$+ \frac{1}{3}\ln|x^2-x+1|\Big|_0^1 + \frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-1}{3}\Big|_0^1.$$

Rezultă:

$$I_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\ln 2 - \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Pentru calculul lui I_2 avem $1 + x^2 = t^2$ și noile limite de integrare sînt $t_1 = 1$; $t_2 = \sqrt{2}$. Deci

$$I_2 = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{t\,dt}{1+t} = \int_1^{\sqrt{2}} dt - \int_1^{\sqrt{2}} \frac{dt}{t+1} =$$

$$= \sqrt{2} - 1 - \ln(1+\sqrt{2}) + \ln 2.$$

7.60. Vom scrie:

$$\frac{12x^2 - 70x + 98}{x^3 - 9x^2 + 26x - 24} = \frac{A}{x-2} +$$

$$+ \frac{B}{x-3} + \frac{C}{x-4}.$$

Făcînd calculele și identificînd, obținem:

$$A = 3;\ B = 4;\ C = 5,$$

deci:

$$I_1 = 3\ln|x-2| + 4\ln|x-3| + 5\ln|x-4|.$$

Avem analog:

$$\frac{(x^2+1)^2}{(x-1)^6} = \frac{4}{(x-1)^6} + \frac{8}{(x-1)^5} + \frac{8}{(x-1)^4} +$$

$$+ \frac{4}{(x-1)^3} + \frac{1}{(x-1)^2};$$

deci:

$$I_2 = -\frac{4}{5(x-1)^5} - \frac{8}{4(x-1)^4} - \frac{8}{3(x-1)^3} -$$

$$- \frac{4}{2(x-1)^2} - \frac{1}{x-1} + C.$$

7.61. 1°. Avem:

$$f(x) = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+5}.$$

Eliminînd numitorii, obținem:

$$A(x^2+2x+5) + B(x^2+2x+5)(x-1) +$$
$$+ (Cx+D)(x^2-2x+1) = (2x+1)(2x^2+6)$$

Făcînd calculele și identificînd, obținem:

$$A = 3; \quad B = 2; \quad C = 2; \quad D = 1.$$

Deci:

$$f(x) = \frac{3}{(x-1)^2} + \frac{2}{x-1} + \frac{2x+1}{x^2+2x+5}.$$

2°. Integrînd, obținem:

$$\int f(x)\,dx = -\frac{3}{x-1} + 2\ln|x-1| +$$

$$+ \ln(x^2+2x+5) - \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{x+1}{2} + C.$$

7.62. Desfacem în elemente și avem:

$$I = 3\int\frac{dx}{x^2} - 2\int\frac{dx}{x} + \int\frac{2x+5}{x^2+3x+3}\,dx =$$

$$= -\frac{3}{x} - 2\ln|x| + \ln(x^2+3x+3) +$$

$$+ \frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+3}{\sqrt{3}} + C.$$

7.63. Notăm $x^4 = t$ și integrala devine:

$$I = \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{t\,dt}{1+t^3} = \frac{1}{24}\int_0^1 \frac{2t-1}{t^2-t+1}dt +$$

$$+\frac{1}{8}\int_0^1 \frac{dt}{t^2-t+1} - \frac{1}{12}\int_0^1 \frac{dt}{t+1} =$$

$$= \frac{1}{24}\ln(t^2-t+1)\Big|_0^1 + \frac{1}{8}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\,\text{arc tg}\,\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\Big|_0^1 -$$

$$-\frac{1}{12}\ln|t+1|\Big|_0^1.$$

7.64. Avem:

$$\frac{1}{(x^2+1)(x^2+2)(x^2+3)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} +$$

$$+\frac{Cx+D}{x^2+2} + \frac{Ex+F}{x^2+3}.$$

Eliminînd numitorii și identificînd obținem sistemul: $A + C + E = 0$; $B + D + F = 0$; $5A + 4C + 3E = 0$; $5B + 4D + 3F = 0$; $6A + 3C + 2E = 0$; $6B + 3D + 2F = 1$.

Rezolvînd acest sistem obținem soluția:

$$A = C = E = 0 \text{ și } B = \frac{1}{2},\quad F = \frac{1}{2};\quad D = -1.$$

Deci:

$$\int_0^\alpha \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+2)(x^2+3)} = \int_0^\alpha \frac{dx}{2(x^2+1)} +$$

$$+\int_0^\alpha \frac{dx}{2(x^2+3)} - \int_0^\alpha \frac{dx}{x^2+2} = \frac{1}{2}\,\text{arc tg}\,x\Big|_0^\alpha +$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{3}}\,\text{arc tg}\,\frac{x}{\sqrt{3}}\Big|_0^\alpha - \frac{1}{\sqrt{2}}\,\text{arc tg}\,\frac{x}{\sqrt{2}}\Big|_0^\alpha.$$

Pentru $\alpha \to \infty$ avem:

$$I = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

7.65. Integrala se mai poate scrie:

$$I = \int \frac{dx}{\left[\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right]^2}$$

și calculul acestei integrale se reduce printr-o substituție convenabilă la calculul unei integrale de tipul

$$\int \frac{du}{(u^2 + a^2)^2}.$$

7.66. Avem:

$$\frac{x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 27x + 11}{(x-1)(x-2)(x-3)} = (x-2) + $$

$$+ \frac{x^2 + x - 1}{(x-1)(x-2)(x-3)},$$

însă

$$\frac{x^2 + x - 1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{a}{x-1} + $$

$$+ \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x-3}.$$

Determinăm pe a, b, c prin identificare:

$$a = \frac{1}{2}; \quad b = -5; \quad c = \frac{11}{2}.$$

Avem deci:

$$I = \frac{(x-2)^2}{2} + \frac{1}{2} \ln |x-1| - 5 \ln |x-2| + $$

$$+ \frac{11}{2} \ln |x-3| + C.$$

7.67. Avem:

$$\frac{2x^3-3x^2+2x}{(x^2+4)(x^2+1)}=\frac{Ax+B}{x^2+4}+\frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

Eliminînd numitorii și identificînd, obținem:

$$A=2;\ B=-4;\ C=0;\ D=1.$$

Deci:

$$I=\ln(x^2+4)-2\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{2}+\operatorname{arc\,tg}x+C.$$

7.68. Integrînd prin părți avem:

$$\int_0^\alpha e^{-x}\cdot x^2\,dx=-x^2\cdot e^{-x}\Big|_0^\alpha+2\int_0^\alpha e^{-x}\cdot x\,dx=$$

$$=-\alpha^2\cdot e^{-\alpha}+2(-\alpha\cdot e^{-\alpha}-e^{-\alpha}+1),$$

de unde

$$\lim_{\alpha\to\infty}\int_0^\alpha e^{-x}\cdot x^2\,dx=\lim_{\alpha\to\infty}-\frac{\alpha^2+2\alpha+2}{e^\alpha}+2=$$

$$=-\lim_{\alpha\to\infty}\frac{2\alpha+2}{e^\alpha}+2=-\lim_{\alpha\to\infty}\frac{2}{e^\alpha}+2=0+2=2.$$

Am folosit în calculul limitei de mai sus regula lui l'Hospital.

7.69. Avem:

$$\int_0^\alpha e^{-x}x\,dx=-x\cdot e^{-x}\Big|_0^\alpha+\int_0^\alpha e^{-x}\,dx=$$

$$=-x\cdot e^{-x}\Big|_0^\alpha-e^{-x}\Big|_0^\alpha=-\alpha\cdot e^{-\alpha}-e^{-\alpha}+1.$$

Cu ajutorul regulii lui l'Hospital vom obține:

$$\lim_{\alpha\to\infty}\int_0^\alpha e^{-x}\cdot x\,dx=\lim_{\alpha\to\infty}-\frac{\alpha+1}{e^\alpha}+1=$$

$$=-\lim_{\alpha\to\infty}\frac{1}{e^\alpha}+1=0+1=1$$

și

$$\lim_{\alpha\to 0}\int_0^{\alpha} e^{-x}\cdot x\,dx = -\lim_{\alpha\to 0}\frac{\alpha+1}{e^{\alpha}}+1 = -1+1=0.$$

7.70. Avem:

$$I_1=\int \ln x\,dx = x\ln x-\int dx = x\ln x - x + C.$$

Să notăm pentru $n\in N$:

$$I_n=\int (\ln x)^n\,dx.$$

Utilizînd formula de integrare prin părți, obținem:

$$I_n = x(\ln x)^n - \int xn(\ln^{n-1}x)\cdot\frac{1}{x}\,dx,$$

sau

$$I_n = x(\ln x)^n - nI_{n-1}. \qquad (1)$$

Folosind relația de recurență (1), avem:

$I_2 = x(\ln x)^2 - 2(x\ln x - x) + C.$

$I_3 = x(\ln x)^3 - 3\,(x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x) + C.$

7.71. Folosim formula de integrare prin părți: notăm

$u=\ln x$ și $dv = x^{\alpha}\,dx$ de unde avem $du=\frac{1}{x}\,dx$,

$v=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ pentru $\alpha\in R-\{-1\}$.

Deci:

$$I(\alpha)=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\ln x-\frac{1}{\alpha+1}\int x^{\alpha}\,dx =$$

$$=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\ln x-\frac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^2}+C.$$

Dacă $\alpha = -1$, obținem:

$$I(-1) = \int \frac{\ln x}{x} \, \mathrm{d}x = \int \ln x \, \mathrm{d}(\ln x) = \frac{\ln^2 x}{2} + C.$$

7.72. Integrala se mai scrie:

$$I = \int \frac{1}{1 + \cos x} \cdot e^x \, \mathrm{d}x + \int \frac{\sin x}{1 + \cos x} \cdot e^x \, \mathrm{d}x.$$

Integrînd prin părți a doua integrală, obținem:

$$\int \frac{\sin x}{1 + \cos x} e^x \, \mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{1 + \cos x} \, \mathrm{d}(e^x) =$$

$$= \frac{\sin x}{1 + \cos x} e^x - \int \frac{1}{1 + \cos x} e^x \, \mathrm{d}x.$$

Deci:

$$I = \frac{\sin x}{1 + \cos x} \cdot e^x + C.$$

7.73. Integrala dată devine:

$$\int \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1} e^{\operatorname{arc\,tg} x} \, \mathrm{d}x = \int e^{\operatorname{arc\,tg}} \, \mathrm{d}x +$$

$$+ \int \frac{x}{x^2 + 1} e^{\operatorname{arc\,tg} x} \, \mathrm{d}x.$$

Integrăm prin părți a doua integrală din suma de mai sus. Avem:

$$u = x; \quad \mathrm{d}v = \frac{e^{\operatorname{arc\,tg} x}}{x^2 + 1} \, \mathrm{d}x \quad \text{deci} \quad \mathrm{d}u = \mathrm{d}x; \quad v = e^{\operatorname{arc\,tg} x}.$$

Rezultă:

$$\int \frac{x}{x^2 + 1} e^{\operatorname{arc\,tg} x} \, \mathrm{d}x = x e^{\operatorname{arc\,tg} x} - \int e^{\operatorname{arc\,tg} x} \mathrm{d}x,$$

de unde

$$\int \frac{x^2+x+1}{x^2+1} e^{\operatorname{arc\,tg} x}\, dx = x e^{\operatorname{arc\,tg} x} + C.$$

7.74. Vom calcula integrala J prin părți, prin două metode:

$$J = \int e^{\arcsin x} \cdot \frac{x\, dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int x\, d e^{\arcsin x} =$$

$$= x e^{\arcsin x} - \int e^{\arcsin x}\, dx = x e^{\arcsin x} - I.$$

De asemenea:

$$J = \int e^{\arcsin x} \cdot \frac{x\, dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int e^{\arcsin x} d\left(-\sqrt{1-x^2}\right) =$$

$$= -\sqrt{1-x^2} e^{\arcsin x} + \int \sqrt{1-x^2} \cdot \frac{e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}\, dx =$$

$$= -\sqrt{1-x^2} e^{\arcsin x} + I.$$

Deci am obținut sistemul

$$J = x e^{\arcsin x} - I$$

$$J = -\sqrt{1-x^2} e^{\arcsin x} + I.$$

Adunînd cele două ecuații, obținem:

$$J = e^{\arcsin x} \left(\frac{x - \sqrt{1-x^2}}{2} \right).$$

Iar apoi:

$$I = e^{\arcsin x} \left(\frac{x + \sqrt{1-x^2}}{2} \right).$$

7.75. Avem:

$$I = \int_{-1}^{0} (x - x) e^x\, dx + \int_0^1 (x + x) e^x\, dx =$$

$$= 2 \int_0^1 x e^x = 2 x e^x \Big|_0^1 - 2 e^x \Big|_0^1 = 2.$$

7.76. Avem:

$$I = \int_{-1}^{0} (-x)\, e^{2x}\, dx + \int_{0}^{1} xe^{2x}\, dx = 2\int_{0}^{1} xe^{2x}\, dx.$$

Însă:

$$\int xe^{2x}\, dx = \frac{1}{2} xe^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}\, dx = \frac{1}{2} xe^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + C.$$

Deci:

$$I = xe^{2x}\Big|_0^1 - \frac{1}{2} e^{2x}\Big|_0^1 = e^2 - \frac{1}{2} e^2 +$$

$$+ \frac{1}{2} = \frac{e^2 + 1}{2}.$$

7.77. Integrăm prin părți notînd $u = \ln(x^2 + x + 1)$; $dv = dx$. Atunci:

$$du = \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} dx \text{ și } v = x.$$

Integrala devine:

$$I = x \ln(x^2 + x + 1) - \int \frac{(2x^2 + x)\, dx}{x^2 + x + 1}.$$

Avem în continuare:

$$\int \frac{(2x^2 + x)\, dx}{x^2 + x + 1} = 2\int dx - \frac{1}{2}\int \frac{(2x + 1)\, dx}{x^2 + x + 1} -$$

$$- \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x^2 + x + 1} = 2x - \frac{1}{2} \cdot \ln(x^2 + x + 1) -$$

$$- \sqrt{3} \operatorname{arc\,tg} \frac{2x + 1}{\sqrt{3}} + C.$$

Deci:

$$I = \left(x + \frac{1}{2}\right)\ln(x^2 + x + 1) - 2x +$$

$$+ \sqrt{3} \operatorname{arc\,tg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

7.78. Dacă notăm pentru $n \in N$ cu

$I_n = \int \cos^n x \, dx$, avem relația de recurență

$$I_n = \frac{\sin x \cos^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} \cdot I_{n-2}.$$

Avem deci:

$$I_4 = \frac{\sin x \cos^3 x}{4} + \frac{3}{4} I_2 = \frac{\sin x \cos^3 x}{4} +$$

$$+ \frac{3}{8} \sin x \cos x + \frac{3}{8} x + C.$$

7.79. Se calculează utilizînd metoda de integrare prin părți de două ori.

$$I = \frac{e^x(\sin 2x - 2\cos 2x)}{5} + C.$$

7.80. Pentru $n \in N$, dacă notăm

$$I_n = \int \sin^n x \, dx,$$

avem relația de recurență:

$$I_n = -\frac{\sin^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

Deci:

$$I_6 = -\frac{\sin^5 x \cos x}{6} + \frac{5}{6} I_4 = -\frac{\sin^5 x \cos x}{6} +$$

$$+ \frac{5}{6}\left(-\frac{\sin^3 x \cos x}{4} + \frac{3}{4} I_2\right),$$

unde

$$I_2 = \int \sin^2 x \, dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C.$$

7.81. Ținînd seama că: $d\ln(x + \sqrt{1 + x^2}) = \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}}$, avem:

$$I_1 = \int_0^1 \frac{\ln(x + \sqrt{1 + x^2})}{\sqrt{1 + x^2}} dx = \int_0^1 \ln(x +$$

$$+ \sqrt{1 + x^2}) \, d\ln(x + \sqrt{1 + x^2}) =$$

$$= \frac{[\ln(x + \sqrt{1 + x^2})]^2}{2}\Bigg|_0^1 = \frac{\ln^2(1 + \sqrt{2})}{2}.$$

Se observă că: $\frac{x\,dx}{\sqrt{1 + x^2}} = d\sqrt{1 + x^2}$. Integrînd prin părți, obținem:

$$I_2 = \int_0^1 \frac{x \ln x(x + \sqrt{1 + x^2}}{\sqrt{1 + x^2}} dx =$$

$$= \int_0^1 \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) \, d\sqrt{1 + x^2} = \sqrt{1 + x^2} \cdot$$

$$\cdot \ln(x + \sqrt{1 + x^2})\Big|_0^1 -$$

$$- \int_0^1 \sqrt{1 + x^2} \, d\ln(x + \sqrt{1 + x^2})$$

$$= \sqrt{2}\ln(1 + \sqrt{2}) - \int_0^1 dx = \sqrt{2}\ln(1 + \sqrt{2}) - 1.$$

7.82. Notînd $I = \int_0^\pi (x \cos x)^2 \, dx$, avem:

$$I = \int_0^\pi x^2 \cos^2 x \, dx = \int_0^\pi x^2 \cdot \frac{1 + \cos 2x}{2} dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_0^\pi x^2 \, dx + \int_0^\pi x^2 \cos 2x \, dx\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}\Big|_0^\pi +\right.$$

$$\left. + \int_0^\pi x^2 \cos 2x \, dx\right] = \frac{\pi^3}{6} + \frac{1}{2} \cdot \int_0^\pi x^2 \cos 2x \, dx.$$

Însă folosind de două ori metoda integrării prin părți, avem:

$$\int_0^\pi x^2 \cdot \cos 2x \, dx = x^2 \cdot \frac{\sin 2x}{2}\Big|_0^\pi -$$

$$- \int_0^\pi \frac{\sin 2x}{2} \cdot 2x \, dx = - \int_0^\pi x \sin 2x \, dx =$$

$$= -\left[- x \frac{\cos 2x}{2}\Big|_0^\pi + \int_0^\pi \frac{\cos 2x}{2} dx\right] = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4} \cdot 0 = \frac{\pi}{2}.$$

Rezultă: $I = \frac{\pi^3}{6} + \frac{\pi}{4}.$

7.83. Deoarece

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\cos 2x + \cos \frac{\pi}{3}}{2} =$$

$$= \frac{2 \cos 2x + 1}{4},$$

rezultă că funcția de sub semnul integralei este pară și, prin urmare,

$$\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)} =$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{4dx}{2\cos 2x + 1} = 8\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{2\cos 2x + 1}.$$

Pentru calculul ultimei integrale vom face substituția $\operatorname{tg} x = t$.

Rezultă $dx = \frac{dt}{1+t^2}$ și $x = 0 \Rightarrow t = 0$; $x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t = \frac{1}{\sqrt{3}}$; deci:

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{2\cos 2x + 1} = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{2\frac{1-t^2}{1+t^2}+1} =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{dt}{3-t^2} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left[\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{dt}{\sqrt{3}+t} +\right.$$

$$\left. + \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{dt}{\sqrt{3}-t}\right] = \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \left[\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{du}{u} -\right.$$

$$\left. - \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{dv}{v}\right] = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left[\left(\ln\frac{4}{\sqrt{3}} - \ln\sqrt{3}\right) -\right.$$

$$\left. - \left(\ln\frac{2}{\sqrt{3}} - \ln\sqrt{3}\right)\right] = \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \left(\ln\frac{4}{3} -\right.$$

$$\left. - \ln\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln 2.$$

7.84. Făcînd substituția $\sin t = s$, obținem $ds = \cos t \, dt = \sqrt{1 - \sin^2 t}\, dt = \sqrt{1 - s^2}\, dt$, deci $dt = \dfrac{ds}{\sqrt{1 - s^2}}$. Limitele de integrare devin $s = 0$, $s = \sin x$ și astfel egalitatea din enunț este evidentă.

7.85. Avem:

$$E = n^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^3 + k^3} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{n^3}{n^3 + k^3} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 + \dfrac{k^3}{n^3}}.$$

$$L = \lim_{n \to \infty} E = \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^3} = \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{dx}{x + 1} -$$

$$- \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{(x - 2)\, dx}{x^2 - x + 1} = \frac{1}{3} \ln 2 - \frac{1}{6} \int_0^1 \frac{2x - 1}{x^2 - x + 1}\, dx +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dx}{\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}} = \frac{1}{3} \ln 2 - \frac{1}{6} \ln(x^2 -$$

$$- x + 1) \Big|_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dx}{\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}}.$$

Pentru ultima integrală facem substituția $x - \dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} t$ și obținem:

$$\int_0^1 \frac{dt}{\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \operatorname{arc\,tg} t \Big|_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{2\sqrt{3}\pi}{9}.$$

Deci

$$L = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^3} = \frac{1}{3}\ln 2 + \frac{\sqrt{3}\pi}{9} = \frac{\ln 8 + \sqrt{3}\pi}{9}.$$

7.86. Avem:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\left(1+\frac{k}{n}\right)\sqrt{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}} =$$

$$= \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x^2}}.$$

Facem substituția $x = \operatorname{tg} y$; $dx = \frac{dy}{\cos^2 y}$.

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{dy}{\cos^2 y}}{(1+\operatorname{tg} y)\cdot\frac{1}{\cos y}} =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dy}{\sin y + \cos y} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dy}{\sqrt{2}\sin\left(y+\frac{\pi}{4}\right)} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\ln \operatorname{tg}\frac{y+\frac{\pi}{4}}{2}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\ln\frac{1}{\sqrt{2}-1} =$$

$$= \frac{\ln(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}}.$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{\ln(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}}.$$

7.87. Ne folosim de formula

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \text{ și obținem:}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^3}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{\sqrt{2n-k}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n\sqrt{(2n-k)\,n}}=$$

$$=\int_0^1\frac{x^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{2-x}}.$$

Facem substituția $2-x=t^2$; $x=2-t^2$; $\mathrm{d}x=$ $=-2t\,\mathrm{d}t$.

$$\int_0^1\frac{x^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{2-x}}=-\int_{\sqrt{2}}^1\frac{2t(2-t^2)^2\,\mathrm{d}t}{t}=$$

$$=2\int_1^{\sqrt{2}}(2-t^2)^2\,\mathrm{d}t=2\left(4t-\frac{4t^3}{3}+\frac{t^5}{5}\right)\Bigg|_1^{\sqrt{2}}=$$

$$=2\left[\left(4\sqrt{2}-\frac{8\sqrt{2}}{3}+\frac{4\sqrt{2}}{5}\right)-\left(4-\frac{4}{3}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{5}\right)\right]=\frac{2}{15}(32\sqrt{2}-43).$$

7.88. Să aducem suma la forma $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

Avem:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{(2n+k)\sqrt{(2n+k)\,k}}=$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{n^2}{(2n+k)\sqrt{(2n+k)\,k}}=$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\left(2+\frac{k}{n}\right)\sqrt{\left(2+\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{k}{n}}}$$

și deci

$$f(x) = \frac{1}{(2+x)\sqrt{x^2+2x}}$$

și

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{(2n+k)\sqrt{(2n+k)\,k}} =$$

$$= \int_0^1 \frac{dx}{(2+x)\sqrt{x^2+2x}}.$$

Calculul integralei îl facem prin substituția

$$\sqrt{x^2+2x} = t - x \Rightarrow x^2 + 2x = t^2 - 2tx + x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{t^2}{2(1+t)} \Rightarrow dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^2+2t}{(t+1)^2} dt.$$

$$2 + x = 2 + \frac{t^2}{2(1+t)} = \frac{t^2+4t+4}{2(1+t)} = \frac{(t+2)^2}{2(1+t)}.$$

$$\sqrt{x^2+2x} = t - \frac{t^2}{2(1+t)} = \frac{t^2+2t}{2(1+t)}.$$

Noile limite de integrare; pentru $x = 0$, $t = 0$, iar pentru $x = 1$, $t = 1 + \sqrt{3}$.

Deci:

$$\int_0^1 \frac{dx}{(2+x)\sqrt{x^2+2x}} dx =$$

$$= \int_0^{1+\sqrt{3}} \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{t^2+2t}{(t+1)^2} dt}{\frac{(t+2)^2}{2(1+t)} \cdot \frac{t^2+2t}{2(1+t)}} = 2\int_0^{1+\sqrt{3}} \frac{dt}{(t+2)^2} =$$

$$= -\frac{2}{t+2}\Big|_0^{1+\sqrt{3}} = -\frac{2}{3+\sqrt{3}} + 1 =$$

$$= \frac{1+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} = \frac{(1+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})}{6} = \frac{2\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Integrala se mai poate calcula și astfel:

$$I = \int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{x+2}}} \cdot \frac{2}{(x+2)^2}\, dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{x+2}}} \cdot \frac{x+2-x}{(x+2)^2}\, dx = \sqrt{\frac{x}{x+2}}\Bigg|_0^1 = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

7.89. Pentru prima integrală facem schimbarea de variabilă:

$$\sqrt{1-x^2} = t(1+x)$$

și obținem:

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2};\quad 1+x = \frac{2}{1+t^2};\quad \sqrt{1-x^2} =$$

$$= \frac{2t}{1+t^2};\quad dx = \frac{-4t\, dt}{(1+t^2)^2}.$$

$$I_1 = \int_0^1 dt = t\Big|_0^1 = 1.$$

Pentru a doua integrală facem schimbarea de variabilă $x^2 = t$ și avem:

$$I_2 = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{t\, dt}{(1+t)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(1+t-1)\, dt}{(1+t)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_0^1 (1+t)^{-\frac{1}{2}} dt - \int_0^1 (1+t)^{-\frac{3}{2}} dt\right] =$$

$$= (1+t)^{\frac{1}{2}}\Big|_0^1 + (1+t)^{-\frac{1}{2}}\Big|_0^1 = (\sqrt{2}-1) +$$

$$+ \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right) = \frac{3}{\sqrt{2}} - 2.$$

7.90. Se disting două cazuri:

1°. $a > 0$. Integrala I se poate calcula pentru intervalele $E \in R$, astfel încît oricare ar fi $x \in E$ să avem $ax^2 + bx + c > 0$.

Pentru a calcula integrala I în cazul $a > 0$, facem substituția

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t - \sqrt{a}x \Rightarrow ax^2 + bx + c =$$

$$= t^2 - 2\sqrt{a}tx + ax^2 \Rightarrow x = \frac{t^2 - c}{2\sqrt{a}t + b}.$$

Rezultă:

$$dx = d\,\frac{t^2 - c}{2\sqrt{a}t + b} = \frac{2(\sqrt{a}t^2 + bt + \sqrt{a}c)}{(2\sqrt{a}t + b)^2}\,dt.$$

De asemenea:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t - \sqrt{a}x = t - \sqrt{a}\cdot\frac{t^2 - c}{2\sqrt{a}t + b} =$$

$$= \frac{\sqrt{a}t^2 + bt + \sqrt{a}c}{2\sqrt{a}t + b}.$$

Înlocuind, obținem:

$$I = \int\frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \int\frac{2\sqrt{a}t + b}{\sqrt{a}t^2 + bt + \sqrt{a}c}\cdot$$

$$\cdot\frac{2(\sqrt{a}t^2 + bt + \sqrt{a}c)}{(2\sqrt{a}t + b)^2}\,dt = \int\frac{2\,dt}{2\sqrt{a}t + b} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}}\cdot\ln|2\sqrt{a}t + b| + C.$$

Ținînd seama că $t = \sqrt{ax^2 + bx + c} + \sqrt{a}x$, obținem în final:

$$I = \frac{1}{\sqrt{a}}\cdot\ln|2ax + b + \sqrt{a(ax^2 + bx + c)}| + C.$$

2°. $a < 0$. În acest caz integrala I are sens doar dacă $b^2 - 4ac > 0$ și se poate calcula numai pe intervalele $E \subset R$, astfel încît oricare ar fi $x \in E$ să avem $ax^2 + bx + c > 0$.

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} =$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-a}} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)^2 - \left(\frac{2ax + b}{2a}\right)^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-a}} \int \frac{\frac{2a}{\sqrt{b^2 - 4ac}}}{\sqrt{1 - \left(\frac{2ax + b}{b^2 - 4ac}\right)^2}} dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{2ax + b}{\sqrt{b^2 - 4ac}} + C.$$

7.91. Vom pune $\sqrt{1 - x^2} = xz - 1$, de unde rezultă:

$$x = \frac{2z}{z^2 + 1}; \quad \sqrt{1 - x^2} = \frac{z^2 - 1}{z^2 + 1};$$

$$dx = -2 \cdot \frac{z^2 - 1}{(z^2 + 1)^2} dz.$$

Integrala devine:

$$I = \int -2 \cdot \frac{z^2 - 1}{(z^2 + 1)^2} \cdot \frac{z^2 + 1}{2z} \cdot \frac{z^2 + 1}{z^2 - 1} dz =$$

$$= -\int \frac{dz}{z} = -\ln |z| + C = -\ln \frac{|x|}{1 + \sqrt{1 - x^2}} + C.$$

7.92. Vom pune $\sqrt{x^2+1} = z - x$, de unde rezultă:

$$x = \frac{z^2-1}{2z}; \quad \sqrt{x^2+1} = \frac{z^2+1}{2z};$$

$$dx = \frac{z^2+1}{2z^2} dz.$$

Deci integrala devine:

$$I = \int \frac{z^2+1}{2z^2} \cdot \frac{2z}{z^2+1} dz = \int \frac{dz}{z} = \ln |z| +$$

$$+ C = \ln \left| \sqrt{x^2+1} + x \right| + C.$$

7.93. Pentru simplificare notăm $y = \sqrt{ax^2+bx+c}$. Se observă că $y' = \dfrac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+c}}$. Derivînd expresia $x^{m-1} \cdot y$, obținem:

$$(x^{m-1} y)' = (m-1)x^{m-2} y + x^{m-1} y' =$$

$$= (m-1)\, x^{m-2} \sqrt{ax^2+bx+c} + x^{m-1} \cdot$$

$$\cdot \frac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+c}} =$$

$$= \frac{2(m-1)\, x^{m-2}(ax^2+bx+c) + x^{m-1}(2ax+b)}{2\sqrt{ax^2+bx+c}} =$$

$$= ma \cdot \frac{x^m}{y} + \left(m - \frac{1}{2}\right) b \frac{x^{m-1}}{y} + (m-1)\, c \frac{x^{m-2}}{y}.$$

Deci, în final:

$$(x^{m-1} \cdot y)' = ma \frac{x^m}{y} + \left(m - \frac{1}{2}\right) b \frac{x^{m-1}}{y} +$$

$$+ (m-1)\, c \frac{x^{m-2}}{y}.$$

Integrînd expresia de mai sus, obținem:

$$x^{m-1} \cdot y = ma\, I_m + \left(m - \frac{1}{2}\right) b \cdot I_{m-1} +$$
$$+ (m-1)\, c \cdot I_{m-2},$$

de unde:

$$I_m = \frac{x^{m-1}\sqrt{ax^2+bx+c}}{ma} - \frac{(m-1)\,c}{ma} I_{m-2} -$$
$$- \frac{(2m-1)\,b}{2ma} I_{m-1}.$$

7.94. Stabilim mai întîi o relație de recurență pentru calculul acestei integrale:

$$I_n = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{n-1}} - \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2\,dx}{(a^2+x^2)^n}.$$

Vom calcula integrala

$$\int \frac{x^2 dx}{(a^2+x^2)^n}$$

prin părți, punînd $x = u$ și $\frac{x dx}{(a^2+x^2)^n} = dv$, și obținem:

$$\int \frac{x^2 dx}{(a^2+x^2)^n} = -\frac{x}{(2n-2)\,(a^2+x^2)^{n-1}} +$$
$$+ \frac{1}{2n-2}\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{n-1}}.$$

Făcînd înlocuirile, obținem:

$$I_n = \frac{1}{2n-2} \cdot \frac{x}{a^2(a^2+x^2)^{n-1}} +$$
$$+ \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{n-1}}.$$

Pentru $n = 2$, $n = 3$ avem pe rînd:

$$I_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{a^2(a^2 + x^2)} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a^3} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$$

$$I_3 = \frac{1}{4} \cdot \frac{x}{a^2(a^2 + x^2)^2} + \frac{3}{4 \cdot 2} \cdot \frac{x}{a^4(a^2 + x^2)} +$$

$$+ \frac{3}{4 \cdot 2} \cdot \frac{1}{a^5} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$$

7.95. Termenul general a_n se mai scrie

$$a_n = \frac{1}{n^4} \sum_{k=1}^{n} k^2 \sqrt[3]{k^3 + n^3} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^2 \sqrt[3]{\left(\frac{k}{n}\right)^3 + 1}.$$

Deci:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^2 \sqrt[3]{\left(\frac{k}{n}\right)^3 + 1} = \int_0^1 x^2 \sqrt[3]{x^3 + 1}\, dx.$$

Facem substituția $x^3 + 1 = t$. Noile limite de integrare sînt 1 și 2.

Rezultă:

$$\int_0^1 x^2 \sqrt[3]{x^3 + 1}\, dx = \frac{1}{3} \int_1^2 t^{\frac{1}{3}} dt = \frac{1}{4} t^{\frac{4}{3}} \Big|_1^2 = \frac{1}{4} (2\sqrt[3]{2} - 1).$$

Deci:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4} \sum_{k=1}^{n} k^2 \sqrt[3]{k^3 + n^3} = \frac{1}{4} (2\sqrt[3]{2} - 1).$$

7.96. Avem:

$$I = \int x^{-\frac{1}{2}} \left(1 + x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} dx. \text{ Notăm } u = \sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x}};$$

$$x = (u^3 - 1)^4; \; dx = 12u^2(u^3 - 1)^3 du$$

$$I = 12 \int (u^6 - u^3) du = \frac{3}{7} u^4 (4u^3 - 7) + C.$$

7.97. Aici $m = \frac{1}{5}$; $n = \frac{3}{5}$; $\frac{m+1}{n} = 2 \in Z$.

Punem:

$$3 - 2x^{\frac{3}{5}} = z^2, \text{ de unde } x^{-\frac{2}{5}} dx = -\frac{3}{5} z dz.$$

Integrala devine:

$$I = \int (z^2)^{-\frac{1}{2}} \frac{3 - z^2}{2} \left(-\frac{5}{3} z dz\right) = -\frac{5}{6} \int (3 - z^2) dz =$$

$$= -\frac{5}{2} z + \frac{5}{18} z^3 + C,$$

unde $z = \left(3 - 2x^{\frac{3}{5}}\right)^{\frac{1}{2}}$.

7.98. Aici: $m = -6$, $n = 3$, $p = \frac{2}{3}$, $\frac{m+1}{n} = -\frac{5}{3}$, $\frac{m+1}{n} + p = -1$.

Punem: $x^{-3} + 2 = z^3$
și avem:

$$I = \int z^2(-z^2 dz) = -\frac{1}{5} z^5 + C.$$

sau

$$I = -\frac{1}{5} x^{-5}(1 + 2x^3)^{\frac{5}{3}} + C.$$

7.99. Să calculăm pe $f_n(x)$. Calculînd succesiv, avem:

$$f_2(x) = \int_1^x f_1(t) dt = \int_1^x dt = x - 1 = \frac{x-1}{1!}.$$

$$f_3(x) = \int_1^x f_2(t) dt = \int_1^x (t-1) dt = \left.\frac{(t-1)^2}{2!}\right|_0^x = \frac{(x-1)^2}{2!}.$$

$$f_4(x) = \int_1^x f_3(t) dt = \int_1^x \frac{(t-1)^2}{2!} dt = \left.\frac{(t-1)^3}{3!}\right|_1^x = \frac{(x-1)^3}{3!}.$$

Presupunem prin inducție $f_{n+1}(x) = \frac{(x-1)^n}{n!}$. Avem:

$$f_{n+2}(x) = \int_1^x f_{n+1}(t)\,dt = \int_1^x \frac{(t-1)^n}{n!}\,dt =$$

$$= \frac{(t-1)^{n+1}}{(n+1)!}\Big|_1^x = \frac{(x-1)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Deci am demonstrat prin inducție că:

$$f_{n+2}(x) = \frac{(x-1)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

De aici rezultă: $f_{n+1}(2) = \frac{1}{n!}$. Deci $a_{n+1} = \frac{1}{n!}$ și, evident,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

7.100. Să presupunem că funcția f este periodică de perioadă T, deci pentru orice $x \in R$ avem:

$$f(x+T) = f(x).$$

Să considerăm funcția $F: R \to R$ dată de relația:

$$F(x) = \int_0^{x+T} f(t)\,dt - \int_0^x f(t)\,dt.$$

Deoarece f este continuă, rezultă că F este derivabilă și avem:

$$F'(x) = f(x+T) - f(x) = 0,$$

deci $F(x) =$ constant.

Reciproc să presupunem că avem:

$$\int_x^{x+T} f(t)\mathrm{d}t = \text{constant}.$$

Derivînd, obținem:

$$f(x+T) - f(x) = 0,$$

deci funcția f este periodică de perioadă T.

7.101. Funcția f fiind continuă admite primitive. Fie F o primitivă a lui f. F este derivabilă pe R și $F'(x) = f(x)$. Deci $\forall x \in R$, avem:

$$\int_{-x}^{x} f(t)\mathrm{d}t = C \Leftrightarrow F(x) - F(-x) = C \Rightarrow f(x) + f(-x) =$$

$$= 0 \Leftrightarrow f(x) = -f(-x).$$

Fie funcția f impară. Adică $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in R$. Atunci:

$$\int_{-x}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t - \int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t = 0 = \text{constant}.$$

Ultima egalitate rezultă din:

$$\int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^x f(-t)\,\mathrm{d}(-t) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t.$$

7.102. Deoarece $x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2 - x^2 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$, putem scrie

$$I = \int \ln (x^2 + x + 1)\mathrm{d}x + \int \ln (x^2 - x +$$

$$+ 1)\,\mathrm{d}x = I_1 + I_2.$$

Prima integrală o calculăm prin părți. Avem succesiv:

$$I_1 = \int \ln(x^2 + x + 1)\mathrm{d}x = x \ln(x^2 + x + 1) -$$

$$- \int \frac{(2x^2 + x)\mathrm{d}x}{x^2 + x + 1} = x \ln(x^2 + x + 1) -$$

$$- \int \left(2 - \frac{x + 2}{x^2 + x + 1}\right) \mathrm{d}x = x \ln(x^2 + x + 1) - 2x +$$

$$+ \int \frac{(x + 2)\mathrm{d}x}{x^2 + x + 1} = x \ln(x^2 + x + 1) - 2x +$$

$$+ \int \frac{\left[\left(x + \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{2}\right]\mathrm{d}x}{x^2 + x + 1} = x \ln(x^2 + x + 1) - 2x +$$

$$+ \frac{1}{2} \int \frac{2\left(x + \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} + \frac{3}{\sqrt{3}} \int \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{d}x}{\left(\frac{2x + 1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} =$$

$$= x \ln(x^2 + x + 1) - 2x + \frac{1}{2} \ln(x^2 + x + 1) +$$

$$+ \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2x + 1}{\sqrt{3}} + C.$$

De aici rezultă:

$$\int \ln[(-x)^2 + (-x) + 1]\mathrm{d}(-x) = -x \ln(x^2 - x + 1) +$$

$$+ 2x + \frac{1}{2} \ln(x^2 - x + 1) + \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{1 - 2x}{\sqrt{3}};$$

sau

$$I_2 = \int \ln(x^2 - x + 1)dx = x \ln(x^2 - x + 1) - 2x -$$

$$- \frac{1}{2}\ln(x^2 - x + 1) - \sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{1 - 2x}{\sqrt{3}},$$

de unde se obține imediat integrala I.

7.103. 1°. Dacă $\operatorname{tg} a = 0$, atunci:

$$\int \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg}^2 a}dx = \int \operatorname{ctg}^2 x dx = -x - \operatorname{ctg} x + C_0.$$

2°. Presupunînd acum că $\operatorname{tg} a \neq 0$, putem scrie:

$$\int \frac{dx}{\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg}^2 a} = \frac{1}{2 \operatorname{tg} a} \cdot \left[\int \frac{dx}{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} a} - \int \frac{dx}{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} a}\right].$$

Însă

$$\frac{1}{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} a} = \frac{\cos x \cdot \cos a}{\sin(x-a)} = \frac{\cos a \cdot \cos[a + (x - a)]}{\sin(x - a)} =$$

$$= \cos a \cdot \frac{\cos a \cdot \cos(x - a) - \sin a \cdot \sin(x - a)}{\sin(x - a)} =$$

$$= \cos^2 a \cdot \operatorname{ctg}(x - a) - \sin a \cdot \cos a,$$

deci:

$$\frac{dx}{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} a} = \cos^2 a \cdot \int \operatorname{ctg}(x - a)d(x - a) - \sin a \cdot \cos a \cdot$$

$$\cdot \int dx = \cos^2 a \cdot \ln\left|\sin(x - a)\right| - x \cdot \sin a \cdot \cos a + C_1.$$

Luînd $C_1 = -\cos^2 a \cdot \ln|\cos a| + C_2$ și ținînd seama că $\frac{1}{1+\text{tg}^2 a} = \cos^2 a$, vom obține:

$$\int \frac{dx}{\text{tg}x - \text{tg}a} = \frac{1}{1+\text{tg}^2 a} \cdot$$

$$\cdot [\ln|\text{tg}x - \text{tg}a| + \ln|\cos a| - x \cdot \text{tg}a] + C_1.$$

Deoarece avem și egalitatea

$$\int \frac{dx}{\text{tg}x + \text{tg}a} = \frac{1}{1+\text{tg}^2 a} \cdot$$

$$\cdot [\ln|\text{tg}x + \text{tg}a| + \ln|\cos a| + x \cdot \text{tg}a] + C_2,$$

rezultă:

$$\int \frac{dx}{\text{tg}^2 x - \text{tg}^2 a} = \frac{1}{2\text{tg}a} \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{1+\text{tg}^2 a}\left(\ln\left|\frac{\text{tg}x - \text{tg}a}{\text{tg}x + \text{tg}a}\right| - 2x\text{tg}a\right) + C =$$

$$= \frac{1}{1+\text{tg}^2 a}\left(\frac{1}{2\text{tg}a}\ln\left|\frac{\text{tg}x - \text{tg}a}{\text{tg}x + \text{tg}a}\right| - x\right) + C.$$

7.104. 1°. Știm că dacă f și g sînt două funcții integrabile pe $[a, b]$ și $f(x) \leqslant g(x)$, $(\forall) x \in [a, b]$, atunci:

$$\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx.$$

Cum $f(x) \leqslant \max\limits_{a \leqslant x \leqslant b} \{f(x)\}$ și $g(x) > 0$, $(\forall) x \in [a, b]$, rezultă:

$$f(x)g(x) \leqslant \max_{a \leqslant x \leqslant b} \{f(x)\} \cdot g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)g(x)dx \leqslant$$

$$\leqslant \max_{a \leqslant x \leqslant b} \{f(x)\} \int_a^b g(x)dx.$$

Dacă se ține seama că $|f(x)\cdot g(x)| = |f(x)|\cdot |g(x)| = |f(x)| \cdot g(x)$ și procedînd în mod analog, se obține cea de-a doua relație.

2°. Considerăm $a = 0$, $b = 1$; $f(x) = x$, $g(x) = 2x - 1$. Avem:

$$\left|\int_0^1 (2x^2 - x)\mathrm{d}x\right| = \left|\left(\frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1\right| = \frac{1}{6};$$

$$\left|\int_0^1 (2x - 1)\mathrm{d}x\right| = 0; \max_{0\leqslant x\leqslant 1} \{x\} = 1.$$

Înlocuind în relație, se observă că este verificată.

3°. Integrînd prin părți, obținem:

$$\int_0^a h(x)\mathrm{d}x = xh(x)\Big|_0^a - \int_0^a xh'(x)\mathrm{d}x = ah(a) -$$

$$-\int_0^a xh'(x)\mathrm{d}x = a[h(a) - h(0)] - \int_0^a xh'(x)\mathrm{d}x =$$

$$= a\int_0^a h'(x)\mathrm{d}x - \int_0^a xh'(x)\mathrm{d}x = \int_0^a (a - x)h'(x)\mathrm{d}x$$

Ținînd seama de această egalitate și de relațiile de la punctul 1 obținem:

$$\left|\int_0^a h(x)\mathrm{d}x\right| = \left|\int_0^a (a - x)h'(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_0^a \left|(a - x)h'(x)\right| \mathrm{d}x \leqslant$$

$$\leqslant \max_{0\leqslant x\leqslant a} \{|h'(x)|\}\int_0^a (a - x)\mathrm{d}x =$$

$$= M\left(ax\Big|_0^a - \frac{x^2}{2}\Big|_0^a\right) = \frac{1}{2}a^2M.$$

7.105. a). Funcția f este pozitivă pe $[+1, +\infty)$;

$$e^{-t}t^{x-1} \geqslant 0, \ \forall t \in [0,1] \text{ și } \forall x \in [1, +\infty) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^1 e^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t \geqslant 0 \Rightarrow f(x) \geqslant 0, \ \forall x \in [1, +\infty.$$

Vom arăta că funcția f este descrescătoare pe $[1, +\infty)$. $\forall x_1, x_2 \in [1, +\infty)$; $x_1 < x_2$ și $\forall t, 0 \leqslant t \leqslant 1 \Rightarrow t^{x_1-1} \geqslant$

$$\geqslant t^{x_2-1} \Rightarrow e^{-t} \cdot t^{x_1-1} \geqslant e^{-t} t^{x_2-1} \Rightarrow \int_0^1 e^{-t} t^{x_1-1}\, dt \geqslant$$

$$\geqslant \int_0^1 e^{-t} t^{x_2-1}\, dt \Leftrightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2).$$

b). Integrînd prin părți, obținem:

$$f(x+1) = \int_0^1 e^{-t} t^x\, dt = -\int_0^1 t^x\, de^{-t} = -e^{-t} t^x \Big|_0^1 +$$

$$+ x \int_0^1 e^{-t} t^{x-1}\, dt = x f(x) - \frac{1}{e}.$$

c). Ținînd seama de relația de la punctul b, găsim:

$$f(n+1) = nf(n) - \frac{1}{e} = n\left[(n-1)f(n-1) - \frac{1}{e}\right] -$$

$$- \frac{1}{e} = n\,(n-1) f(n-1) - \frac{1}{e}\,(A_n^0 + A_n^1) = \ldots =$$

$$= n(n-1) \ldots 2 \cdot 1 \cdot f(1) - \frac{1}{e}(A_n^0 + A_n^1 + \ldots + A_n^{n-1}) =$$

$$= n!\left(1 - \frac{1}{e}\right) - \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{n-1} A_n^k = n! - \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{n} A_n^k.$$

S-a ținut seama că $f(1) = \int_0^1 e^{-t}\, dt = -e^{-t}\Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{e}$

și $n! = A_n^n$.

d). Se observă că $a_n = f(n+1)$ și, cum funcția f este descrescătoare pe $[1, +\infty)$, avem $f(n+1) \leqslant$

$\leqslant f(n)$, $\forall n \in N$, deci $a_n \leqslant a_{n-1}$, $\forall n \in N$. Rezultă că șirul este descrescător și mărginit inferior de $a_0 =$

$$= 1 - \frac{1}{e}, \text{ deci este convergent.}$$

7.106. Scriind integrala din enunț sub forma

$$\int f(x) \cdot a^{f(x)} \cdot f'(x) \ln a dx$$

și luînd $a^{f(x)} = t$, avem:

$f(x) = \log_a t = \frac{\ln t}{\ln a}$, iar $dt = a^{f(x)} \cdot f'(x) \ln a dx$, de unde:

$$\int f(x) \cdot a^{f(x)} \cdot f'(x) \ln a dx = \int \frac{\ln t}{\ln a} dt = \frac{1}{\ln a} \int \ln t dt =$$

$$= \frac{t}{\ln a} (\ln t - 1) + C.$$

Prin urmare:

$$\int a^{f(x)} \ln^{f(x) f'(x)} dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} (\ln a^{f(x)} - 1) +$$

$$+ C = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} (f(x) \cdot \ln a - 1) + C = f(x) \cdot a^{f(x)} - \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + C.$$

7.107. Funcția considerată în enunț este o primitivă a funcției continue $g : R \to R$, dată de legea $g(x) = e^{x^4} \cdot (x^2 - 3x + 2)$. Abscisele punctelor de extrem ale funcției f se vor găsi de aceea printre rădăcinile derivatei f', care este dată de egalitatea:

$$f'(t) = e^{t^4} \cdot (t^2 - 3t + 2).$$

Din ecuația $f'(t) = 0$ obținem rădăcinile $t_1 = 1$ și $t_2 = 2$.

Pentru a stabili natura extremului, calculăm derivata a doua a lui f:

$$f''(t) = e^{t^4}(4t^5 - 12t^4 + 8t^3 + 2t - 3).$$

Cum $f''(1) = -e < 0$ și $f''(2) = e^{16} > 0$, rezultă că abscisa punctului de maxim este $x = 1$, iar cea a punctului de minim este $x = 2$.

7.108. Facem schimbarea de variabilă $x = \frac{\pi}{n} - t$; $dx = -dt$.

Pentru $x = 0$, $t = \frac{\pi}{n}$; pentru $x = \frac{\pi}{n}$, $t = 0$.

$\sin\left[n\left(\frac{\pi}{n} - t\right)\right] = \sin(\pi - nt) = \sin nt$. Înlocuim

$$\int_0^{\frac{\pi}{n}} xf(\sin nx)dx = -\int_{\frac{\pi}{n}}^{0}\left(\frac{\pi}{n} - t\right)f(\sin nt)dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{n}}\left(\frac{\pi}{n} - t\right)f(\sin nt)dt = \int_0^{\frac{\pi}{n}} \frac{\pi}{n} f(\sin nt)dt -$$

$$- \int_0^{\frac{\pi}{n}} tf(\sin nt)dt.$$ Se obține:

$$2\int_0^{\frac{\pi}{n}} tf(\sin nt)dt = \frac{\pi}{n}\int_0^{\frac{\pi}{n}} f(\sin nt)dt,$$

ceea ce demonstrează enunțul.

7.109. Deoarece

$$\cos\frac{3x}{2}\left(\sin\frac{3x}{2} - 8\sin^3\frac{3x}{4}\cos^2\frac{3x}{2}\cos^3\frac{3x}{4}\right) =$$

$$= \sin\frac{3x}{2}\cos\frac{3x}{2} - \cos^3\frac{3x}{2}\sin^3\frac{3x}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\sin 3x - \frac{1}{8}\sin^3 3x, \text{ și}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{n}} xf(\sin nx)dx = \frac{\pi}{2n}\int_0^{\frac{\pi}{n}} f(\sin nx)dx, \quad (n \in N).$$



(vezi problema 7.108), avem:

$$I = \frac{\pi}{6}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{2}\sin 3x - \frac{1}{8}\sin^3 3x\right)dx =$$

$$= \frac{\pi}{12}\cdot\left[-\frac{1}{3}\cos 3x\right]_0^{\frac{\pi}{3}} - \frac{\pi}{48}\left[\frac{\cos^3 3x}{9} - \frac{\cos 3x}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} =$$

$$= \frac{\pi}{12}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) - \frac{\pi}{48}\left(-\frac{1}{9} + \frac{1}{3} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{9} + \frac{1}{3}\right) = \frac{5\pi}{108}.$$

7.110. Deoarece f_n este continuă pe $[0, 1]$, rezultă că f_n este integrabilă, deci putem scrie:

$$I_n = \int_0^1 (1 - x^2)^n\, dx = \lim_{p\to\infty}\frac{1}{p}\left\{1 + \left[1 - \left(\frac{1}{p}\right)^2\right]^n + \right.$$

$$\left. + \left[1 - \left(\frac{2}{p}\right)^2\right]^n + \ldots + \left[1 - \left(\frac{p-1}{p}\right)^2\right]^n\right\},$$

deci:

$$0 \leqslant I_n \leqslant \lim_{p\to\infty}\frac{1}{p}\underbrace{(1 + \ldots + 1)}_{\text{de } p \text{ ori}} = 1.$$

Rezultă că șirul I_n este mărginit. Vom arăta în continuare că este monoton: $I_{n+1} - I_n =$

$$= \int_0^1 (1 - x^2)^{n+1}dx - \int_0^1 (1 - x^2)^n dx =$$

$$= \int_0^1 (1 - x^2)^n (1 - x^2 - 1)dx =$$

$$= -\int_0^1 (1 - x^2)^n x^2 dx \leqslant 0 \Rightarrow I_{n+1} \leqslant I_n,$$

deci șirul este monoton descrescător.

Şirul $\{I_n\}_{n\in N}$ fiind monoton şi mărginit, rezultă că este convergent.

7.111. Ţinînd seama de identitatea trigonometrică

$$\sin x \cos x \cos 2x \ldots \cos 2^{n-1} x = \frac{\sin 2^n x}{2^n},$$

integrala se mai poate scrie

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2^{n+1}}} \frac{\sin 2^n x}{2^n} \, dx$$

sau, făcînd substituţia $2^n x = t$, integrala de calculat devine:

$$I = \frac{1}{2^n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cdot \frac{dt}{2^n} = \frac{1}{4^n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \, dt =$$

$$\frac{1}{4^n} (-\cos t) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4^n}.$$

7.112. Calculăm: $\int x\sqrt{3-2x}\, dx$. Facem substituţia: $\sqrt{3-2x} = t$; $x = \frac{3-t^2}{2} \Rightarrow dx = -t\, dt$. Înlocuind, găsim:

$$\int x \sqrt{3-2x}\, dx = \int \left(\frac{t^4}{2} - \frac{3t^2}{2}\right) dt = \frac{t^5}{10} - \frac{t^3}{2} =$$

$$= \left[\frac{(3-2x)^2}{10} - \frac{(3-2x)}{2}\right] \sqrt{3-2x} =$$

$$= \left(\frac{2x^2}{5} - \frac{x}{5} - \frac{3}{5}\right) \cdot \sqrt{3-2x} + C.$$

indentificînd cu F, găsim: $a = \frac{2}{5}$, $b = -\frac{1}{5}$,

$$c = -\frac{3}{5}, \text{ deci:}$$

$$F(x) = \left(\frac{2x^2}{5} - \frac{x}{5} - \frac{3}{5}\right)\sqrt{3-2x} + C.$$

7.113. Vom face demonstrația prin metoda inducției complete.

$$T_n^1 = \int \left[a \sin\left(\alpha x + n\frac{\pi}{2}\right) + \right.$$

$$\left. + b\cos\left(\alpha x + n\frac{\pi}{2}\right)\right] dx =$$

$$= -\frac{a}{\alpha}\cos\left(\alpha x + n\frac{\pi}{2}\right) + \frac{b}{\alpha}\sin\left(\alpha x + n\frac{\pi}{2}\right) +$$

$$+ P_0(x) = (-1)^1 \alpha^{-1} T_{n+1}(x) + P_0(x).$$

Presupunem că $T_n^m(x) = (-1)^m \alpha^{-m} T_{n+m}(x) + P_{m-1}(x)$.

Să demonstrăm că $T_n^{m+1}(x) =$

$$= (-1)^{m+1}\alpha^{-m-1}T_{n+m+1}(x) + P_m(x).$$

$$T_n^{m+1}(x) = \int T_n^m(x)dx = \int [(-1)^m\alpha^{-m}T_{n+m}(x) +$$

$$+ P_{m-1}(x)]dx = (-1)^m\alpha^{-m}\int T_{n+m}(x)dx + \int P_{m-1}(x)dx =$$

$$= (-1)^{m+1}\alpha^{-m-1}T_{n+m+1}(x) + P_m(x).$$

7.114. Deoarece $f(x)$ este funcție continuă, $f^2(x)$ este funcție continuă și $\int_0^a f^2(x)dx$ există pentru $a \geqslant 0$.

$$f^2(x) \geqslant 0, \text{ deci } \int_0^a f^2(x)dx \geqslant 0 \text{ și } \sqrt{a\int_0^a f^2(x)\,dx} \text{ există.}$$

Dacă $f(x)$ este funcție continuă, atunci și $f(x) + \lambda$ este funcție continuă, deci integrabilă, oricare ar fi $\lambda \in R$.

În plus $[f(x) + \lambda]^2 \geqslant 0$ și deci $\int_0^a [f(x) + \lambda]^2 dx \geqslant 0$.

Dar $[f(x) + \lambda]^2 = f^2(x) + 2\lambda f(x) + \lambda^2$ și

$$\int_0^a [f(x) + \lambda]^2 dx = \int_0^a [f^2(x) + 2\lambda f(x) + \lambda^2]\, dx =$$

$$= \int_0^a f^2(x)\, dx + 2\lambda \int_0^a f(x)\, dx + \lambda^2 \int_0^a dx =$$

$$= \lambda^2 a + 2\lambda \int_0^a f(x)\, dx + \int_0^a f^2(x)\, dx.$$

Deci $\lambda^2 a + 2\lambda \int_0^a f(x)\, dx + \int_0^a f^2(x)dx \geqslant 0$ oricare ar fi $\lambda \in R$.

Aceste trinom de gradul 2 în λ are un semn constant oricare ar fi λ, deci discriminantul $\Delta \leqslant 0$ sau:

$$\left(\int_0^a f(x)\, dx\right)^2 - a\int_0^a f^2(x)dx \leqslant 0 \text{ sau:}$$

$$\int_0^a f(x)\, dx \leqslant \sqrt{a\int_0^a f^2(x)\, dx}.$$

Aplicînd aceste rezultate pentru $f(x) = \sqrt{x} \sin x$ și $a = \pi$, obținem:

$$\int_0^{\pi} \sqrt{x} \sin x \, dx \leqslant \sqrt{\pi \int_0^{\pi} x \sin^2 x \, dx}.$$

$$\int_0^{\pi} x \sin^2 x \, dx = \int_0^{\pi} \frac{x(1 - \cos 2x)}{2} dx =$$

$$\int_0^{\pi} \frac{x}{2} \cdot dx - \int_0^{\pi} \frac{x \cos 2x}{2} dx.$$

$$\int_0^{\pi} \frac{x}{2} \cdot dx = \frac{x^2}{4}\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{4} \text{ și } \frac{1}{2}\int_0^{\pi} x \cos 2x \, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{x \sin 2x}{2}\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{\sin 2x}{2} dx\right] = -\frac{1}{4}\int_0^{\pi} \sin 2x \, dx =$$

$$= \frac{\cos 2x}{8}\Big|_0^{\pi} = 0. \text{ Deci } \int_0^{\pi} \sqrt{x} \cdot \sin x \, dx \leqslant \sqrt{\pi \frac{\pi^2}{4}} =$$

$$= \frac{\pi \sqrt{\pi}}{2}.$$

Deoarece $\sqrt{x} \cdot \sin x \geqslant 0$ pentru $x \in [0, \pi]$, rezultă că

$$0 \leqslant \int_0^{\pi} \sqrt{x} \cdot \sin x \, dx \leqslant \frac{\pi \sqrt{\pi}}{2}.$$

7.115. a). Să arătăm că funcția dată are domeniul maxim de definiție R. Evident că $I \subset R$. Să arătăm că $R \in I$. Fie $x \subset R$, atunci $\operatorname{arctg} x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, deci intervalul cu extremitățile zero și $\operatorname{arctg} x$ este mărginit, fiind cuprins în $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Funcția $e^{\operatorname{tg}^2 t}$ este continuă pe $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, deci și pe intervalul $[0, \operatorname{arc\,tg} x]$ dacă $x > 0$ și pe intervalul $[\operatorname{arc\,tg} x, 0]$ dacă $x \leqslant 0$. Rezultă că $e^{\operatorname{tg}^2 t}$ este integrabilă pe $[0, \operatorname{arc\,tg} x]$ respectiv $[\operatorname{arc\,tg} x, 0]$ și deci este definită și integrala,

adică $f(x)$. Rezultă $x \in R$ (domeniul maxim de definiție). Prin urmare funcția f este definită pe R.

b). Deoarece $e^{\mathrm{tg}^2 t}$ este continuă, admite primitive. Fie $G(t)$ una dintre primitive. Avem, din formula Leibniz-Newton, $f(x) = G(\mathrm{arc\,tg}\, x) - G(0)$.

Funcția G, ca primitivă, este derivabilă, $\mathrm{arc\,tg}\, x$ este de asemenea derivabilă, rezultă că și $G(\mathrm{arc\,tg}\, x)$ este derivabilă, $G(0)$, ca o funcție constantă, este derivabilă, deci că f este derivabilă.

Din formulele de derivare a sumei și a funcțiilor compuse avem:

$$f'(x) = G'(\mathrm{arc\,tg}\, x) \cdot (\mathrm{arc\,tg}\, x)' - (G(0))' =$$

$$= G'(\mathrm{arc\,tg}\, x) \frac{1}{1 + x^2}.$$

Cum G este o primitivă a lui $e^{\mathrm{tg}^2 t}$, avem: $G'(t) = e^{\mathrm{tg}^2 t}$, deci:

$$f'(x) = e^{\mathrm{tg}^2(\mathrm{arc\,tg}\, x)} \cdot \frac{1}{1 + x^2} = \frac{e^{x^2}}{1 + x^2}.$$

c). Aplicînd formula de integrare prin părți, avem:

$$\int_0^1 \frac{xf(x)}{e^{x^2}} \mathrm{d}x = \int_0^1 xe^{+x^2} \cdot f(x) \mathrm{d}x =$$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^1 (-2xe^{-x^2}) f(x) \mathrm{d}x = -\frac{1}{2} \int_0^1 f(x) \mathrm{d}(e^{-x^2}) =$$

$$= -\frac{1}{2} f(x) e^{-x^2} \Big|_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-x^2} \cdot f'(x)\, \mathrm{d}x =$$

$$= -\frac{1}{2} f(1) e^{-1} + \frac{1}{2} f(0) + \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-x^2} \cdot \frac{e^{x2}}{1 + x^2} \mathrm{d}x =$$

$$= -\frac{f(1)}{2e} + \frac{1}{2} f(0) + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1 + x^2} = -\frac{f(1)}{2e} +$$

$$+ \frac{1}{2} \mathrm{arc\,tg}\, x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{8} - \frac{f(1)}{2e}.$$

(S-a folosit că $f(0) = 0$.)

Dar:

$$\frac{1}{2e}\int_0^1 \frac{e^{x^2}}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2e}\int_0^1 f'(x)\,dx = \frac{1}{2e}[f(1)-f(0)] = \frac{f(1)}{2e}.$$

Adunînd expresiile găsite, obținem:

$$\int_0^1 \frac{xf(x)}{e^{x^2}}\,dx + \frac{1}{2e}\int_0^1 \frac{e^{x^2}}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{8}.$$

7.116. Notăm prima integrală cu u_k. Avem:

$$u_k - u_{k-1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 kx - \sin^2 (k-1)x}{\sin x}\,dx =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{[\sin kx - \sin (k-1)x]\,[\sin kx + \sin (k-1)x]}{\sin x}\,dx =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{(2k-1)\,x}{2}\sin\frac{(2k-1)\,x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin x}\,dx =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \sin (2k-1)x}{\sin x}\,dx = -\left.\frac{\cos(2k-1)x}{2k-1}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2k-1}.$$

Am obținut relația de recurență: $u_k - u_{k-1} = \frac{1}{2k-1}$; $u_2 - u_1 = \frac{1}{3}$; $u_3 - u_2 = \frac{1}{5}$; ... ;

$$u_k - u_{k-1} = \frac{1}{2k-1}.$$

Adunînd toate aceste relații, obținem după reduceri:

$u_k - u_1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2k-1}$. Dar $u_1 =$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{\sin x}\,dx = -\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

deci

$$u_k = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2k-1}.$$

Pentru a calcula cea de-a doua integrală, procedăm analog. Notînd integrala cu v_k, rezultă:

$$v_k - v_{k-1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2k-1)x - \sin(2k-3)x}{\sin x}\,dx =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin x \cos 2(k-1)x}{\sin x}\,dx = \frac{2\sin 2(k-1)x}{2(k-1)}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0,$$

deci $v_k = v_{k-1}$, adică integrala nu depinde de k. Pentru $k=1$ obținem $v_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x}\,dx = x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$, deci $v_k = \frac{\pi}{2}$.

7.117. Notăm integrala cu $I_{m,n}$ și facem schimbarea de variabilă $x - a = t$. Avem:

$$I_{m,n} = \int_0^{b-a} t^m (b-a-t)^m dt. \text{ Notăm } b - a = \alpha.$$

$$I_{m,n} = \int_0^{\alpha} t^m [C_n^0 \alpha^n - C_n^1 \alpha^{n-1} t + C_n^2 \alpha^{n-2} t^2 - \ldots +$$

$$+ (-1)^n C_n^n t^n]\,dt = \left[\frac{1}{m+1} C_n^0 \alpha^n t^{m+1} -\right.$$

$$- \frac{1}{m+2} C_n^1 \alpha^{n-1} t^{m+2} + \ldots +$$

$$\left. + (-1)^n \frac{1}{m+n+1} C_n^n t^{m+n+1}\right]\Bigg|_0^{\alpha} = \alpha^{m+n+1}\left[\frac{1}{m+1} C_n^0 -\right.$$

$$\left. - \frac{1}{m+2} C_n^1 + \frac{1}{m+3} C_n^2 - \ldots + (-1)^n \frac{C_n^n}{m+n+1}\right].$$

În al doilea mod de calcul folosim integrarea prin părți, notînd $(x-a)^m = u$ și $(b-x)^n dx = dv$; rezultă:

$$du = m(x-a)^{m-1}\,dx \text{ și } v = -\frac{1}{n+1}(b-x)^{n+1}.$$

Deci:

$$I_{m,n} = \frac{-1}{n+1}(x-a)^m (b-x)^{n+1}\Big|_a^b +$$

$$+\frac{m}{n+1}\int_a^b (x-a)^{m-1}(b-x)^{n+1}\,dx =$$

$$= \frac{m}{n+1}\cdot I_{m-1,n+1}.$$

În formula de recurență punem succesiv:

$$m,\ m-1,\ m-2,\ldots,1, \text{ deci}$$

$$I_{m,n} = \frac{m}{n+1}\cdot I_{m-1,\,n+1}$$

$$I_{m-1,\,n+1} = \frac{m-1}{n+2}\cdot I_{m-2,\,n+2}$$

....

$$I_{1,\,m+n-1} = \frac{1}{m+n}\cdot I_{0,\,m+n}.$$

Înmulțind membru cu membru aceste egalități și simplificînd, avem:

$$I_{m,\,n} = \frac{m!n!}{(m+n)!}\cdot I_{0,\,m+n} = \frac{-m!n!}{(m+n)!}\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{m+n+1}(b-x)^{m+n+1}\Big|_a^b = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}(b-a)^{m+n+1} =$$

$$= \frac{m!n!}{(m+n+1)}\cdot\alpha^{m+n+1} = \frac{1}{m+n+1}\cdot C_{m+n}^n\alpha^{m+n+1}.$$

Comparînd cele două rezultate obținute, rezultă egalitatea din enunț.

7.118. În conformitate cu definiția integralei, avem:

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\ln\left(\sin\frac{k}{n}\pi\right)\right]\right\}=\int_0^1 x\ln(\sin\pi x)\mathrm{d}x,$$

și notînd $\pi x = y$, obținem:

$$\int_0^1 x\ln(\sin\pi x)\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\frac{y}{\pi}\ln(\sin y)\frac{\mathrm{d}y}{\pi}=$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\cdot\int_0^{\pi}y\ln(\sin y)\mathrm{d}y.$$

Însă cu ajutorul substituției $y=\pi-t$, avem:

$$\int_0^{\pi}y\ln(\sin y)\mathrm{d}y=\int_{\pi}^{0}(\pi-t)\ln[\sin(\pi-t)]\,\mathrm{d}(\pi-t)=$$

$$=\int_0^{\pi}(\pi-t)\ln(\sin t)\mathrm{d}t,$$

deci:

$$2.\int_0^{\pi}y\ln(\sin y)\,\mathrm{d}y=\pi\int_0^{\pi}\ln(\sin t)\,\mathrm{d}t=$$

$$=\pi\cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin u)\,\mathrm{d}u,$$

căci

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\ln(\sin t)\,\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\cos t)\,\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin t)\,\mathrm{d}t.$$

Rezultă:

$$\int_0^1 x\ln(\sin\pi x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi^2}\int_0^{\pi}y\ln(\sin y)\,\mathrm{d}y=$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\cdot\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin u)\,\mathrm{d}u$$

și cum se cunoaște că: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin u)\, du = -\frac{\pi}{2}\ln 2$,
obținem în final:

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\ln\left(\sin\frac{k}{n}\pi\right)\right]\right\} = \int_0^1 x\ln(\sin\pi x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}.$$

7.119. Făcînd schimbarea de variabilă $x = \frac{\pi}{2} - t$, vom obține $dx = -dt$ și:

$$I = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \ln(\sin t)\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)\, dt.$$

Însă, notînd $t = 2u$, avem:

$$I = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sin 2u)\, du = 2\ln 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} du +$$

$$+ 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sin u)\, du + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos u)\, du. \qquad (1)$$

În sfîrșit, dacă în ultima integrală substituim $t = \frac{\pi}{2} - v$, o transformăm în $2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin v)\, dv$ și astfel relația (1) devine:

$$I = \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2\cdot\left[\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sin u)\, du + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin v)\, dv\right] =$$

$$= \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin u)\, du = \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2I,$$

de unde:

$$I = -\frac{\pi}{2}\ln 2 = \frac{\pi}{2}\ln\frac{1}{2}.$$

7.120. Notînd $\frac{x}{a} = t$, rezultă $x = at \Rightarrow dx = a\,dt$, deci

$$\int_0^a \frac{\ln(a+x)}{a^2+x^2}dx = \int_0^1 \frac{\ln a(1+t)}{a^2(1+t^2)}a\,dt =$$

$$= \int_0^1 \frac{\ln a(1+t)}{a(1+t^2)}dt = \frac{\ln a}{a}\cdot\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} +$$

$$+ \frac{1}{a}\cdot\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{1+t^2}dt = \frac{\ln a}{a}\operatorname{arctg} 1 +$$

$$+ \frac{1}{a}\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{1+t^2}dt = \frac{\ln a}{a}\cdot\frac{\pi}{4} + \frac{1}{a}\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{1+t^2}dt.$$

Să calculăm acum $\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{1+t^2}dt$. Punem $t = \operatorname{tg} u \Rightarrow$ $\Rightarrow dt = \frac{du}{\cos^2 u}$ şi $t = 0 \Rightarrow u = 0$; $t = 1 \Rightarrow u = \frac{\pi}{4}$.

Integrala devine:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(1+\operatorname{tg} u)}{\frac{1}{\cos^2 u}}\cdot\frac{du}{\cos^2 u} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\frac{\sin u + \cos u}{\cos u}\right)du =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left[\frac{\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-u\right)}{\cos u}\right]du = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sqrt{2}\,du +$$

$$+ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}-u\right)\right]du - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos u)\,du =$$

$$= \ln\sqrt{2}\cdot u\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}-u\right)\right]du -$$

$$- \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos u)\,du. \quad (1)$$

Dar cu ajutorul substituției $\frac{\pi}{4} - u = v$, rezultă $dv = -du$, deci:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} - u\right)\right] du = -\int_{\frac{\pi}{4}}^{0} \ln(\cos v)\, dv =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos v)\, dv.$$

Introducînd în (1), obținem

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{4} \ln \sqrt{2} = \frac{\pi}{8} \ln 2$$

și, ca urmare:

$$\int_0^a \frac{\ln(a+x)}{a^2+x^2} dx = \frac{\ln a}{a} \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{\ln 2}{a} \cdot \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{8a} \cdot \ln(2a^2).$$

7.121. Prin schimbarea de variabilă $1 - \cos x = u^2$, obținem $2u du = \sin x dx$, deci:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2n+1} x\, dx}{\sqrt{1-\cos x}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin^2 x)^n \sin x\, dx}{\sqrt{1-\cos x}} =$$

$$= \int_0^1 \frac{[1-(1-u^2)^2]^n \cdot 2u\, du}{u} = 2 \cdot \int_0^1 (2u^2 -$$

$$- u^4)^n\, du = 2 \cdot \int_0^1 (2^n \cdot u^{2n} - C_n^1 \cdot 2^{n-1} \cdot u^{2n+2} +$$

$$+ \ldots + (-1)^n \cdot C_n^n \cdot u^{4n})\, du = 2 \cdot \left[2^n \cdot \frac{1}{2n+1} -\right.$$

$$\left. - 2^{n-1} \cdot C_n^1 \frac{1}{2n+3} + \ldots + (-1)^n \cdot C_n^n \cdot \frac{1}{4n+1}\right] =$$

$$= C_n^0 \cdot \frac{2^{n+1}}{2n+1} - C_n^1 \frac{2^n}{2n+3} +$$

$$+ \ldots + (-1)^n \cdot C_n^n \cdot \frac{2^1}{4n+1}.$$

7.122. Deoarece $\forall x \in [5, 8]$, avem:

$$\frac{1}{15} = f(5) \leqslant \frac{2x - 9}{2x + 5} \leqslant f(8) = \frac{1}{3},$$

deci aplicînd formula

$$m(b - a) \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M(b - a)$$

obținem:

$$\frac{1}{15} \cdot 3 \leqslant \int_5^3 \frac{2x - 9}{2x + 5}\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{3} \cdot 3.$$

7.123. Conform teoremei de medie pentru integrala Riemann, există un $x_0 \in (a, b)$ astfel ca:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (b - a) \cdot f(x_0) \qquad (1)$$

dar

$$f(x_0) \geqslant a \text{ de unde: } f(x_0)^2 \geqslant a^2$$

sau

$$b^2 - f^2(x_0) \leqslant b^2 - a^2$$

sau:

$$\frac{1}{\sqrt{b^2 - f^2(x_0)}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}},$$

dar cum $f(x_0) \geqslant a \geqslant 0$ și $b > a$;

$$\frac{(b - a) \cdot f(x_0)}{\sqrt{b^2 - a^2}} \leqslant \frac{(b - a) \cdot f(x_0)}{\sqrt{b^2 - f^2(x_0)}}$$

și conform lui (1) avem:

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \leqslant f(x_0) \cdot \frac{(b - a)\sqrt{b^2 - a^2}}{\sqrt{b^2 - f(x_0)^2}}.$$

7.124. Funcția $F(x)$ are derivata:

$$F'(x) = e^{-x}(-4a \sin 4x + 4b \cos 4x) -$$
$$- e^{-x}(a \cos 4x + b \sin 4x) =$$
$$= e^{-x}[(4b - a) \cos 4x - (4a + b) \sin 4x].$$

Avem deci $F'(x) = f(x)$ dacă și numai dacă $\forall x \in R$,

$$(4b - a) \cos 4x - (4a + b) \sin 4x = \cos 4x,$$

deci $4b - a = 1$ și $b + 4a = 0$ de unde rezultă că

$$a = -\frac{1}{17} \text{ și } b = \frac{4}{17}.$$

7.125. Reciproca acestei afirmații nu este adevărată. Pentru aceasta este suficient să dăm un contra-exemplu.

Fie funcția f, $f : [0,1] \to R$, dată de relația

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ pentru } x = 0 \\ 0 \text{ pentru } 0 < x \leqslant 1 \end{cases}$$

Funcția f este discontinuă în punctul $x = 0$, deoarece:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = 0 \neq 1 = f(0).$$

Vom arăta că, totuși, f este integrabilă Riemann pe segmentul $[0, 1]$.

Pentru aceasta fie un șir de diviziuni $(d_n)_{n \in N}$ al intervalului $[0, 1]$, a cărui normă ν_{d_n} tinde la zero odată cu n, și fie ξ_i^n, $(0 \leqslant i \leqslant (n-1))$ punctele intermediare alese arbitrar, corespunzătoare diviziunii d_n. Suma Riemann corespunzătoare diviziunii d_n și punctelor $\xi_i^{(n)}$ va fi:

$$\sigma_{d_n}(f) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i^{(n)})(x_{i+1}^{(n)} - x_i^{(n)}) =$$

$$= \begin{cases} 0 \text{ dacă } \xi_0^{(n)} > 0 \\ x_1^{(n)} - x_0^{(n)} \text{ dacă } \xi_0^{(n)} = 0. \end{cases}$$

Cum însă avem:

$$\nu_{d_n} = \max_{0 \leqslant i \leqslant n-1} \{x_{i+1}^{n} - x_i^{n}\} \geqslant x_1^n - x_0^n > 0$$

și cum $\nu_{d_n} \xrightarrow{n} 0$, rezultă că în oricare din cele două situații precizate mai sus:

$$\lim_{\nu_{d_n} \to 0} \sigma_{d_n}(f) = 0.$$

Or, această egalitate arată tocmai faptul că funcția f este integrabilă Riemann pe intervalul $[0,1]$, iar integrala sa este 0.

7.126. a). Conform teoremei de medie pentru integrala Riemann, există un $\xi \in (a, b)$, astfel încît:

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b - a)\, f(\xi).$$

Cum însă $f(\xi) \geqslant 0$ (conform ipotezei făcute asupra funcției f), rezultă atunci inegalitatea din enunț.

b). Să presupunem prin absurd, că aserțiunea nu este adevărată. Urmează atunci că în orice vecinătate V a punctului x_0 există un punct $x_v \in V$, astfel încît $f(x_v) = 0$.

Pentru orice $n \in N$, să considerăm vecinătățile

$$V_n = \left(x_0 - \frac{1}{n},\ x_0 + \frac{1}{n}\right).$$

În particular, pentru orice vecinătate V_n există un punct $x_{V_n} = x_n \in V_n$, astfel încît $f(x_n) = 0$. Deoarece $x_n \in V$, urmează că:

$$|x_n - x_0| < \frac{1}{n} \qquad (\forall)\ n \in N$$

și deci cînd $n \to \infty$, rezultă că $x_n \to x_0$.

Cum însă funcția f este continuă în intervalul $[a,b]$, înseamnă că $f(x_n) \to f(x_0)$ cînd $n \to \infty$. Dar $(f(x_n))_{n \in N}$ este șirul nul. Obținem atunci contradicția evidentă

că șirul nul tinde către o limită $f(x_0) \neq 0$. Contradicția provine din faptul că am presupus că nu ar exista o vecinătate a lui x_0 pe care funcția să fie nenulă.

c). Să presupunem, prin absurd, că în condițiile date există un punct $x_0 \in [a,b]$, astfel încît $f(x_0) \neq 0$. Pentru a face o alegere, fie $f(x_0) > 0$.

Să considerăm un ε, astfel încît $0 < \varepsilon < f(x_0)$. Vom arăta că există o întreagă vecinătate V, astfel încît pentru orice $x \in V$, $f(x) \geqslant \varepsilon$. Într-adevăr, presupunînd contrariul și raționînd ca la punctul b). am selecționa un șir de puncte $(x_n)_{n \in N}$ tinzînd către x_0, astfel încît $f(x_n) < \varepsilon$. Ținînd seama de continuitatea funcției, ar urma atunci că:

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0) \leqslant \varepsilon$$

ceea ce contrazice ipoteza făcută.

Evident, există un interval $[\alpha,\beta]$, astfel încît $x_0 \in [\alpha,\beta] \subset V \subset [a,b]$. Urmează că am găsit un interval $[\alpha,\beta]$, astfel încît pentru orice $x \in [\alpha,\beta]$ să aibă loc inegalitatea $f(x) \geqslant \varepsilon$.

Avînd în vedere faptul că integrala funcției este nulă și, folosind cele demonstrate la punctul a) al problemei, rezultă că:

$$0 = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^\alpha f(x)\,dx + \int_\alpha^\beta f(x)\,dx +$$

$$+ \int_\beta^b f(x)\,dx \geqslant \int_\alpha^\beta f(x)\,dx \geqslant$$

$$\geqslant \int_\alpha^\beta \varepsilon\,dx = \varepsilon(\beta - \alpha) > 0.$$

Se vede că inegalitățile de mai sus sînt absurde. Contradicția provine din ipoteza absurdă că ar exista $x_0 \in [a,\ b]$ cu $f(x_0) \neq 0$. Rezultă afirmația din enunț.

7.127. 1°. Din proprietatea (2) deducem că $\exists\, c \in (a, b]$, astfel încît $f(c) < 0$. În caz contrar, dacă $f(x) \geqslant 0$, $\forall\, x \in [a, b]$, atunci $\int_a^b f(t)\, dt \geqslant 0$ ceea ce contrazice ipoteza (2).

Funcția f fiind continuă pe intervalul $[a, b]$, ea are proprietatea lui Darboux, și cum $f(a) > 0$ și $f(c) < 0$, rezultă că

$$\exists\ \xi \in (a, b),\ \text{astfel încît}\ f(\xi) = 0.$$

2°. Funcția f este continuă pe $[a, b]$, deci admite primitive pe $[a,b]$. Fie F o primitivă a lui f. Funcția F este continuă pe $[a, b]$ și $F'(x) = f(x)$, $\forall\, x \in [a,b]$. Proprietatea (2) se mai scrie:

$$F(a) > F(b).$$

Fie ξ_1 primul punct pentru care $f(\xi_1) = 0$. Pe intervalul (a, ξ_1) funcția f este pozitivă, de unde rezultă că funcția F este crescătoare pe $[a, \xi_1]$, iar ξ_1 este un punct de maxim pentru F.

Adică

$$F(\xi_1) > F(x),\ \ \forall\, x \in [a, \xi_1) \Rightarrow F(\xi_1) > F(a).$$

Funcția F fiind continuă pe $[a,b]$, are proprietatea lui Darboux pe $[a, b]$, și cum $F(b) < F(a) < F(\xi_1)$, rezultă că:

$$\exists\, \eta \in (\xi_1, b),\ \text{astfel încît}\ F(\eta) - F(a) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_a^\eta f(t)\, dt = 0.$$

3°. Dacă presupunem că ξ este unic și dacă ținem seama de cele arătate la punctul 2 rezultă că

$$\eta \in (\xi, b) \Rightarrow \xi < \eta.$$

7.128. Punem $k \in Z$ și $I(k) = \int_{\varepsilon}^{\pi} \frac{1 - \cos kx}{1 - \cos x} dx.$

$$I(k+1) = \int_{\varepsilon}^{\pi} \frac{1 - \cos(k+1)x}{1 - \cos x} dx =$$

$$= \int_{\varepsilon}^{\pi} \frac{1 - \cos kx \cos x + \sin kx \sin x}{1 - \cos x} dx,$$

$$I(k-1) = \int_{\varepsilon}^{\pi} \frac{1 - \cos(k-1)x}{1 - \cos x} dx =$$

$$= \int_{\varepsilon}^{\pi} \frac{1 - \cos kx \cos x - \sin kx \sin x}{1 - \cos x} dx,$$

$$\frac{I(k+1) + I(k-1)}{2} = \int_{\varepsilon}^{\pi} \frac{1 - \cos x \ \cos kx}{1 - \cos x} dx =$$

$$= \int_{\varepsilon}^{\pi} \frac{1 - \cos kx + \cos kx(1 - \cos x)}{1 - \cos x} dx =$$

$$I(k) + \int_{\varepsilon}^{\pi} \cos kx \, dx.$$

Deci: $\lim_{\varepsilon \to 0} [I(k+1) - 2I(k) + I(k-1)] = 0.$

Avem: $\lim_{\varepsilon \to 0} I(1) = \pi$. Vom demonstra prin inducție completă că $\lim_{\varepsilon \to 0} I(k) = k\pi$.

Avem: $\lim_{\varepsilon \to 0} I(1) = 1 \cdot \pi = \pi.$

Presupunem că $\lim_{\varepsilon \to 0} I(k) = k\pi$. Să demonstrăm că $\lim_{\varepsilon \to 0} I(k+1) = (k+1)\pi.$

Însă:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} (I(k+1) - 2k\pi + (k-1)\pi) = 0,$$

$$\text{deci } \lim_{\varepsilon \to 0} I(k+1) = (k+1)\pi$$

În concluzie: $\lim_{\varepsilon \to 0} I(k) = k\pi.$

Capitolul VIII

APLICAȚIILE PRACTICE ALE INTEGRALEI ȘI DERIVATEI

Aria unei suprafețe plane

Să considerăm o suprafață limitată de curbele de ecuații

$$(C_1)y = f_1(x), \quad (C_2)y = f_2(x)$$

și de dreptele $x = a$ și $x = b$, unde funcțiile $f_1(x)$ și $f_2(x)$ sînt integrabile pe $[a,b]$ și

$$f_1(x) \leqslant f_2(x)$$

Aria suprafeței astfel definite este:

$$A = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]\, dx$$

Volumul unui corp de rotație

Fie în planul xOy arcul de curbă AB a cărui ecuație este $y = f(x)$, unde $f(x) \geqslant 0$, f este o funcție continuă pentru $x \in [a, b]$.

Prin rotirea în jurul axei Ox, acest arc generează o suprafață de rotație.

Corpul de rotație mărginit de această suprafață și de planele perpendiculare pe axa Ox generate prin rotirea dreptelor aA și bB are volumul dat de formula

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

Centrul de greutate al unui trapez curbiliniu omogen. Fie trapezul curbiliniu omogen $aABb$ cuprins între curba de ecuație $y = f(x)$, axa Ox și dreptele $x = a$, $x = b$. Se presupune că $f(x) \geqslant 0$ pe $[a, b]$ și că această funcție este continuă pe $[a, b]$.

Prin definiție, centrul de greutate G al trapezului curbiliniu $aABb$ are coordonatele x_G, y_G date de formulele:

$$x_G = \frac{\int_a^b x f(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}; \qquad y_G = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}.$$

Dacă figura $ABCD$ este mărginită de două arce de curbă:
AB de ecuație $y = f_1(x)$ și CD de ecuație $y = f_2(x)$ unde f_1, f_2 sînt funcții continue pe $[a, b]$, $f_2(x) > f_1(x)$, $A(a, f_1(a))$, $B(b, f_1(b))$, $C(a, f_2(a))$, $D(b, f_2(b))$, atunci centrul de greutate are coordonatele

$$x_G = \frac{\int_a^b x[f_2(x) - f_1(x)]\,\mathrm{d}x}{\int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]\,\mathrm{d}x};$$

$$y_G = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b [f_2^2(x) - f_1^2(x)]\,\mathrm{d}x}{\int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]\,\mathrm{d}x}.$$

Teoremele lui Paul Guldin

1°. Dacă l este lungimea unui arc de curbă plană C care se rotește în jurul unei axe Δ din planul său și care nu o taie și dacă η este distanța de la centrul de greutate al arcului de curbă pînă la axa Δ, atunci aria S a suprafeței de revoluție generată de C este:

$$S = 2\pi\eta l.$$

2°. Dacă S este aria unei suprafețe plane F care se rotește în jurul unei axe Δ din planul său și care nu o taie și dacă η este distanța de la centrul de greutate al lui F pînă la axa Δ, atunci volumul V al solidului generat de F este:

$$V = 2\pi\eta S.$$

Lucrul mecanic. Să considerăm un mobil care se deplasează de-a lungul axei Ox, de la a la b sub acțiunea unei forțe $F(x)$ dirijată de-a lungul axei Ox și care este funcție continuă de x.

În acest caz, lucrul mecanic L efectuat de forța $F(x)$ de la a la b este:

$$L = \int_a^b F(x)\mathrm{d}x.$$

Viteza unui mobil M care se mișcă rectiliniu dar neuniform. Să considerăm un moment oarecare $t > t_0$ și să facem raportul dintre spațiul $s(t) - s(t_0)$ și timpul $t - t_0$ în care a fost parcurs:

$$\frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}.$$

Viteza pe care o are mobilul la momentul t_0 este prin definiție

$$v(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} = s'(t)\Big|_{t = t_0}.$$

Accelerația unui mobil M care se mișcă rectiliniu și cu viteză variabilă

Să considerăm un moment oarecare $t > t_0$ și să facem raportul dintre diferența vitezelor la momentele t și t_0 și timpul $t - t_0$:

$$\frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0}.$$

Prin definiție, accelerația la momentul t_0 este

$$a(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0} = v'(t)\Big|_{t = t_0}.$$

8.1. Să se calculeze volumul sferei de rază R.

8.2. Se consideră funcția $f \to e^{\alpha x}(1 + \alpha x)$ unde $\alpha > 0$. Fie P și Q punctele de intersecție ale graficului funcției respectiv cu axa Ox și Oy. Să se arate că raportul dintre aria triunghiului POQ și aria triunghiului curbiliniu format de axe și grafic este constant (nu depinde de α).

8.3. Să se arate că:

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, \mathrm{d}x = \int_0^a \sqrt{x(2a - x)}\, \mathrm{d}x =$$

$$= \int_\alpha^{2a} \sqrt{x(2a - x)}\, \mathrm{d}x =$$

$$= \int_b^{a+b} \sqrt{(a + x - b)(a + b - x)}\, \mathrm{d}x =$$

$$= \int_b^{a+b} \sqrt{(2a + b - x)(x - b)}\, \mathrm{d}x =$$

$$= \int_{b-a}^{b} \sqrt{(a + x - b)(a + b - x)}\, \mathrm{d}x =$$

$$\int_{a+b}^{2a+b} \sqrt{(2a + b - x)(x - b)}\, \mathrm{d}x = \frac{\pi a^2}{4}.$$

(*C. Ionescu-Țiu*, G.M.B., 14051, 1973)

8.4. Să se afle aria cuprinsă între graficul funcției

$$f(x) = \frac{10}{(x+1)[(x+1)^5+2]}$$

axa Ox, axa Oy și dreapta $x = 1$.

(*C. Ionescu-Țiu*, G.M.B., 10015, 1970)

8.5. Se dă parabola $y = ax^2 + bx + c$ care taie axa $x'x$ în două puncte A și B. Să se arate că aria S limitată de arcul de parabolă și coarda AB este dată de relația $36a^4S^2 = (b^2 - 4ac)^3$.

(Journal de mathématique élémentaire, 1965)

8.6. Să se calculeze aria din cadranul I al axelor de coordonate cuprinsă între parabolele $y^2 = 2px$ și $x^2 = 2py$.

8.7. Dacă un mobil $M(x, y)$ se mișcă în plan avînd coordonatele rectangulare $x = a\cos t + b$ și $y = a\sin t + c$, să se arate că viteza sa este constantă.

Să se scrie ecuația traiectoriei.

8.8. Un mobil se deplasează cu o mișcare rectilinie după legea $S(t) = 3\sin\left(\frac{5\pi t}{6} + \frac{\pi}{4}\right)$. Știind că $S(0) = 0$:

a) Să se afle momentul cînd viteza este nulă și cînd este maximă.

b) Să se afle momentul cînd accelerația este nulă și cînd este maximă.

8.9. Un punct M se mișcă pe axa Ox după legea $x = C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t$. Se cere ecuația acestei mișcări.

8.10. Un punct $M(x, y)$ se mișcă în planul xOy astfel că $x = 1 + t$ și $y = t^2 - 2t$, unde timpul $t > 0$.

Să se studieze: traiectoria, viteza, accelerația.

8.11. Se știe că o piesă supusă la flambaj sau încovoiere rezistă proporțional cu momentul de inerție al secțiunii piesei, de aceea stîlpii metalici sînt de forma unui cilindru gol în interior cum dealtfel este și paiul de grîu (formă tubulară). Ca exemplu:

Să se afle de cîte ori este mai mare momentul de inerție geometric față de axa de simetrie (polar) al

unui tub cilindric de oțel cu raza exterioară $R = 200$ mm și raza interioară $r = 194$ mm decît momentul de inerție al unei bare cilindrice de metal de aceeași lungime și aceeași greutate cu tubul cilindric.

8.12. Să se arate că mișcarea rectilinie definită prin relația $x = 4 - \cos^2 t$ este oscilatorie. Să se determine centrul de oscilație, amplitudinea și perioada. Să se exprime viteza și accelerația.

8.13. Un cerc de rază r și centru O se rotește în jurul unei drepte (Δ) din planul cercului situată la distanța $R > r$ de punctul O dînd naștere unui tor circular.

Să se afle aria și volumului acestui tor.

8.14. Să se afle centrul de greutate al unei semicircumferințe de rază R.

8.15. Să se afle centrul de greutate al unei plăci omogene de forma unui semicerc de rază R.

8.16. Se dă figura mărginită de parabola $y^2 = x$ și dreapta $x = 1$. Se cere centrul său de greutate.

8.17. Într-un cerc (C) de rază dată r se duce o coardă AB care subîntinde arcul AMB mai mic decît un semicerc.

Să se calculeze volumul obținut prin rotația segmentului de cerc în jurul coardei AB de lungime $2l < 2r$.

Caz particular $AB = 2l = r\sqrt{3}$.

(*I. Teodorescu*, G.M.B., 10408, 1970)

8.18. a). Să se afle centrul de greutate al unei plăci plane omogene limitată de curbele $y_1 = -x^2 + 4x$ și $y_2 = x^2 - 4x + 6$.

b). Să se afle volumul corpului obținut prin rotirea suprafeței dintre cele două curbe în jurul axei $x'x$.

c). Să se afle volumul corpului obținut prin rotirea suprafeței dintre cele două curbe în jurul axei $y'y$.

(*C. Ionescu-Țiu*, G.M.B., 14052, 1974)

8.1. Avem $x^2 + y^2 = R^2$ ecuația cercului, de unde $y^2 = R^2 - x^2$. Volumul de rotație al semicercului în jurul axei $x'x$ va fi tocmai volumul sferei deci:

$$V = \pi \int_{-R}^{R} (R^2 - x^2)\,dx = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

8.2. Avem $P\left(-\frac{1}{\alpha}, 0\right)$ și $Q(0, 1)$.

Aria triunghiului POQ este $\frac{1}{2\alpha}$.

Aria triunghiului curbiliniu POQ este

$$A = \int_{-\frac{1}{\alpha}}^{0} e^{\alpha x}(1 + \alpha x) = \frac{1}{\alpha e}.$$

Raportul este:

$$R = \frac{\frac{1}{2\alpha}}{\frac{1}{\alpha e}} = \frac{e}{2}.$$

8.3. Notăm cu $I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6, I_7$ cele șapte integrale definite. Fiecare integrală reprezintă aria unui sfert de cerc de rază a.

Deci

$$I_1 = I_2 = I_3 = I_4 = I_5 = I_6 = I_7 = \frac{\pi a^2}{4}.$$

Se poate rezolva problema şi direct, calculînd adică efectiv fiecare integrală.

8.4. Funcţia f este pozitivă pentru $x \in [0, 1]$. Aria cerută A este

$$A = \int_0^1 f(x)\, dx = \int_0^1 \frac{10}{(x+1)[(x+1)^5+2]}\, dx.$$

Facem schimbarea de variabilă $(x+1)^5 = t$, deci:

$$x = 0 \Rightarrow t = 1, \quad x = 1 \Rightarrow t = 32 \text{ iar } dx = \frac{1}{5t^{4/5}}\, dt.$$

Rezultă:

$$A = 10\int_1^{32} \frac{dt}{5t(t+2)} = 2\int_1^{32} \frac{dt}{t(t+2)} =$$

$$= 2\int_1^{32} \frac{1}{2}\left(\frac{dt}{t} - \frac{dt}{t+2}\right) = \int_1^{32} \frac{dt}{t} - \int_1^{32} \frac{dt}{t+2} =$$

$$= \ln t\Big|_1^{32} - \ln(t+2)\Big|_1^{32} = \ln 32 - \ln 34 + \ln 3 =$$

$$= \ln(32 \cdot 3) - \ln 34 = \ln\frac{32 \cdot 3}{34} = \ln\frac{48}{17}.$$

8.5. Fie $x_1, x_2, (x_1 \leqslant x_2)$ rădăcinile reale ale ecuaţiei

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{deci} \quad b^2 - 4ac \geqslant 0.$$

Dacă $y = ax^2 + bx + c \geqslant 0$, avem:

$$S = \int_{x_1}^{x_2} (ax^2 + bx + c)\, dx =$$

$$= \frac{a}{3}(x_2^3 - x_1^3) + \frac{b}{2}(x_2^2 - x_1^2) + c(x_2 - x_1) =$$

$$= \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{a}\left[\frac{a}{3}\left(\frac{b^2}{a^2} - \frac{c}{a}\right) + \frac{b}{2}\left(-\frac{b}{a}\right) + c\right] =$$

$$= \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{a} \cdot \frac{(4ac - b^2)}{6a},$$

de unde

$$36a^4 S^2 = (b^2 - 4ac)^3.$$

Dacă $y = ax^2 + bx + c \leqslant 0$, rezultatul este același.

8.6. Avem:

$$S = \int_0^{2p} \sqrt{2px}\, dx - \int_0^{2p} \frac{x^2}{2p}\, dx = \frac{4}{3} p^2.$$

8.7. Avem: $\dot{x} = -a \sin t$ și $\dot{y} = a \cos t$,

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = a\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = a.$$

$$\cos t = \frac{x - b}{a};$$

$$\sin t = \frac{y - c}{a} \Rightarrow (x - b)^2 + (y - c)^2 = a^2,$$

care este ecuația unui cerc cu centrul $C(b, c)$ și rază a.

8.8. Avem: a). $v = S'(t) = 3 \cdot \frac{5\pi}{6} \cos\left(\frac{5\pi t}{6} + \frac{\pi}{4}\right)$.

Viteza $v = 0$ pentru $\frac{5\pi t}{6} + \frac{\pi}{4} = k\pi + \frac{\pi}{2}$; $k \in Z$;

v este maximă cînd $\frac{5\pi t}{6} + \frac{\pi}{4} = 2k\pi$, $k \in Z$.

b). Accelerația $a = v'(t) = S''(t) =$

$$= -3\left(\frac{5\pi}{6}\right)^2 \cdot \sin\left(\frac{5\pi t}{6} + \frac{\pi}{4}\right).$$

$a = 0$ pentru $\frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{4} = k\pi$, $k \in Z$, iar a este maximă pentru $\frac{5\pi t}{6} + \frac{\pi}{4} = (4k - 1)\frac{\pi}{2}$; $k \in Z$.

8.9. Derivăm în raport cu variabila t:

$$x' = -C_1\omega \sin \omega t + C_2\omega \cos \omega t$$
$$x'' = -C_1\omega^2 \cos \omega t - C_2\omega^2 \sin \omega t,$$

sau $x'' = -\omega^2(C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t)$,
deci $x'' = -\omega^2 x$.

8.10. Avem:

$$y = (x - 1)^2 - 2(x - 1) = (x - 1)(x - 3), \qquad x \geqslant 1.$$

Traiectoria este deci o parabolă cu vîrful $V(2, -1)$. Vectorul viteză $\overrightarrow{MV}$ are ca proiecții $\frac{dx}{dt} = 1$ și $\frac{dy}{dt} = 2t - 2$.

$$MV = \sqrt{4(t-1)^2 + 1} = \sqrt{4t^2 - 8t + 5}.$$

Mișcarea este accelerată cînd MV crește, deci pentru $t > 1$ și întîrziată cînd MV descrește, adică dacă $0 \leqslant t < 1$.

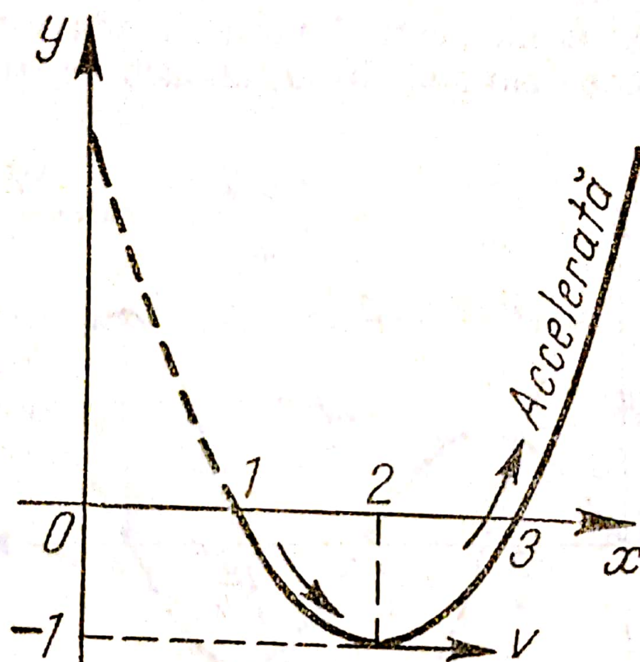


Fig. 8.10.

Vectorul accelerației $\overrightarrow{M\Gamma}$ are coordonate $\ddot{x} = 0$, $\ddot{y} = 2$.

8.11. Bara avînd aceeași înălțime și greutate cu tubul cilindric, ariile secțiunilor lor sînt egale. Notăm cu R_1 raza secțiunii din bară și avem:

$$\pi R_1^2 = \pi(200^2 - 194^2) \Rightarrow R_1^2 = 40\,000 - 37\,636 = 2\,364 \text{ mm}^2.$$

Momentul de inerție al unui cerc conform definiției este

$$I = \int_0^r r^2 \mathrm{d}s = \int_0^r r^2 \cdot 2\pi r \mathrm{d}r = 2\pi \int_0^r r^3 \mathrm{d}r = \frac{\pi}{2} r^4 = \frac{1}{2} S r^2,$$

unde $S = \pi r^2$ aria secțiunii. Fie k raportul cerut.

$$k = \frac{R^4 - r^4}{R_1^4} = \frac{200^4 - 194^4}{2\,364^2} = 32{,}5.$$

8.12. Distanța x variază între 3 și 4. Luăm ca nouă origine punctul $x_1 = 3{,}5$ și notăm $X = x - x_1 = 0{,}5 - \cos^2 t = \frac{1}{2}(1 - 2\cos^2 t) = -\frac{1}{2}\cos 2t = \frac{1}{2}\cos(\pi + 2t)$. Amplitudinea este 1 iar perioada este π. Viteza este $\dot{x} = 2\cos t \sin t = \sin 2t$, iar accelerația este $\ddot{x} = 2\cos 2t$.

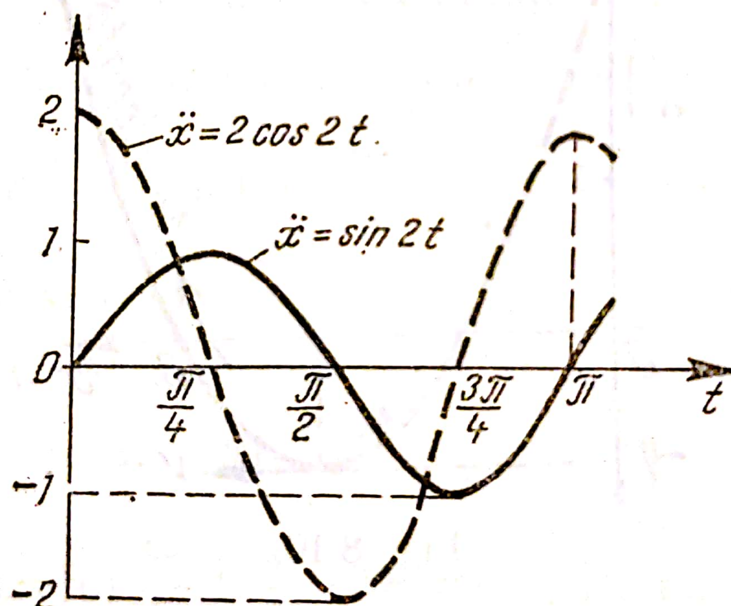


Fig. 8.12.

8.13. Folosim teoremele lui Guldin.

Aria torului $A = L \cdot 2\pi y$, unde $L = 2\pi r$ și $y = R$, deci $A = 4\pi^2 R r$.

Volumul torului $V = S \cdot 2\pi y$, unde $S = \pi r^2$ și $y = R$, deci

$$V = 2\pi^2 R r^2.$$

8.14. Aplicăm teorema I a lui Guldin.

Rotind semicircumferința în jurul diametrului obținem sfera de arie $S = 4\pi R^2$.

Centrul de greutate se află pe axa de simetrie la distanța y de mijlocul diametrului.

Avem: $L \cdot 2\pi y = S$ unde $L = \pi R \Rightarrow y = \dfrac{2R}{\pi} \approx$ $\approx 0{,}637\ R$.

8.15. Folosim teorema a II-a a lui Guldin.

Rotind semicercul în jurul diametrului, obținem sfera cu volumul $V = \dfrac{4\pi R^3}{3}$.

Aria semicercului este $\dfrac{\pi R^2}{2}$. Centrul de greutate se află pe raza perpendiculară pe diametrul discului la distanța y. Avem:

$$\frac{\pi R^2}{2} \cdot 2\pi y = \frac{4\pi R^3}{3} \Rightarrow y = \frac{4R}{3\pi} \approx 0{,}38\ R.$$

8.16. Deoarece figura are axa Ox ca axă de simetrie, centrul de greutate se află pe această axă, deci $y_G = 0$. Rămîne de calculat x_G. Dacă notăm cu S_1 și S_2 ariile celor două părți ale figurii separate de axa Ox și cu x_1, x_2 abscisele centrelor lor de greutate, avem $S_1 = S_2$ și $x_1 = x_2$, deci

$$x_G = \frac{x_1 S_1 + x_2 S_2}{x_1 + x_2} = x_1.$$

Dar

$$x_1 = \frac{\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{x}\,dx}{\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}\,dx} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{5},$$

deci

$$G\left(\frac{3}{5},\ 0\right).$$

8.17. Considerăm axa Ox pe dreapta AB, iar mediatoarea CO a coardei AB ca axă Oy, unde $C(0, -a)$ este centrul cercului. Ecuația cercului este deci $x^2 + (y+a)^2 = r^2$.

$$V = \pi\int_{-l}^{l} y^2 dx = \pi\int_{-l}^{l}(r^2 + a^2 - x^2 - 2a\sqrt{r^2 - x^2})dx =$$

$$= \pi\left|(r^2 + a^2)x - \frac{x^3}{3}\right|_{-l}^{l} - 2a\pi\int_{-l}^{l}\sqrt{r^2 - x^2}\,dx.$$

$$2a\pi\int_{-l}^{l}\sqrt{r^2 - x^2}\,dx = 2\pi a r^2\int_{-t_1}^{t_1}\cos^2 t\,dt =$$

$$= 2\pi a r^2\left|\frac{t}{2} + \frac{1}{4}\sin 2t\right|_{-t_1}^{t_1}$$

unde am notat $x = r\sin t;\quad t_1 = \arcsin\frac{l}{x};$

$$\sin 2t = 2\sin t\cos t = \frac{2l}{r}\sqrt{\frac{r^2 - l^2}{r^2}} = 2\frac{al}{r^2}.$$

Deci

$$V = 2\pi\left(l\,r^2 - \frac{l^3}{3} - ar^2\arcsin\frac{l}{r}\right).$$

În cazul particular dacă $AB = r\sqrt{3}$, obținem

$$V = 2\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot r^3 - \frac{\sqrt{3}}{8}\cdot r^3 - \frac{r^3}{2}\cdot\frac{\pi}{3}\right) = \pi\left(\frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{3}\right)r^3.$$

8.18. a). Curba definită de $y_1 = -x^2 + 4x$ este o parabolă care taie axa $x'x$ în punctele $O(0, 0)$ și $P(4, 0)$. Dacă micșorăm ordonatele punctelor parabolei $y_2 = x^2 - 4x + 6$ cu 6 unități, obținem parabola $y_3 = x^2 - 4x$, adică simetrică cu $y_1 = -x^2 + 4x$ față de axa $x'x$. Parabolele y_1 și y_2 se intersectează în punctele $A(1, 3)$ și $B(3, 3)$, deci dreapta $y = 3$ este axă de simetrie a celor două parabole. Tot axă de simetrie pentru aceste două parabole este și dreapta $x = 2$.

Prin urmare, centrul de greutate coincide cu centrul de simetrie $C(2, 3)$, punctul de intersecție al dreptelor $x = 2$ și $y = 3$.

b). Se mai verifică ușor că aria unui segment de parabolă mărginit de o coardă perpendiculară pe axa de simetrie a parabolei și parabolă este 2/3 din aria dreptunghiului, care are o latură cît lungimea coardei considerate și altă latură cît distanța de la vîrful parabolei la coardă.

Prin urmare aria plăcii este $\frac{2}{3} \cdot 2 \cdot 2 = \frac{8}{3}$, distanța între vîrfurile parabolelor este egală cu 2, idem $AB = 2$.

Distanța de la centrul de greutate la axa $x'x$ este 3, iar la axa $y'y$ este 2, deoarece avem $C(2, 3)$.

Aplicăm teorema a II-a a lui Guldin.

Volumul corpului rezultat prin rotire în jurul axei xx' este

$$V_x = S \cdot 2\pi y = \frac{8}{3} \cdot 2\pi \cdot 3 = 16\pi.$$

c). Volumul corpului rezultat prin rotirea plăcii în jurul axei $y'y$ este

$$V_y = \frac{8}{3} \cdot 2\pi 2 = \frac{32}{3} \pi.$$

ECUAȚII DIFERENȚIALE

O ecuație diferențială are forma

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{1}$$

unde $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$ este o funcție dată, cu argumentele $x, y, y', \ldots, y^{(n)}$, definită într-un domeniu D și continuă în acest domeniu.

Dacă derivata de ordinul cel mai înalt care intră în ecuația (1) este $y^{(n)}$, spunem că ecuația diferențială (1) este de ordinul n.

Vom spune că funcția $y = \varphi(x)$ definită pe un interval I care admite derivate succesive $\varphi'(x), \varphi''(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)$ pe intervalul I este soluție a ecuației diferențiale (1) dacă oricare ar fi $x \in I$ avem:

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)) = 0.$$

Evident că punctul P de coordonate $(x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x))$ trebuie să aparțină domeniului D.

Dacă ecuația (1) se poate rezolva în raport cu $y^{(n)}$, atunci ea poate fi pusă sub forma numită normală:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}). \tag{2}$$

A integra o ecuație diferențială înseamnă a determina toate soluțiile ei.

Soluția generală a unei ecuații diferențiale de ordinul n este de forma: $y = \varphi(x, C_1, \ldots, C_n)$. Din această soluție generală se obțin toate soluțiile ecuației diferențiale, existînd și cazuri de excepție cînd nu se obțin toate soluțiile din soluția generală.

Uneori soluția generală a ecuației diferențiale se obține sub forma $\Phi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0$, și în acest caz se numește integrala generală a ecuației diferențiale.

Ecuații diferențiale de ordinul întîi. O ecuație diferențială de ordinul întîi este de forma:

$$y' = f(x, y) \text{ sau } F(x, y, y') = 0.$$

Soluția generală a unei ecuații de acest tip este de forma $y = \varphi(x, C)$.

Uneori soluția generală se obține rezolvînd o ecuație de forma $\Phi(x, y, C) = 0$. În acest caz, ecuația se numește integrala generală a ecuației diferențiale.

Cazuri particulare:

1°. *Ecuația diferențială* $\frac{dy}{dx} = f(x)$ *sau* $y' = f(x)$, unde funcția $f(x)$ este continuă pe intervalul (a, b).

Soluția generală a acestei ecuații diferențiale este

$$y = \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt + C.$$

2°. *Ecuația diferențială* $\frac{dy}{dx} = g(y)$, unde funcția $g(y)$ este continuă și nu se anulează pe intervalul (a, b).

Integrala generală a acestei ecuații diferențiale este

$$x = \int_{y_0}^{y} \frac{dt}{g(t)} + C.$$

3°. *Ecuația diferențială* $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$ *cu variabile separabile*, unde $f(x)$ este continuă pe (a, b) și $g(y)$ este continuă pe (a', b') și nu se anulează în acest interval.

Integrala generală a acestei ecuații este:

$$\int_{y_0}^{y} \frac{dt}{g(t)} = \int_{x_0}^{x} f(s)ds + C.$$

4°. *Ecuația diferențială omogenă* $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$.

Ecuația diferențială omogenă se consideră pentru $x \neq 0$ și într-un domeniu D din planul xOy cuprins între dreptele $y = \alpha x$, $y = \beta x$, $\alpha < \beta$. Funcția $f(t)$ se presupune continuă pe intervalul $[\alpha, \beta]$.

Pentru ca să o integrăm facem substituția $\frac{y}{x} = t$, deci $y = tx$, de unde $\frac{dy}{dx} = t + \frac{dt}{dx}$ și, înlocuind, avem:

$$x\frac{dt}{dx} = f(t) - t \text{ deci } \frac{dx}{x} = \frac{dt}{f(t) - t}.$$

După integrare se înlocuiește $t = \frac{y}{x}$.

5°. *Ecuația diferențială liniară* $y' + P(x)y = Q(x)$. Funcțiile $P(x)$ și $Q(x)$ sînt continue pe intervalul (α, β).

Dacă $Q(x) \equiv 0$, ecuația liniară se numește omogenă.

Integrarea ecuației diferențiale liniare se face în două etape: se integrează întîi ecuația omogenă și apoi ecuația neomogenă.

Ecuația liniară omogenă atașată ecuației neomogene este

$$y' + P(x)y = 0.$$

Deci

$$\frac{dy}{y} = -P(x)dx,$$

de unde prin integrare deducem

$$\ln|y| = \int_{x_0}^{x} P(s)\, ds + \ln|C|$$

sau

$$y = Ce^{-\int_{x_0}^{x} P(s)ds}$$

Pentru a integra ecuația neomogenă se poate folosi metoda variației constantelor sau metoda lui Lagrange.

Vom presupune că $C = C(x)$ și vom determina pe $C(x)$, astfel încît $y = C(x)e^{-\int_{x_0}^{x} P(s)ds}$ să verifice ecuația.

Înlocuind în ecuație și făcînd reducerea termenilor asemenea, obținem:

$$C'(x) = Q(x)e^{\int_{x_0}^{x} P(s)ds}$$

deci

$$C(x) = K + \int_{x_0}^{x} Q(t)e^{\int_{x_0}^{t} P(s)ds} dt.$$

Deci soluția generală a ecuației diferențiale liniare și neomogene este:

$$y = \left[K + \int_{x_0}^{x} Q(t)e^{\int_{x_0}^{t} P(s)ds} dt\right] e^{-\int_{x_0}^{x} P(s)ds}.$$

O altă metodă de integrare a ecuației diferențiale liniare și neomogene. Se consideră soluția y de forma $y = uv$, unde u și v sînt pentru început două funcții necunoscute. Avem $y' = uv' + vu'$ și, înlocuind în ecuația $y' + P(x)\ y - Q(x) = 0$, obținem

$$uv' + vu' + Puv - Q = 0$$

sau

$$u(v' + Pv) + vu' - Q = 0$$

Alegem pe v astfel încît $v' + Pv = 0$, deci:

$$\frac{dv}{v} = - Pdx.$$

Rezultă că:

$$du = \frac{Q}{v} dx,$$

deci

$$u = \int \frac{Q}{v} dx + C.$$

Soluția generală este deci în final:

$$y = uv = v\int \frac{Q}{v}\,dx + Cv.$$

Ecuații diferențiale liniare de ordinul n

O ecuație diferențială liniară de ordinul n este de forma:

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n\,(x)y = f(x)$$

unde $a_1(x)$, $a_2(x)$,..., $a_n(x)$, $f(x)$ sînt funcții continue pe intervalul $[a, b]$.

Ecuația omogenă atașată ecuației diferențiale liniare de ordinul n este:

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_ny = 0.$$

Teoremă. Dacă y_1 și y_2 sînt două soluții ale ecuației diferențiale liniare și omogene de ordinul n atunci și $y = C_1y_1 + C_2y_2$ este soluție a aceleiași ecuații oricare ar fi constantele C_1 și C_2.

Să considerăm p funcții $y_1, y_2, \ldots, y_p$ definite pe intervalul $[a, b]$ și care admit derivate succesive pînă la ordinul $p - 1$ pe acest interval. Determinantul

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_p \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_p' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{(p-1)} & y_2^{(p-1)} & \ldots & y_p^{(p-1)} \end{vmatrix}$$

se numește wronskianul funcțiilor $y_1, y_2, \ldots, y_p$.

Definiție. Vom spune că $y_1, y_2, \ldots, y_p$ sînt liniar independente pe intervalul $[a, b]$, dacă wronskianul lor este diferit de zero pe acest interval.

Definiție. Vom spune că n soluții $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ale ecuației diferențiale liniare și omogene:

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_ny = 0$$

formează un sistem fundamental de soluții, dacă wronskianul lor nu este identic nul pe intervalul $[a, b]$.

Soluția generală a ecuației diferențiale liniare și omogene de ordinul n. Dacă $y_1, y_2, \ldots, y_n$ formează un sistem fundamental de soluții pentru ecuația

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = 0,$$

atunci soluția generală a ecuației diferențiale este:

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n,$$

unde $C_1, C_2, \ldots, C_n$ sînt constante arbitrare.

Integrarea ecuației diferențiale liniare și neomogene de ordinul n.

Fie ecuația diferențială

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = f(x)$$

în care coeficienții $a_1(x), \ldots, a_n(x)$ și $f(x)$ sînt funcții continue pe $[a, b]$.

Pentru a integra această ecuație vom folosi metoda variației constantelor sau metoda lui Lagrange. Fie $y_1, y_2, \ldots, y_n$ un sistem fundamental de soluții pentru ecuația omogenă atașată ecuației neomogene. Soluția generală a ecuației omogene este

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + \ldots + c_ny_n.$$

Vom presupune că $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sînt funcții de x, deci vom schimba pe $c_1, c_2, \ldots, c_n$ cu $c_1(x), c_2(x), \ldots, c_n(x)$. Soluția ecuației neomogene va fi acum:

$$y = c_1(x)\, y_1 + c_2(x)\, y_2 + \ldots + c_n\, (x)y_n,$$

unde $c_1(x), c_2(x), \ldots, c_n(x)$ sînt astfel alese încît, atunci cînd calculăm derivatele $y^{(1)}, \ldots, y^{(n)}$, în calculul acestor derivate să nu intervină derivatele funcțiilor $c_1(x)$, $c_2(x), \ldots, c_n(x)$.

Aceste condiții în număr de n sînt:

$$c_1'(x)y_1 + c_2'(x)y_2 + \ldots + c_n'(x)y_n = 0$$

$$c_1'(x)y_1' + c_2'(x)y_2' + \ldots + c_n'(x)y_n' = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$c_1'(x)y_1^{(n-2)} + c_2'(x)y_2^{(n-2)} + \ldots + c_n'(x)y_n^{(n-2)} = 0$$

$$c_1(x)y_1^{(n-1)} + c_2'(x)y_2^{(n-1)} + \ldots + c_n'(x)y_n^{(n-1)} = f\,(x).$$

Deoarece determinantul sistemului liniar în necunoscutele $c_1'(x)$, $c_2'(x)$, ..., $c_n'(x)$ este diferit de zero pe $[a, b]$, rezultă că soluția sistemului este:

$$c_1'(x) = f_1(x),\ c_2'(x) = f_2(x), \ldots,\ c_n'(x) = f_n(x),$$

de unde prin integrare

$$c_1(x) = \int_{x_0}^{x} f_1(t)\ dt + K_1;\ c_2(x) = \int_{x_0}^{x} f_2(t)\ dt + K_2; \ldots$$

$$\ldots; c_n(x) = \int_{x_0}^{x} f_n(t)\ dt = K_n.$$

Soluția ecuației diferențiale și neomogene de ordinul n va fi:

$$y = \sum_{i=1}^{n} \left(\int_{x_0}^{x} f_i(t)\ dt + K_i \right) y_i.$$

Ecuații diferențiale liniare și omogene de ordinul n cu coeficienți constanți

Ecuația

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0,$$

unde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sînt constante reale, se numește ecuație diferențială liniară și omogenă de ordinul n cu coeficienți constanți.

Ecuația caracteristică atașată acestei ecuații diferențiale este:

$$r^n + a_1 r^{n-1} + \ldots + a_n = 0.$$

1°. Dacă ecuația caracteristică are n rădăcini reale și distincte $r_1, r_2, \ldots, r_n$, soluția generală a ecuației diferențiale este

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + \ldots + C_n e^{r_n x},$$

unde $C_1, C_2, \ldots, C_n$ sînt constante reale arbitrare.

2°. Dacă ecuația caracteristică are o rădăcină r_1 de ordin de multiplicitate $p \leqslant n$, atunci o soluție a ecuației diferențiale este:

$$y = (C_1 + C_2 x + \ldots + C_{p-1} x^{p-1})\ e^{r_1 x}.$$

3°. Dacă ecuația caracteristică admite o rădăcină complexă $r = \alpha + i\beta$ unde $\alpha, \beta \in R$ și $\beta \neq 0$, atunci o soluție a ecuației diferențiale este

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x).$$

4°. Dacă ecuația caracteristică admite o rădăcină complexă $r = \alpha + i\beta$ de ordin de multiplicitate $p \leqslant n$, atunci o soluție a ecuației diferențiale este:

$$y = e^{\alpha x} [(a_0 + a_1 x + \ldots + a_{p-1} x^{p-1}) \cos \beta x + \\ + (b_0 + b_1 x + \ldots + b_{p-1}) \sin \beta x].$$

Teoremă. Dacă ecuația caracteristică atașată ecuației diferențiale are rădăcinile $r_1, r_2, \ldots, r_j$ reale și multiple de ordinele $p_1, p_2, \ldots, p_j$ și rădăcinile complexe $r_{j+1} = \alpha_1 + i\beta_1$, $r_{j+2} = \alpha_2 + i\beta_2, \ldots, r_{j+l} = \alpha_l + i\beta_l$ multiple de ordinele $p_{j+1}, p_{j+2}, \ldots, p_{j+l}$, unde

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_j + p_{j+1} + p_{j+2} + \ldots + p_{j+l} = n,$$

atunci soluția generală a ecuației diferențiale este

$$y = \sum_{i=1}^{j} e^{r_i x} Q_{p_i - 1}(x) + \sum_{k=1}^{l} e^{\alpha_k x} \Big[R_{p_{j+k}-1}(x) \cos(\beta_k x) + \\ + S_{p_{j+k}-1}(x) \sin(\beta_k x) \Big]$$

unde $Q_{p_i-1}(x)$, $R_{p_{j+k}-1}(x)$, $S_{p_{j+k}-1}(x)$ sînt polinoame de grad cel mult $p_i - 1$, $p_{j+k} - 1$,

Ecuații diferențiale liniare și neomogene de ordinul n cu coeficienți constanți

Să considerăm ecuația diferențială:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f(x),$$

în care coeficienții $a_1, \ldots, a_n \in R$ și sînt constanți.

Pentru a integra ecuația dată cînd funcția $f(x)$ este oarecare se aplică metoda variației constantelor, care reduce integrarea la n cuadraturi. Cazuri particulare:

1°. Dacă $f(x) = P(x)$, unde $P(x)$ este un polinom de gradul m și $a_n \neq 0$, atunci ecuația diferențială admite ca soluție particulară tot un polinom de gradul m, și anume $y_0 = c_0 x^m + c_1^{m-1} + \ldots + c_m$, ai cărui coefi-

cienți se determină prin identificare. Soluția generală este în acest caz $y = y_1 + y_0$, unde y_1 este soluția generală a ecuației omogene și y_0 polinomul de gradul m determinat.

2°. Dacă $f(x) = P(x)$ și $a_n = a_{n-1} = \ldots = a_{n-p+1} = 0$ însă $a_{n-p} \neq 0$, ecuația

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-p} y^{(p)} = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_m$$

admite drept soluție particulară polinomul

$$y_0 = x^p (c_0 x^m + c_1 x^{m-1} + \ldots + c_m),$$

ai cărui coeficienți se determină prin identificare.

Soluția generală este în acest caz $y = y_0 + y_1$ unde y_1 este soluția generală a ecuației omogene.

3°. Dacă $f(x) = e^{\alpha x} (b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_m)$ și dacă

$$\alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + a_2 \alpha^{n-2} + \ldots + a_n \neq 0,$$

atunci ecuația diferențială

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = e^{\alpha x} (b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_m)$$

admite o soluție particulară de forma

$$y_0 = e^{\alpha x} (c_0 x^m + c_1 x^{m-1} + \ldots + c_m)$$

ai cărui coeficienți $c_0, c_1, \ldots, c_m$ se determină prin identificare.

4°. Dacă $f(x) = e^{\alpha x} (b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_m)$ și $g(\alpha) = 0;\ g'(\alpha) = 0;\ \ldots;\ g^{(p-1)}(\alpha) = 0$ și $g^{(p)}(\alpha) \neq 0$, unde $g(r) = r^n + a_1 r^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ este ecuația caracteristică atașată ecuației diferențiale, atunci ecuația diferențială:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = e^{\alpha x} (b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_m)$$

admite o soluție particulară de forma

$$y_0 = e^{\alpha x} x^p (c_0 x^m + c_1 x^{m-1} + \ldots + c_m),$$

ai cărui coeficienți $c_0, c_1, \ldots, c_m$ se determină prin identificare.

Să considerăm ecuațiile diferențiale de forma:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = e^{\alpha x} P(x) \cos \beta x$$

$$z^{(n)} + a_1 z^{(n-1)} + \dots + a_n z = e^{\alpha x} P(x) \sin \beta x,$$

unde $P(x)$ este un polinom de gradul m.

Teoremă. Dacă $\alpha + i\beta$ nu este rădăcină a ecuației caracteristice, atunci cele două ecuații diferențiale admit respectiv soluțiile particulare

$$y_0 = e^{\alpha x} [P_1(x) \cos \beta x - P_2(x) \sin \beta x]$$

$$z_0 = e^{\alpha x} [P_2(x) \cos \beta x + P_1(x) \sin \beta x],$$

unde $P_1(x)$ și $P_2(x)$ sînt polinoame de gradul m ai căror coeficienți se determină prin identificare.

Teoremă. Dacă $\alpha + i\beta$ este o rădăcină multiplă de ordinul p a ecuației caracteristice, atunci cele două ecuații diferențiale admit respectiv soluțiile particulare:

$$y_0 = e^{\alpha x} x^p [P_1(x) \cos \beta x - P_2(x) \sin \beta x]$$

$$z_0 = e^{\alpha x} x^p [P_2(x) \cos \beta x + P_1(x) \sin \beta x],$$

unde $P_1(x)$ și $P_2(x)$ sînt polinoame de gradul m ai căror coeficienți se determină prin identificare.

9.1. Să se integreze ecuația diferențială

$$y' = y^2 + y + 1.$$

9.2. Să se integreze ecuația diferențială

$$xdx + ydy = 0.$$

9.3. Să se integreze ecuația diferențială:

$$\frac{dy}{dx} = y^\alpha$$

unde $\alpha \in R$.

9.4. Să se integreze ecuația diferențială

$$\frac{dy}{dx} = e^y.$$

9.5. Să se integreze ecuația diferențială

$$\frac{dy}{dx} = y^2 + 1.$$

9.6. Să se integreze ecuația diferențială

$$\frac{dy}{dx} = \sin y.$$

9.7. Să se integreze ecuația diferențială

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\text{arc tg } y}.$$

9.8. Să se integreze ecuația diferențială

$$y' + e^{x} y = 0.$$

9.9. Să se integreze ecuația diferențială

$$xdx + ydx = 0.$$

9.10. Să se integreze ecuația diferențială

$$\frac{\sqrt{1 - y^2}}{\sqrt{1 - x^2}} + y' = 0.$$

9.11. Să se integreze ecuația diferențială

$$(1 + x^2)\ xyy' = 1 + y^2.$$

9.12. Să se integreze ecuația diferențială:

$$(x^2 + y^2)\ dx + xy\, dy = 0.$$

9.13. Să se integreze ecuația diferențială

$$(1 + y^2) + (1 + x^2)\ y' = 0.$$

9.14. Să se integreze ecuația diferențială

$$y' - \frac{2x}{1 + x^2} y = \frac{1 + x^2}{x}.$$

9.15. Să se integreze ecuația diferențială:

$$xy' - y = x^n$$

unde $n \in R$.

9.16. Să se integreze ecuația diferențială:

$$y' - y = e^{x}.$$

9.17. Să se integreze ecuația diferențială

$$xy' - y = \ln x.$$

9.18. Să se integreze ecuația diferențială

$$xy' + 2y = x.$$

9.19. Să se rezolve ecuația diferențială

$$(1 - x)\ y' + y = \frac{x - 1}{x}.$$

9.20. Să se rezolve ecuația diferențială

$$y' + y = \frac{1}{1+e^x}.$$

9.21. Să se rezolve ecuația diferențială

$$y' \sin x + y \cos x = \operatorname{tg} x.$$

9.22. Să se rezolve ecuația diferențială

$$y' \cos x + y \sin x = \cos^2 x.$$

9.23. Să se integreze ecuația diferențială

$$y^{(n)} = 0.$$

9.24. Să se integreze ecuația diferențială

$$y'' = x + \sin x.$$

9.25. Să se rezolve ecuația

$$y^{(n)} = e^x.$$

9.26. Să se rezolve ecuația diferențială

$$y'' = \ln x.$$

9.27. Să se rezolve ecuația diferențială

$$y^{IV} - 4y''' + 5y'' - 4y' + 4y = 0.$$

9.28. Să se rezolve ecuația diferențială

$$y^{IV} + 2y''' + 5y'' + 4y' + 4y = 0.$$

9.29. Să se determine soluția $y(x)$ a ecuației diferențiale $y'' + 4y = 0$ știind că $y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1$ și $y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$.

9.30. Să se integreze ecuația diferențială:

$y'' + 2 \sin \alpha\, y' + y = 0$, unde α este o constantă astfel că $0 \leqslant \alpha < 2\pi$.

9.31. Să se integreze ecuația diferențială:

$$2y'' + 3y' - 5y = 0.$$

9.32. Să se găsească soluția generală a ecuației diferențiale

$$y^{(IV)} + \omega^2 y'' = 0.$$

(*M. Constantinescu*, G.M.B., 11069, 1971)

9.33. Să se integreze ecuația:

$$y'' + y' + y = 0.$$

9.34. Să se rezolve ecuația diferențială:

$$y^{IV} + 2y'' + y = 0.$$

9.35. Să se rezolve ecuația diferențială

$$y^{IV} - 4y''' + 6y'' - 4y' + y = 0.$$

9.36. Să se rezolve ecuația diferențială

$$y''' - 2y'' + y' - 2y = 0.$$

9.37. Să se rezolve ecuația diferențială

$$y^{IV} + y = 0.$$

9.38. Să se rezolve ecuația diferențială:

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0.$$

9.39. Să se integreze ecuația diferențială:

$$y'' + y = \cos x + \sin x$$

și să se verifice apoi soluția găsită.

9.40. Să se rezolve ecuația diferențială

$$y''' - 6y'' + 5y' = e^{3x}$$

9.41. Să se rezolve ecuația diferențială

$$y'' + y = \cos ax + \sin ax$$

unde $a \in R - \{1, -1\}$.

9.42. Să se rezolve ecuația diferențială

$$y'' - 9y = e^{10x}.$$

9.43. Să se rezolve ecuația diferențială

$$y'' - 2y' + 5y = 2e^x(2x^2 - 8x + 9).$$

9.44. Să se integreze ecuația diferențială

$$y'' - y' - 6y = \frac{5}{2}e^{-2x}.$$

9.45. Să se rezolve ecuația diferențială

$$y'' + y = a$$

unde $a \in R$.

9.46. Să se rezolve ecuația diferențială

$$y'' - y = e^x.$$

9.47. Să se rezolve ecuația diferențială

$$y'' - 5y' + 6y = x^2.$$

9.48. Să se rezolve ecuația diferențială:

$$y'' + 2y' + y = x^2e^{2x}.$$

9.49. Să se rezolve ecuația diferențială:

$$y^{IV} + 2y''' = x.$$

9.50. Să se integreze ecuația diferențială

$$y'' - 4y' + 3y = 6x + 1 + 4e^x - 7e^{-x} + \cos 2x.$$

9.51. Să se arate că dacă funcția $f(x) = \sin x + \cos x$ satisface ecuația $f''(x) + af'(x) + bf(x) = 0$, atunci și funcția $g(x) = C_1 \sin(x + \alpha) + C_2 \cos(x + \alpha)$ satisface aceeași ecuație, a, b, C_1, C_2, α fiind constante.

9.52. Să se rezolve ecuația diferențială

$$x^2y'' + xy' - 9y = 0.$$

Să se găsească ecuația curbei integrale care trece prin punctele $A(1, 2)$; $B(2, 3)$.

9.53. Să se integreze ecuația diferențială

$$xy'' + 2y' = 0.$$

9.54. Să se rezolve ecuația diferențială

$$x^2y'' = 2y.$$

9.55. Se consideră ecuația diferențială

$$x^2y'' + xy' + y = 0$$

unde $x \in (0, +\infty)$.

1°. Să se arate că prin schimbarea de variabilă $x = e^t$ această ecuație se transformă într-o ecuație diferențială liniară și omogenă cu coeficienți constanți.

2°. Să se integreze apoi ecuația diferențială.

9.56. Să se integreze ecuația diferențială

$$y' - y = xy^{-2}.$$

9.57. Să se integreze ecuația diferențială

$$x(x + y)\frac{dy}{dx} + y^2 = 0.$$

9.58. Să se rezolve ecuația diferențială

$$y' = \frac{6x - y}{4x - y}.$$

9.59. Se consideră ecuația diferențială

$$y' = \frac{2x + 3y - 5}{3x + 4y - 7}.$$

1°. Să se arate că prin schimbarea de variabile $x = X + 1$ și $y = Y + 1$ ecuația diferențială se transformă într-o ecuație diferențială omogenă.

2°. Să se integreze ecuația.

9.60. Să se integreze ecuația diferențială

$$(x - 1)\, y'' - x^2y' + (x^2 - x + 1)\, y = 0.$$

(*I. Constantinescu*, G.M.B., 10972, 1971)

9.61. Să se integreze ecuația diferențială

$$\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = a,$$

știind că $y'' \neq 0$.

9.62. Să se integreze ecuația diferențială:

$$y'y''' = y''^2$$

în domeniul în care $y' \neq 0$.

9.63. Să se determine funcțiile continue pentru care:

$$\int f^m(x)\,dx = f^n(x), \quad m, n \in R.$$

9.64. Să se determine funcția pozitivă și continuă pentru care avem:

$$\int f(x)\,dx = \frac{f(x)}{x}.$$

(Admitere, Institutul Politehnic, București)

9.1. Avem:

$$\frac{dy}{y^2+y+1}=dx.$$

Integrala generală este:

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2y+1}{\sqrt{3}}\right)=x+C.$$

9.2. Soluţia generală este: $x^2+y^2=C$.

9.3. Ecuaţia se mai poate scrie:

$$\frac{dy}{y^\alpha}=dx.$$

Prin integrare obţinem:

$$\frac{y^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}+C=x \qquad (\text{pentru } \alpha\neq 1$$

sau:

$$\ln|y|+C=x \qquad (\text{pentru } \alpha=1).$$

9.4. Integrala generală a ecuaţiei este:

$$-e^{-y}+C=x.$$

9.5. Ecuaţia se mai poate scrie:

$$\frac{dy}{y^2+1}=dx.$$

De unde prin integrare rezultă:

$$\operatorname{arc\,tg} y+C=x.$$

9.6. Integrala generală a ecuației este:

$$x = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{y}{2}\right| + C.$$

9.7. Ecuația se mai poate scrie:

$$dx = \operatorname{arc\,tg} y dy$$

Rezultă că:

$$x = \int \operatorname{arc\,tg} y dy + C.$$

Sau, integrînd, rezultă integrala generală a ecuației:

$$x = y \operatorname{arc\,tg} y - \frac{1}{2}\ln(1 + y^2) + C.$$

9.8. Avem: $\frac{y'}{y} = -e^x$, de unde $\ln|y| = -e^x + K$,

deci

$$y = Ke^{-e^x}.$$

9.9. Din $\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = 0 \Rightarrow \ln x + \ln y = \ln C$

sau $xy = C$.

9.10. Avem: $\frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} = 0,$

$$\Rightarrow \arcsin x + \arcsin y = c.$$

9.11. Avem succesiv:

$$\frac{dx}{x(1 + x^2)} - \frac{ydy}{1 + y^2} = 0,$$

$$\int\frac{dx}{x(1 + x^2)} - \int\frac{ydy}{1 + y^2} = C,$$

$$\int\frac{dx}{x} - \int\frac{xdx}{1 + x^2} - \int\frac{ydy}{1 + y^2} = C.$$

$$\ln|x| - \frac{1}{2}\ln|1 + x^2| - \frac{1}{2}\ln|1 + y^2| = C.$$

9.12. Notăm $y = ux \Rightarrow dy = udx + xdu$,

$$x^2(1 + u^2)\, dx + x^2u(udx + xdu) = 0, \text{ sau}$$

$$(1 + u^2)dx + u^2dx + uxdu = 0,$$

$(1 + 2u^2)dx + uxdu = 0$. Separăm variabilele

$$\frac{dx}{x} + \frac{udu}{1 + 2u^2} = 0. \text{ Integrînd avem:}$$

$$\ln|x| + \int \frac{udu}{1 + 2u^2} = C_1 \text{ sau}$$

$$4 \ln |x| + \ln (1 + 2u^2) = \ln C, \text{ de unde}$$

$$x^4(1 + 2u^2) = C \Rightarrow x^4 + 2\frac{y^2}{x^2}x^4 = C$$

$$\Rightarrow x^2(x^2 + 2y^2) = C.$$

9.13. Separînd variabilele avem:

$$\frac{dx}{1 + x^2} + \frac{dy}{1 + y^2} = 0$$

de unde prin integrare obținem:

$$\text{arc tg } x + \text{arc tg } y = C.$$

9.14. Soluția generală a ecuației omogene este:

$$y = C(1 + x^2).$$

Presupunem că $y = C(x)(1 + x^2)$ și îl înlocuim în ecuația neomogenă. Obținem:

$$C'(x)(1 + x^2) + 2x\, C(x) - \frac{2x}{1 + x^2} C(x)(1 + x^2) =$$

$$= \frac{1 + x^2}{x}.$$

Deci:

$$C'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow C(x) = \ln|x| + K.$$

Soluția generală a ecuației diferențiale este:

$$y = (\ln |x| + K)(1 + x^2).$$

9.15. Soluția generală a ecuației omogene este $y = Cx$.

Aplicînd metoda variației constantelor, rezultă:

$$x(C'x + C) - Cx = x^n,$$

de unde $C'x^2 = x^n$, deci $C(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{n-1}}{n-1} + K \text{ dacă } n \neq 1 \\ \ln |x| + K \text{ dacă } n = 1. \end{cases}$

Soluția generală este deci:

$$y = \left(\frac{x^{n-1}}{n-1} + K\right)x \quad \text{dacă } n \neq 1$$

sau

$$y = (\ln |x| + K)\, x \quad \text{dacă } n = 1.$$

9.16. Soluția generală a ecuației omogene este $y_1 = Ce^x$.

Considerăm că $C = C(x)$ și înlocuind pe y_1 în ecuație obținem:

$$C(x)e^x + C'(x)e^x - C(x)e^x = e^x.$$

De unde rezultă că $C'(x) = 1$, adică $C(x) = x + K$. Deci soluția generală a ecuației diferențiale este:

$$y = xe^x + Ke^x.$$

9.17. Integrînd ecuația omogenă $xy' = y$, obținem $y = Cx$. Presupunem că $y = C(x)x$ și, înlocuind în ecuație, obținem $C'(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$.

Integrînd prin părți, avem:

$$C(x) = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + K.$$

Deci soluția generală este:

$$y = -\ln x - 1 + Kx.$$

9.18. Integrînd ecuația omogenă, avem:

$$\ln|y| = -2\ln|x| + \ln K, \quad \text{deci} \quad y = \frac{K}{x^2}.$$

Presupunem că $K = K(x)$ și, înlocuind în ecuație, obținem după reducerea termenilor asemenea:

$$K'(x)\cdot x^{-1} = x, \text{ de unde } K(x) = \frac{x^3}{3} + C.$$

Soluția generală a ecuației este deci:

$$y = \frac{x}{3} + \frac{C}{x^2}.$$

9.19. Ecuația omogenă atașată ecuației date este:

$$(1-x)\,\overline{y}' + \overline{y} = 0 \text{ sau } (1-x)\frac{d\overline{y}}{dx} + \overline{y} = 0 \text{ și}$$

$$\frac{d\overline{y}}{\overline{y}} = \frac{dx}{x-1} \Rightarrow \overline{y} = C(x-1);$$

Fie o soluție particulară $y_0(x) = C(x)\,(x-1)$. Scriind că ea verifică ecuația dată, obținem:

$$(1-x)\,[C'(x)\,(x-1) + C(x)] + C(x)\,(x-1) =$$
$$= \frac{x-1}{x} \text{ sau încă}$$

$$C'(x)\,(x-1)^2 = -\frac{x-1}{x} \Rightarrow C'(x) = -\frac{1}{x(x-1)} \text{ și}$$

$$C(x) = -\int\frac{dx}{x(x-1)} = -\ln\left|\frac{x-1}{x}\right| = \ln\left|\frac{x}{x-1}\right|$$

și soluția generală a ecuației diferențiale date este:

$$y = C(x-1) \times \ln\left|\frac{x}{x-1}\right|.$$

9.20. Ecuația omogenă atașată ecuației date este:

$$y' + y = 0 \quad \text{sau} \quad \frac{dy}{dx} + y = 0 \quad \text{sau}$$

$$\frac{dy}{y} + dx = 0 \quad \text{și} \quad \ln|y| = -x + C \Rightarrow y = Ce^{-x}.$$

Fie $y(x) = C(x)e^{-x}$ o soluție a ecuației date; scriind că ea verifică ecuația, avem:

$$C'(x)e^{-x} - e^{-x}C(x) + C(x)e^{-x} = \frac{1}{1 + e^{x}},$$

$$\Rightarrow C'(x) = \frac{e^{x}}{1 + e^{x}} \text{ și } C(x) = \ln\ (1 + e^{x}).$$

Deci soluția generală a ecuației diferențiale date este:

$$y = Ce^{-x} \times \ln\ (1 + e^{x}).$$

9.21. Ecuația omogenă atașată acestei ecuații este:

$$y' \sin x + y \cos x = 0 \quad \text{deci} \quad \frac{y'}{y} = -\frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\text{de unde} \quad y = \frac{C}{\sin x}.$$

Presupunem că $y = \dfrac{C(x)}{\sin x}$ și, înlocuind în ecuație, obținem:

$$\left[\frac{C'(x)}{\sin x} - \frac{C(x)\ \cos x}{\sin^2 x}\right] \sin x + \frac{C(x)}{\sin x} \cdot \cos x = \operatorname{tg} x.$$

Deci:

$$C'(x) = \operatorname{tg} x, \text{ de unde } C(x) = K - \ln|\cos x|$$

Soluția generală căutată este:

$$y = \frac{1}{\sin x}(K - \ln|\cos x|).$$

9.22. Integrăm mai întîi ecuația omogenă

$$y' \cos x + y \sin x = 0 \Rightarrow \frac{y'}{y} = -\frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow y = C \cos x.$$

Presupunem acum că $y = C(x) \cos x$ și, înlocuind în ecuație, obținem:

$[C'(x) \cos x - C(x) \sin x] \cos x + C(x) \cos x \sin x = \cos^2 x$, de unde $C'(x) = 1$ adică $C(x) = x + K$. Deci soluția este:

$$y = (x + K) \cos x.$$

9.23. Soluția generală a ecuației diferențiale este:

$$y = C_1 \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + C_2 \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \ldots + C_{n-1} \frac{x}{1!} + C_n,$$

unde $C_1, C_2, \ldots, C_n$ sînt constante arbitrare.

9.24. Soluția generală a ecuației este:

$$y = \frac{x^3}{6} - \sin x + C_1 x + C_2.$$

9.25. Avem $y = e^x + C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots + C_{n-1} x^{n-1}$, unde $C_0, C_1, \ldots, C_{n-1}$ sînt constante arbitrare.

9.26. Integrînd o dată obținem $y' = x \ln x - x + K$. Integrînd încă o dată obținem $y = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{2} + Kx + C$, deci $y = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{3x^2}{4} + Kx + C$.

9.27. Ecuația caracteristică atașată acestei ecuații diferențiale este $r^4 - 4r^3 + 5r^2 - 4r + 4 = 0$, ale cărei rădăcini sînt $r_1 = r_2 = 2$, $r_3 = i$, $r_4 = -i$.

Soluția generală a ecuației este:

$$y = (C_1 + C_2 x) e^{2x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x$$

9.28. Ecuația caracteristică atașată ecuației diferențiale este $r^4 + 2r^3 + 5r^2 + 4r + 4 = 0$, care se mai

poate scrie $(r^2 + r + 2)^2 = 0$, de unde avem $r_1 = r_2 = = \frac{-1 + i\sqrt{7}}{2}$; $r_3 = r_4 = \frac{-1 - i\sqrt{7}}{2}$.

Soluția generală a ecuației este deci:

$$y = e^{-\frac{x}{2}}\left[(Ax + B)\cos\left(\frac{\sqrt{7}\,x}{2}\right) + (Cx + D)\sin\left(\frac{\sqrt{7}\,x}{2}\right)\right].$$

9.29. Soluția generală a ecuației diferențiale este

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$$

Avem:

$$y' = -2C_1 \sin 2x + 2C_2 \cos 2x.$$

Punînd condițiile ca $y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1$ și $y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$,

obținem sistemul:

$$\begin{aligned} -\sqrt{3}\,C_1 + C_2 &= 0 \\ C_1 + \sqrt{3}\,C_2 &= 2 \end{aligned} \Longleftrightarrow C_1 = \frac{1}{2} \text{ și } C_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Soluția particulară cerută este

$$y(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right).$$

9.30. Ecuația caracteristică este $r^2 + 2r \sin\alpha + + 1 = 0$ și are rădăcinile $-\sin\alpha \pm i\cos\alpha$. Rezultă soluția generală a ecuației:

$$y = e^{-x\sin\alpha}[C_1 \cos\ (x\cos\alpha) + C_2 \sin\ (x\cos\alpha)].$$

9.31. Soluția generală a ecuației diferențiale este:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-\frac{5x}{2}}.$$

9.32. Facem substituirea $y'' = u \Rightarrow y^{IV} = u''$. Ecuația diferențială din enunț devine:

$$u'' + \omega^2 u = 0. \qquad (1)$$

Ecuația caracteristică a ecuației (1) este:

$$r^2 + \omega^2 = 0 \Rightarrow r_1 = i\,\omega;\; r_2 = -i\,\omega.$$

Rezultă că soluția generală a ecuației (1) este: $u = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x$. Revenind la notație, obținem:

$$y'' = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x.$$

Integrînd de două ori găsim că soluția generală a ecuației diferențiale din enunț este:

$$y = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x + C_3 x + C_4$$

unde C_1, C_2, C_3, C_4 sînt constante arbitrare.

9.33. Ecuația caracteristică atașată acestei ecuații diferențiale este: $r^2 + r + 1 = 0$, ale cărei rădăcini sînt $r_1 = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ și $r_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Soluția generală a ecuației diferențiale este:

$$y = e^{-\frac{x}{2}}\left[C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,x\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,x\right)\right].$$

9.34. Ecuația caracteristică atașată acestei ecuații diferențiale este $r^4 + 2r^2 + 1 = 0$, ale cărei rădăcini sînt $r_1 = r_2 = i$; $r_3 = r_4 = -i$. Soluția generală este:

$$y = (C_1 + C_2 x) \cos x + (C_3 + C_4 x) \sin x.$$

9.35. Ecuația caracteristică atașată ecuației diferențiale este $r^4 - 4r^3 + 6r^2 - 4r + 1 = 0$, ale cărei rădăcini sînt $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = 1$. Soluția generală a acestei ecuații diferențiale este:

$$y = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3)e^x.$$

9.36. Ecuația caracteristică atașată ecuației diferențiale este $r^3 - 2r^2 + r - 2 = 0$, ale cărei rădăcini sînt $r_1 = 2$; $r_2 = i$; $r_3 = -i$. Soluția generală a ecuației diferențiale este:

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 \cos x + C_3 \sin x.$$

9.37. Ecuația caracteristică atașată acestei ecuații diferențiale este $r^4 + 1 = 0$, ale cărei rădăcini sînt

$$r_{1,2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \pm i\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ și } r_{3,4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \pm i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Soluția generală a ecuației diferențiale va fi deci:

$$y = e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}\left[C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right) + \right.$$

$$\left. + e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x}\left[C_3 \cos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}x\right) + C_4 \sin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)\right]\right].$$

9.38. Soluția generală a acestei ecuații este:

$$y = C_1e^x + C_2e^{2x} + C_3e^{3x}.$$

9.39. Soluția generală a ecuației omogene atașate ecuației din enunț este:

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Presupunem că $C_1 = C_1(x)$ și $C_2 = C_2(x)$ și ținînd seama de metoda variației constantelor, sistemul liniar în $C_1'(x)$ și $C_2'(x)$ este:

$$C_1'(x) \cos x + C_2'(x) \sin x = 0$$

$$-C_1'(x) \sin x + C_2'(x) \cos x = \cos x + \sin x.$$

Rezolvînd aceste sisteme, obținem:

$$C_1'(x) = -\sin x \cos x - \sin^2 x \Rightarrow C_1'(x) = -\frac{\sin 2x}{2} -$$

$$-\frac{1}{2} + \frac{\cos 2x}{2}.$$

$$C_2'(x) = \cos^2 x + \sin x \cos x \Rightarrow C_2'(x) = \frac{\sin 2x}{2} + \frac{1}{2} +$$

$$+\frac{\cos 2x}{2}.$$

Integrînd cele două ecuații diferențiale, avem:

$$C_1 = \frac{\cos 2x}{4} + \frac{\sin 2x}{4} - \frac{x}{2} + K_1$$

$$C_2 = -\frac{\cos 2x}{4} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{x}{2} + K_2.$$

Soluția generală a ecuației din enunț este:

$$y = \left(\frac{\cos 2x}{4} + \frac{\sin 2x}{4} - \frac{x}{2} + K_1\right)\cos x +$$

$$+ \left(-\frac{\cos 2x}{4} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{x}{2} + K_2\right)\sin x.$$

Ținînd seama de formulele:

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b;$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a,$$

soluția se mai poate scrie sub forma

$$y = K_1 \cos x + K_2 \sin x + \frac{\cos x}{4} - \frac{\sin x}{4} - \frac{x}{2}\cos x +$$

$$+ \frac{x}{2}\sin x$$

sau

$$y = K_1' \cos x + K_2' \sin x - \frac{x}{2}\cos x + \frac{x}{2}\sin x.$$

Verificarea se face ușor.

9.40. Notăm $y' = u$ și ecuația devine:

$$u'' - 6u' + 5u = e^{3x}.$$

Căutăm o soluție particulară a ecuației în u de forma $u = \alpha e^{3x}$.

Avem pe rînd: $u' = 3\alpha e^{3x}$; $u'' = 9\alpha e^{3x}$.

Înlocuind în ecuație, obținem $9\alpha - 18\alpha + 5\alpha = 1$, de unde $\alpha = -\frac{1}{4}$.

Soluția generală a ecuației este:

$$u = C_1e^x + C_2e^{5x} - \frac{1}{4}e^{3x}, \text{ deci } y = C_1e^x + C_2e^{5x} - \frac{1}{12}e^{3x} + k.$$

9.41. Căutăm o soluție particulară de forma $y = A\cos ax + B\sin ax$; unde A, B sînt constante. Avem:
$y' = -a\,A\sin ax + a\,B\cos ax$;
$y'' = -a^2 A\cos ax - a^2 B\sin ax$.
Înlocuind, obținem:

$$A(1-a^2)\cos ax + B(1-a^2)\sin ax = \cos ax + \sin ax$$

deci

$$A = \frac{1}{1-a^2}; \quad B = \frac{1}{1-a^2}.$$

Soluția generală a ecuației este:

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{1}{1-a^2}(\cos ax + \sin ax).$$

9.42. Căutăm o soluție particulară de forma $y = ae^{10x}$.

Avem: $y' = 10ae^{10x}$; $y'' = 100ae^{10x}$. Înlocuind obținem:

$$91a = 1 \text{ deci } a = \frac{1}{91}.$$

Deoarece soluția generală a ecuației omogene este:

$$y = C_1e^{3x} + C_2e^{-3x},$$

rezultă că soluția generală a ecuației propuse este:

$$y = C_1e^{3x} + C_2e^{-3x} + \frac{1}{91}e^{10x}.$$

9.43. Considerăm ecuația omogenă $y'' - 2y' + 5y = 0$, care are ecuația caracteristică $r^2 - 2r + 5 = 0$ cu rădăcinile $r_1 = 1 + 2i$, $r_2 = 1 - 2i$.

Deci soluția generală a ecuației omogene este

$$y = C_1e^x\cos 2x + C_2e^x\sin 2x.$$

O soluție particulară a ecuației din enunț este de forma:

$y_0 = e^x(ax^2 + bx + c)$. Punînd condiția ca y_0 să verifice ecuația din enunț și identificînd, obținem: $a = 1$, $b = -4$, $c = 4$, deci $y_0 = (x-2)^2e^x$. Rezultă că soluția generală a ecuației diferențiale din enunț este:

$$y = C_1e^x\cos 2x + C_2e^x\sin 2x + (x-2)^2e^x.$$

9.44. Considerăm ecuația omogenă: $y'' - y' - 6y = 0$, cu ecuația caracteristică $r^2 - r - 6 = 0$ care are rădăcinile: $r' = 3$; $r_2 = -2$. Deci soluția generală a ecuației omogene este:

$$y = C_1e^{3x} + C_2e^{-2x}.$$

Revenind la ecuația din enunț, rezultă că o soluție particulară este de forma $y_0 = kxe^{-2x}$. Verificînd că $y_0 = kxe^{-2x}$ este o soluție a ecuației din enunț, obținem $k = -\frac{1}{2}$.

Deci soluția generală a ecuației din enunț este:

$$y = C_1e^{3x} + C_2e^{-2x} - \frac{x}{2}e^{-2x}.$$

9.45. Soluția ecuației omogene atașate este:

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Vom căuta soluția ecuației neomogene de forma:

$$y = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x.$$

Sistemul liniar în necunoscutele $C_1'(x)$ și $C_2'(x)$ este:

$$C_1' \cos x + C_2' \sin x = 0;$$

$$-C_1'\sin x + C_2'\cos x = a.$$

Rezolvîndu-l, obținem $C_1'(x) = -a \sin x$; $C_2'(x) = a \cos x$.

Rezultă:

$$C_1(x) = a\cos x + K_1 \text{ și } C_2(x) = a\sin x + K_2.$$

Soluția ecuației este deci:

$$y = K_1\cos x + K_2\sin x + a.$$

9.46. Ecuația omogenă atașată ecuației diferențiale din enunț este: $y'' - y = 0$. Ecuația caracteristică atașată ecuației omogene este $r^2 - 1 = 0$, care are ca rădăcini pe $r_1 = 1$ și $r_2 = -1$. Deci soluția ecuației omogene este $y = C_1e^x + C_2e^{-x}$, unde $C_1, C_2 \in R$.

Vom căuta soluția ecuației din enunț de forma

$$y = C_1(x)e^x + C_2(x)e^{-x}.$$

Sistemul liniar în necunoscutele $C_1'(x)$, $C_2'(x)$ este:

$$C_1'(x)e^x + C_2'e^{-x} = 0$$

$$C_1'(x)e^x - C_2'e^{-x} = e^x$$

cu soluția $C_1'(x) = \frac{1}{2}$; $C_2'(x) = \frac{-e^{2x}}{2}$.

Rezultă că $C_1(x) = \frac{x}{2} + K_1$ și $C_2(x) = -\frac{e^{2x}}{4} + K_2$.

Soluția ecuației este deci:

$$y = \left(\frac{x}{2} + K_1\right)e^x + \left(-\frac{e^{2x}}{4} + K_2\right)e^{-x}.$$

9.47. Fie $y_0 = Ax^2 + Bx + C$ o soluție particulară a ecuației din enunț ai cărei coeficienți îi determinăm prin identificare. Avem $y_0' = 2Ax + B$; $y_0'' = 2A$, deci:

$$2A - 5(2Ax + B) + 6(Ax^2 + Bx + C) = x^2.$$

Rezultă $A = \frac{1}{6}$; $B = \frac{5}{18}$; $C = \frac{19}{108}$. Soluția generală a ecuației omogene va fi: $y_1 = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}$ și deci soluția generală a ecuației este:

$$y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x} + \frac{1}{6}x^2 + \frac{5}{18}x + \frac{19}{108}.$$

9.48. Soluția generală a ecuației omogene este: $y_1 = (C_1 + C_2x)e^x$. Vom căuta o soluție particulară a ecuației din enunț de forma:
$y_0 = (Ax^2 + Bx + C)e^{2x}$. Vom pune condiția ca y_0 să verifice ecuația și coeficienții A, B, C se vor determina prin identificare.

Soluția generală a ecuației din enunț va fi:

$$y = y_1 + y_0,$$

unde C_1 și C_2 sînt constante arbitrare și A, B, C determinați.

9.49. Deoarece $n = 4$ și $a_2 = a_3 = a_4 = 0$ rezultă că $p = 3$. Vom căuta o soluție particulară a ecuației din enunț un polinom de forma $P(x) = x^3 (Ax + B)$. Avem succesiv $P'(x) = 4Ax^3 + 3Bx^2$; $P''(x) = 12 Ax^2 + 6Bx$; $P'''(x) = 24 Ax + 6B$; $P^{IV}(x) = 24 A$.

Înlocuind în ecuație avem: $24 A + 48 Ax + 12 B = x$.

Deci: $A = \frac{1}{48}$; $B = -\frac{1}{24}$. Deoarece ecuația caracteristică atașată ecuației omogene este $r^4 + 2r^3 = 0$ și rădăcinile ei sînt $r_1 = r_2 = r_3 = 0$; $r_4 = -2$, rezultă că soluția generală a ecuației din enunț este:

$$y = C_1e^{-2x} + C_2x^2 + C_3x + C_4 + \frac{1}{48}x^4 - \frac{1}{24}x^3.$$

9.50. Soluția generală a ecuației este:

$$y = Ce^x + C'e^{3x} + 2x + 3 - 2xe^x - \frac{7}{8}e^{-x} - \frac{\cos 2x + 8 \sin 2x}{65}.$$

9.51. Avem $f'(x) = \cos x - \sin x$ și $f''(x) = -(\sin x + \cos x)$.

Ecuația dată devine:

$$(a + b - 1) \cos x - (a - b + 1)\sin x = 0. \quad (1)$$

Pentru $a + b - 1 = 0$ și $a - b + 1 = 0$, adică $a = 0$ și $b = 1$, ecuația dată se va mai scrie:

$$f''(x) + f(x) = 0 \qquad (2)$$

$$g'(x) = C_1 \cos (x + \alpha) - C_2 \sin (x + \alpha) \text{ și}$$

$$g''(x) = -C_1 \sin (x + \alpha) - C_2 \cos (x + \alpha), \text{ de unde}$$

$$g''(x) + g(x) = 0.$$

9.52. Căutăm o soluție particulară de forma $y_0 = x^p$. Din condiția că y_0 verifică ecuația diferențială obținem:

$$p(p-1) + p - 9 = 0.$$

De unde rezultă că: $p_1 = 3$; $p_2 = -3$.

Soluția generală a ecuației diferențială este:

$$y = C_1 x^3 + C_2 x^{-3}.$$

Constantele C_1 și C_2 rezultă din sistemul:

$$C_1 + C_2 = 2; \; 8C_1 + \frac{1}{8} C_2 = 3.$$

9.53. Soluția generală a ecuației este:

$$y = \frac{C_1}{x} + C_2.$$

9.54. Deoarece $y_1 = x^2$ este soluție particulară a ecuației considerate, facem schimbarea de funcție $y = x^2 z$. Avem succesiv:

$y' = 2xz + x^2 z'$; $y'' = 2z + 4xz' + x^2 z''$. Înlocuind obținem

$4x^3 z' + x^4 z'' = 0$ și pentru $x \neq 0$ avem $4z' + xz'' = 0$.

Ecuația se mai poate scrie:

$$\frac{z''}{z'} = -\frac{4}{x} \Rightarrow \ln z' = -4 \ln x + C \Rightarrow z' = \frac{C}{x^4}.$$

Integrînd încă o dată:

$$z = \frac{-C}{3x^3} + K \Rightarrow y = -\frac{C}{3x} + Kx^2.$$

Altă soluție: Căutăm o soluție particulară de forma $y = x^{\alpha}$ unde $\alpha \in R$. Înlocuind în ecuația diferențială, obținem ecuația $\alpha(\alpha - 1) = 2$, de unde $\alpha_1 = -1$ și $\alpha_2 = 2$. Soluția generală a ecuației va fi: $y = C_1 x^{-1} + C_2 x^2$.

9.55. 1°. Avem: $x = e^t$, deci primele două derivate ale lui y în raport cu t vor fi:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = e^t \cdot \frac{dy}{dx} = x \cdot \frac{dy}{dx} \tag{1}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(x \cdot \frac{dy}{dx}\right) = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dy}{dx} + x \cdot \frac{d^2y}{dx^2} \cdot x \tag{2}$$

Eliminînd pe $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$ între relațiile (1), (2) și ecuația din enunț obținem:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = 0.$$

Ecuația generală a acestei ecuații este:

$$y = C_1 \cos t + C_2 \sin t.$$

2°. Revenind la substituția făcută obținem soluția generală a ecuației diferențiale inițiale:

$$y = C_1 \cos (\ln x) + C_2 \sin (\ln x).$$

9.56. Vom presupune că $y \neq 0$. Înmulțim în ambii membri ai ecuației cu y^2 și obținem:

$$y' y^2 - y^3 = x.$$

Notăm $y^3 = z$ și ecuația devine:

$$\frac{1}{3} z' - z = x.$$

Soluția ecuației omogene este:

$$z = Ce^{3x}.$$

Aplicînd metoda variației constantelor, rezultă:

$$C'(x) = 3xe^{-3x},$$

de unde prin integrare avem:

$$C(x) = -xe^{-3x} - \frac{1}{3}e^{-3x} + K.$$

Soluția generală a ecuației în z este:

$$z = Ke^{3x} - x - \frac{1}{3}.$$

Soluția generală a ecuației în y rezultă din:

$$y^3 = Ke^{3x} - x - \frac{1}{3}.$$

9.57. Se face substituția $\frac{y}{x} = u$.

Soluția generală a ecuației este:

$$y = C\left(\frac{2y + x}{x}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

9.58. Ecuația se mai poate scrie, pentru $x \neq 0$;

$$y' = \frac{6 - \frac{y}{x}}{4 - \frac{y}{x}}.$$

Notăm $u = \frac{y}{x}$, de unde rezultă că:

$$y' = u + u'x.$$

Ecuația diferențială devine:

$$u'x = \frac{6 - u}{4 - u} - u,$$

sau:

$$\frac{dx}{x} = \frac{4 - u}{u^2 - 5u + 6}du$$

sau:

$$\frac{dx}{x} = \frac{1}{u - 3}du - \frac{2}{u - 2}du.$$

Integrînd avem:

$$\ln|x| = \ln|u-3| - 2\ln|u-2| + \ln C.$$

Integrala generală se obține înlocuind pe u cu $\frac{y}{x}$.

9.59. 1°. Într-adevăr, ecuația devine:

$$\frac{dY}{dX} = \frac{2X+3Y}{3X+4Y},$$

care este o ecuație omogenă.

2°. Se va face substituția $\frac{Y}{X} = u$.

9.60. Observînd că $(x-1) - x^2 + (x^2 - x + 1) = 0$, se constată că o soluție particulară a ecuației este $y = e^x$. Făcînd substituția $y = ue^x$, deci $y' = e^x(u+u')$, $y'' = e^x(u'' + 2u' + u)$, ecuația devine:

$$(x-1)(u''+2u'+u) - x^2(u'+u) + (x^2 - x + 1)\cdot u = 0$$

sau

$$(x-1)(u''+u') = 0, \text{ deci } u'' + u' = 0.$$

O nouă substituție: $u' = v$ ne dă ecuația $v + v' = 0$, a cărei soluție este $v = C_1 \cdot e^{-x}$. Revenind la substituție, obținem: $u = -C_1 \cdot e^{-x} + C_2$, deci $y = e^x[-C_1e^{-x} + C_2] = Ce^x + C_0$.

Verificînd ecuația cu această soluție obținem $C_0 = 0$. Deci soluția cerută este $y = C \cdot e^x$.

9.61. Facem substituția $y' = u$ și ecuația devine:

$$\frac{dx}{a} = \frac{du}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Integrînd avem:

$$\frac{x-C}{a} = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}};$$

de unde:

$$u = \frac{x-C}{\sqrt{a^2-(x-C)^2}}.$$

Deci

$$dy = \frac{(x - C)dx}{\sqrt{a^2 - (x - C)^2}}.$$

Integrînd din nou, obținem integrala generală:

$$y - C' = -\sqrt{a^2 - (x - C)^2}.$$

9.62. Dacă $y'' = 0$ rezultă $y = Ax + B$ o soluție a ecuației diferențiale. Să presupunem acum că $y'' \neq 0$. Ecuația se mai poate scrie:

$$\frac{y'''}{y''} = \frac{y''}{y'}.$$

Prin integrare obținem:

$$\ln|y''| = \ln|y'| + \ln C, \text{ deci } y'' = Cy'.$$

Ecuația caracteristică atașată acestei ecuații diferențiale este:

$$r^2 - Cr = 0 \Rightarrow r_1 = 0;\ r_2 = C, \text{ deci}$$

$$y = C_1 + C_2 e^{Cx},$$

unde C_1, C_2, C sînt constante arbitrare.

9.63. Funcția f este continuă, deci și funcția f^m este continuă. Rezultă că funcția $\int f^m(x)dx$ este derivabilă, deci și funcția $f^n(x)$ este derivabilă, de unde deducem că funcția f este derivabilă. Putem diferenția în ambii membri ai ecuației și obținem:

$$f^m(x) = nf^{n-1}(x) \cdot f'(x) \Leftrightarrow f'(x) - \frac{1}{n} f^{m-n+1}(x) = 0.$$

Notînd $f(x) = y$ și împărțind prin y^{m-n+1}, obținem:

$$\frac{y'}{y^{m-n+1}} - \frac{1}{n} = 0. \quad (1)$$

Această ecuație se transformă într-o ecuație liniară prin substituția:

$$u = y^{n-m} \Rightarrow u' = (n - m)y^{n-m-1} \cdot y' = (n - m)\frac{y'}{y^{m-n+1}}.$$

Ecuaţia (1) devine:

$$u' = \frac{n-m}{n} \Rightarrow u = \frac{n-m}{n}x + C \Rightarrow y =$$

$$= \left(\frac{n-m}{n}x + C\right)^{\frac{1}{n-m}}.$$

Rezultă că:

$$f : R \to R$$

$$f(x) = \left(\frac{n-m}{n}x + C\right)^{\frac{1}{n-m}}, \ C \in R.$$

9.64. Se observă mai întîi că $x \neq 0$. Funcţia f fiind continuă, rezultă că $\int f(x)dx$ este o funcţie derivabilă, deci şi $\frac{f(x)}{x}$ este o funcţie derivabilă.

Deducem că funcţia f este derivabilă, deci putem să diferenţiem în ambii membri ai ecuaţiei. Obţinem:

$$f(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = x + \frac{1}{x}.$$

Integrînd, obţinem:

$$\ln f(x) = \frac{x^2}{2} + \ln|x| + C \Rightarrow f(x) = C\,|x|\,e^{\frac{x^2}{2}}.$$

Deci funcţia ce trebuia determinată este:

$$f : R - \{0\} \to R^+ - \{0\};$$

$$f(x) = C\,|x|\,e^{\frac{x^2}{2}}, \text{ unde } C \in R^+ - \{0\}.$$

PROBLEME DE SINTEZĂ, DE PERSPICACITATE ŞI PROBLEME DATE LA ADMITERE ÎN ÎNVĂŢĂMÎNTUL SUPERIOR

10·1. Se consideră funcţia $f : R \to R$ dată de legea:

$f(x) = ax^8 + bx^7 + c$ unde $a, b, c \in R - \{0\}$.

Să se arate că funcţia f nu este injectivă.

(*L. Pîrşan*, Concurs elevi, 1974)

10.2. Să se demonstreze că unica pereche $(x; y)$ de numere naturale distincte care satisfac relaţia $x^y = y^x$ este $(4; 2)$.

(*I. Chiţescu*, G.M.B., 7521, 1966)

10.3. Să se calculeze limita şirului cu termenul general

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)\sqrt{1+\frac{2k}{n}}}.$$

(*C. Ionescu-Ţiu*, G.M.B., 9825, 1969)

10.4. Să se găsească maximul funcţiei

$$Z = x - y$$

dacă $\operatorname{tg} x = 3 \operatorname{tg} y$; $\left(0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2},\ 0 \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$.

(*V. Bărănescu*, G.M.B., 8179)

10.5. Se consideră ecuaţia $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ cu toate rădăcinile x_1, x_2, x_3 reale, iar între parametrii reali p, q există relaţia

$$p^2 + 2p + 2 = 2q.$$

a). Să se arate că în acest caz avem:

$$3-\sqrt{3}\leqslant x_1+x_2+x_3\leqslant 3+\sqrt{3};$$
$$2-\sqrt{3}\leqslant q\leqslant 2+\sqrt{3};$$
$$4-2\sqrt{3}\leqslant x_1^2+x_2^2+x_3^2\leqslant 4+2\sqrt{3};$$
$$0\leqslant x_1x_2x_3\leqslant\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3.$$

b). Să se rezolve ecuația dată cînd $x_1=x_2=1{,}5$.

(*C. Ionescu-Țiu*, G.M.B., 11536, 1970)

10.6. Să se calculeze:

$$L=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\operatorname{arc\,ctg}(1+k+k^2).$$

10.7. Se consideră funcția reală de variabilă reală

$$f(x)=\sum_{k=1}^{n}a_k\sin(x+b_k);\ \text{cu } a_i, b_i\in R,\ i=1,2,\ldots,n.$$

Să se arate că dacă $f(0)=0$ și dacă $(\exists)x_0\neq k\pi$ astfel ca $f(x_0)=0$ atunci $f(x)=0$, $(\forall)x\in R$.

(Admitere, Institutul Politehnic, București, 1973)

10.8. a). Să se arate că dacă $a\in R$, atunci

$$5\leqslant\sqrt{a^2}+\sqrt{a^2-8a+25}.$$

b). Dacă $3{,}125\leqslant a<\infty$, atunci

$$0\leqslant a-\sqrt{a^2-8a+25}<4.$$

c). Dacă $-\infty<a\leqslant -3{,}125$ atunci

$$-4<a+\sqrt{a^2+8a+25}\leqslant 0.$$

(*C. Ionescu-Țiu*, Concurs elevi, 1972)

10.9. Să se calculeze

$$\lim_{x\to\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{\sqrt{1+x}\,(6x-3\sqrt{3})-3\sqrt{3}(2x+1)+3(2x+3)}{\sqrt{1-x}\,(2x-\sqrt{3})-2x(\sqrt{3}+1)+3+\sqrt{3}}.$$

10.10. Să se cerceteze continuitatea pe R a funcției:

$$f(x) = \frac{|1+x| - |1-x|}{|1+x| + |1-x|}$$

și să se arate că $f(-x) = -f(x)$.

10.11. Fie $f(n)$ un șir astfel ca pentru orice $n \in N$ să avem:

$$f(n+1) - f(n) = 3f(n) \text{ și } f(0) = -\frac{1}{2}.$$

a). Să se calculeze $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$.
b). Exprimați termenul general $f(n)$ în funcție de n.
c). Să se calculeze $S(n) = f(0) + f(1) + \ldots + f(n)$.
Să se arate că:

$$S(n) = \frac{f(n+1) - f(0)}{3},$$

10.12. a). Să se arate că oricare ar fi x real avem:

$$-1 < \frac{1-x^2}{1+x^2} \leqslant 1; \sqrt{1 - \frac{1-x^2}{1+x^2}} = |x| \sqrt{1 + \frac{1-x^2}{1+x^2}}.$$

b). Să se rezolve ecuația $7x^2 - 2(m+3)x + m + 1 = 0$, știind că admite rădăcina $x_1 = \sqrt{3}$.
c). Să se formeze ecuația de gradul doi în y cu rădăcinile

$$y_1 = \frac{1-x_1^2}{1+x_1^2} \text{ și } y_2 = \frac{1-x_2^2}{1+x_2^2}.$$

d). Să se reprezinte grafic funcția $y = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$.

(*C. Ionescu-Țiu*, Concurs elevi, 1970)

10.13. Fie $f : R \to R$. Se știe că:
1). f este de două ori derivabilă pe R.
2). $f'(0) = f'(1) = 0$.
3). $f''(x) \geqslant 0$ pentru orice $x \in R$.
Să se arate că $f(0) = f(1)$.

(Admitere — oral, Facultatea de Matematică-Mecanică, București, 1974)

• **10.14.** Funcțiile $f, g : R - \{0\} \to R$ unde

$$f(x) = \begin{cases} \ln(-x) + 1 & \text{dacă } x < 0 \\ \ln(x) + 2 & \text{dacă } x > 0, \end{cases} \quad \text{și}$$

$$g(x) = \begin{cases} \ln(-x) + 2 & \text{dacă } x < 0 \\ \ln(x) + 1 & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$$

au aceeași derivată, dar $f - g$ nu este constantă. Explicați acest fapt.

(Admitere — oral, Facultatea de Matematică — Mecanică, București, 1974).

10.15. a). Să se arate că tangentele la curbele reprezentate de ecuațiile

$y_1(x) = \arccos(e^{a-x}\cos b)$ și $y_2(x) = \arcsin(e^{a-x}\sin b)$, respectiv în punctele A și B de intersecție ale acestor curbe cu dreapta $y = d$, sînt perpendiculare. Ce valori poate lua d?

b). Presupunînd $b \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, să se arate că cele două curbe trec prin punctul $M(a, b)$ și să se scrie ecuațiile tangentelor în M la cele două curbe.

c). Să se calculeze $\lim\limits_{x \to a} \frac{y_1(x) - y_2(x)}{x - a}$, în cazul $b \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

(*C. Ionescu-Țiu*, Concurs elevi, 1968)

10.16. Să se demonstreze că pentru perechea arbitrară de funcții $f(x)$ și $g(x)$ definită pe $[0, 1]$, există astfel de valori $0 \leqslant x \leqslant 1$ și $0 \leqslant y \leqslant 1$ pentru care avem

$$|f(x) + g(y) - xy| \geqslant \frac{1}{4}.$$

10.17. Se dă expresia

$$E = \frac{(a_1x + b_1)^{c_1x^2 + d_1x} - (a_2x + b_2)^{c_2x^2 + d_2x}}{(a_3x + b_3)^{c_3x^4 + d_3x} - (a_4x + b_4)^{c_4x^2 + d_4x}}.$$

Să se calculeze $\lim\limits_{x \to 0} E$.

10.18. Folosind curba reprezentativă a funcției

$$f(x) = x^4 - \frac{4}{3}x^3 - 4x^2,$$

să se discute rădăcinile ecuației

$$x^4 - \frac{4}{3}x^3 - 4x^2 - m = 0$$

unde $m \in R$.

10.19. Să se studieze și să se reprezinte grafic funcția

$$f(x) = x \cdot \frac{(x-1)^2}{(x+1)^2}.$$

•**10.20.** Se consideră funcțiile

$$f(x) = \ln(1 + \sqrt{1 + x^2})$$

$$g(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$$

definite pe mulțimea numerelor reale.

1°. Să se studieze monotonia funcției $y = f(x)$ și să se precizeze care este cea mai mică valoare a ei.

2°. Să se arate că pentru orice $x > 0$ este verificată relația

$$x \cdot e^{g(x)} \left[f\left(\frac{1}{x}\right)\right]' + g'(x) = 0.$$

•3°. Să se arate că polinomul $(1 - x + x^2)^{2n+1} + (1 + x + x^2)^{2n+1}$ este divizibil prin $[e^{f(x)} - 1]^2$.

•4°. Să se găsească soluțiile din intervalul $(0, \pi)$ ale ecuației trigonometrice

$$f(\text{tg}\,\alpha) = g(\text{ctg}\,\alpha) - \frac{1}{2}\ln 3.$$

•5°. Să se arate că $g(x) < x$ pentru orice $x > 0$.

(Admitere, Facultatea Matematică — Mecanică, Iași, 1974)

10.21. Să se arate că polinomul

$$P_n(x) = x^{n+1} - (x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1)$$

are o singură rădăcină reală pozitivă, pe care o notăm a_n și că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

(*I. Tomescu*, G.M.B., 1973)

10.22. Polinomul $T_n(x)$, unde n este un întreg nenegativ, satisface relațiile

$$(1 - x^2)\, T_n''(x) - xT_n'(x) + n^2 \cdot T_n(x) = 0$$
$$T_n(1) = 1;\; T_n(x) = (-1)^n \cdot T_n(-x).$$

Făcînd substituția $x = \cos\theta$ și rezolvînd ecuația transformată, să se obțină $T_n(x)$ într-o formă simplă ca funcție de θ și să se arate că:

$$T_0(x) = 1,\quad T_1(x) = x$$

și

$$T_{n+1}(x) = 2x \cdot T_n(x) - T_{n-1}(x), \text{ pentru } n = 1, 2, 3, \ldots.$$

(Concurs, Cambridge, 1972)

10.23. Să se determine funcțiile bijective $f: R_+ \to R_+$, astfel încît pentru orice $a, b \in R_+$ să avem inegalitatea:

$$ab \leqslant \frac{1}{2}[a \cdot f(a) + b \cdot f^{-1}(b)]$$

(G.M.A., 1972)

10.24. Să se găsească funcția f bijectivă și $f: R_+ \to R_+$ care îndeplinește relația:

$$f[f'(x)] + f(x) = 0.$$

(*S. Rădulescu*, G.M.B., 11370, 1971)

10.25. Se dă funcția $f: [0, \infty) \to [0, 1]$ definită prin relația

$$f(x) = (-1)^{[x]}\left(x - 2\left[\frac{x}{2}\right] - 1\right) + 1$$

unde $[a]$ înseamnă partea întreagă din a.

Să se arate că $f(x+2)=f(x)$ și să se facă graficul funcției f.

(*V. Pătrașcu*, G.M.B., 13588, 1973)

10.26. Rezolvați ecuația funcțională:

$$f(x+y)=f(x-y)+y[f'(x+y)+f'(x-y)]$$

(The American Mathematical Monthly, E. 2280, 1972)

10.27. Se dă funcția

$$f(x)=\frac{\sin x}{\sqrt{1+\sin 2x}}$$

unde $x\in[0, 2\pi]$.

Să se reprezinte grafic această funcție.

10.28. Să se arate că funcția $f(x)=|x|$ definită pe axa reală R admite primitive. Să se calculeze aceste primitive.

(Admitere — oral, Facultatea de Matematică — Mecanică, București, 1974)

10.29. Să se calculeze integrala

$$\int_0^1 \max\left(\frac{1}{4},\ x^2\right) dx.$$

(Admitere — oral, Facultatea de Matematică — Mecanică, București, 1974)

10.30. Să se arate că dacă $t>0$ este un parametru real și

$$f(t)=\int_0^t \frac{dx}{x^2+1},\ \text{atunci}\ f(t)=-f\left(\frac{1}{t}\right).$$

(Admitere — oral, Facultatea de Matematică — Mecanică, București, 1974)

10.31. Să se determine domeniul de definiție al funcției dată de expresia $f(x)=\dfrac{1}{x(\ln x)(\ln\ln x)}$. Să se arate că funcția obținută are primitive și să se calculeze acestea.

(Admitere — oral, Facultatea de Matematică — Mecanică, București, 1974)

10.32. Fie integrala

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{1+\cos^2 x}.$$

Să se verifice că funcţiile

$$E_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \arccos \frac{\sqrt{2}\cos x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$$

$$E_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}$$

sînt primitive ale funcţiei de sub semnul de integrare.

Pot fi folosite amîndouă pentru a calcula integrala definită cu ajutorul formulei lui Newton-Leibniz?

(Admitere, Institutul Politehnic, Bucureşti, 1973)

10.33. Fie $g : x \to g(x) = \ln(1+\sin^2 x)$.

a). Să se studieze existenţa lui $g(x)$ şi derivata $g'(x)$.

b). Să se calculeze cu aproximaţia permisă de tabele integrala definită

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x}\, dx.$$

c). Să se determine soluţia ecuaţiei diferenţiale

$$4y'' + 9y = 0$$

care satisface condiţiile $y\left(\frac{8\pi}{9}\right) = \frac{1}{2}$ şi $y\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 2.$

(Bacalaureat, Franţa, 1971)

10.34. Se consideră funcţia

$$f : R \to R$$

$$f(x) = \int_1^2 \frac{\sin xt}{t}\, dt.$$

Să se arate că în intervalul $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ funcţia f este strict crescătoare.

(Concurs elevi, 1972)

10.35. Fie $a \in R$, iar f o funcție reală continuă în intervalul $[a, \infty)$. Se consideră funcția $I(f)$, $I(f) : [0, +\infty) \to R$ dată de relația

$$I(f)\,(x) = \int_a^x e^t f(t)\,dt.$$

a). Să se studieze derivabilitatea acestei funcții.
b). Să se studieze existența soluțiilor ecuației

$I(f) = kf$ unde k este un parametru real

(Concurs elevi, 1973)

10.36. Fie $f : [1, +\infty) \to (0, +\infty)$ o funcție descrescătoare și continuă. Se consideră funcția F, $F : [1, +\infty) \to [0, +\infty)$ dată de relația:

$$F(x) = \int_1^x f(t)\,dt.$$

a). Să se arate că dacă există $\lim_{x\to\infty} F(x)$ și este finită, atunci șirul

$$a_n = f(1) + f(2) + \ldots + f(n)$$

este convergent.

b). Alegînd în mod convenabil funcția f și folosind rezultatul anterior, să se arate că șirul:

$$x_n = \frac{1}{1^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha} + \ldots + \frac{1}{n^\alpha}$$

este convergent pentru $\alpha > 1$.

(Concurs elevi, 1973)

10.37. Fie $f: [a, b] \to R$ o funcție continuă pe intervalul $[a, b]$.

Să se arate că există $\xi \in (a, b)$, astfel încît să avem:

$$f(\xi) = \frac{1}{b - \xi} \int_a^\xi f(t)\,dt.$$

10.38. Fie $f: R \to R$ o funcție continuă satisfăcînd relația

$$f(x) = \lambda(1 + x^2)\left[1 + \int_0^x \frac{f(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\right], \quad (\forall)x \in R,$$

λ fiind un număr real dat.

a). Să se arate că f este derivabilă în orice punct $x \in R$.

b). Să se arate că există o singură funcție $f: R \to R$ satisfăcînd condiția din enunț.

(*I. Maftei*, G.M.B., 11485, 1971)

10.39. Fie f o funcție continuă $f: R \to R$ și k un număr real astfel ca:

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{x}{2}\left[f(x) + k\right], \ (\forall)x \in R.$$

1°. Să se demonstreze că $f(0) = k$.

2°. Să se arate că singurele funcții continue care satisfac relația din enunț sînt funcțiile de tipul

$$f(x) = cx + k.$$

(*L. Panaitopol*, Concurs elevi, 1971)

10.40. Se dă funcția $f(x) = \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)$. Se cere:

1°. Să se studieze variația și să se traseze graficul funcției f.

2°. Să se calculeze limita șirului cu termenul general

$$u_n = f(1) + f(2) + \ldots + f(n).$$

3°. Să se calculeze integrala

$$\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(Admitere, Institutul Politehnic, București, 1974)

10.41. Să se demonstreze că pentru $1 < a \leqslant b$, avem:

$$\frac{1}{e}(e^b - e^a) \leqslant \int_a^b x^x \, \mathrm{d}x \leqslant (e^b - e^a)e^{b^2-a-b}.$$

$$0 \leqslant \int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{\ln x} - \ln\frac{b-1}{a-1} \leqslant b - a.$$

(*A. Bănică*, G.M.B., 12302, 1972)

10.42. Fie f, $f:[a, b] \to R$, o funcție continuă pe intervalul $[a, b]$, cu proprietatea că $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \neq 0$.

Să se arate că există un punct $\xi \in (a, b)$ astfel încît să avem:

$$\int_a^\xi f(t) \, \mathrm{d}t = \frac{f(\xi)(\xi - a)(\xi - b)}{a + b - 2\xi}.$$

(*I. Iliescu*, G.M.A., 103, 1973)

10.43. Fie funcția $y = f(x)$ continuă și pozitivă pe intervalul $[0, t]$. Notăm $l(t) = \int_0^t \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \, \mathrm{d}x$, $S(t) = \int_0^t f(x) \, \mathrm{d}x$. Să se arate că:

$$l'(t)l''(t) = S''(t)S'''(t).$$

(*M. Levin, A. Levin*, G.M.B., 11404)

10.44. Fie funcția $f(x) = [x] \cdot \sin \pi x$, $x \in R$.

1°. Să se reprezinte grafic.

2°. Dacă pentru orice număr natural k notăm cu m_k valoarea minimă a funcției $f(x)$ pe intervalul $[k, k+1]$, să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ unde $S_n = \sum\limits_{k=1}^{2n} 2^{m_k} - n$.

3°. Să se studieze convergența șirului $a_n = \frac{1}{\lambda^n}\int_{-n}^{n} f(x) \, \mathrm{d}x$ unde $\lambda \neq 0$ este un parametru real.

(*Ș. Grigorescu*, G.M.B., 13423)

10.45. Fie $f, f: (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ o funcție continuă. Se consideră funcția $\varphi: (0, +\infty) \to (0, +\infty)$, dată de relația:

$$\varphi(x) = \frac{\int_0^x tf(t)\,dt}{\int_0^x f(t)\,dt}.$$

a). Să se arate că pentru orice $x > 0$, are loc inegalitatea $\varphi(x) \leqslant x$.

b). Să se demonstreze că φ este derivabilă și să se calculeze derivata ei.

c). Folosind rezultatele anterioare să se arate că φ este o funcție crescătoare.

(*D. Radu*, Concurs elevi, 1973)

10.46. Fie $f: [a, b] \to R$. Să se arate că dacă f este continuă, există $a < \xi < b$, astfel încît să avem:

$$f(\xi) = \frac{a + b - 2\xi}{(\xi - a)(\xi - b)}.$$

(*N. N. Teodorescu*, G.M.A., nr. 12, 1969)

10.47. Se consideră n numere reale distincte $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ și fie f o funcție reală continuă pe intervalul $[a_1, a_n]$.

Să se arate că există cel puțin $n - 1$ numere reale $\xi_i (1 \leqslant i \leqslant n - 1)$ astfel încît:

$$f(\xi_i) = \frac{1}{\xi_i - a_1} + \ldots + \frac{1}{\xi_i - a_n}.$$

(*M. Nișulescu*, G.M.A., 1972)

10.48. Fie funcțiile $f, g: [a, b] \to [a, b]$ cu proprietățile următoare:

a). f este nedescrescătoare.

b). g este continuă la dreapta.

c). $f(a) = g(a) = a$.

d). $f(x) \leqslant g(x) < x$ pentru $(\forall) x, x \in (a, b]$.

1°). Notînd cu $f^{(n)}$ compunerea lui f cu ea însăşi de n ori, să se arate că

$$\lim_{n\to\infty} f^{(n)}(b) = a.$$

2°). În plus, dacă f este integrabilă, să se arate că are loc egalitatea:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f^{(n)}(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \left[\lim_{n\to\infty} f^{(n)}(x)\mathrm{d}x\right].$$

(*Ş. Grigorescu*, G.M.B., 13422, 1973)

10.1. Vom arăta că există $x_1 \neq x_2 \in R$, astfel încît $f(x_1) = f(x_2)$. Într-adevăr pentru $x_1 = 0$ și $x_2 = -\frac{b}{a}$ avem $f(x_1) = f(x_2) = c$. Deci funcția f nu este injectivă.

10.2. Fără a restrînge generalitatea problemei, putem presupune $y > x$. Relația se mai poate scrie

$$\sqrt[y]{y} = \sqrt[x]{x}, \text{ unde } x, y \in N.$$

Deoarece există șirul de inegalități

$$\sqrt[3]{3} > \sqrt[4]{4} > \sqrt[5]{5} > \ldots > \sqrt[n]{n} > \sqrt[n+1]{n+1} > \ldots,$$

pentru orice $n \geqslant 3$ rezultă că egalitatea

$$\sqrt[x]{x} = \sqrt[y]{y}$$

poate avea loc doar pentru $x = 2$ sau $x = 1$. Pentru $x = 1 \Rightarrow y = 1$, soluție care nu convine deoarece $x \neq y$.

Pentru $x = 2$ rezultă $2^y = y^2$. Cum însă $n^2 < 2^n$ pentru $n \in N - \{1, 2, 3, 4\}$ rezultă că $y \in \{1, 2, 3, 4\}$. Singurul y care satisface ecuația este 4. Deci soluția unică a ecuației în condițiile cerute este (2; 4).

10.3. Avem:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)\sqrt{1+2\frac{k}{n}}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\left(1+\frac{k}{n}\right)\sqrt{1+2\frac{k}{n}}} = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+2x}}.$$

Facem substituția $1+2x=t^2 \Rightarrow dx = t\,dt$; $x = \frac{t^2-1}{2}$.

Noile limite de integrare sînt 1 și $\sqrt{3}$. Deci:

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+2x}} = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2dt}{1+t^2} = 2\operatorname{arc\,tg} t \Big|_1^{\sqrt{3}} =$$

$$= 2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{6}.$$

10.4. Întrucît unghiurile x și y conform condiției sînt situate în primul cadran, atunci

$$\operatorname{tg} x \geqslant 0 \text{ și } \operatorname{tg} y \geqslant 0$$

Deci dacă $\operatorname{tg} x = 3\operatorname{tg} y$, atunci $\operatorname{tg} x \geqslant \operatorname{tg} y$ de unde rezultă că $x \geqslant y$, egalitatea avînd loc numai în cazul $x = y = 0$.

Prin urmare avem $Z \geqslant 0$

și

$$\operatorname{tg} Z = \operatorname{tg}(x-y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y} = \frac{3\operatorname{tg} y - \operatorname{tg} y}{1 + 3\operatorname{tg}^2 y} =$$

$$= \frac{2\operatorname{tg} y}{1 + 3\operatorname{tg}^2 y} = \frac{2\operatorname{tg} y \cdot \operatorname{cotg} y}{\operatorname{cotg} y + 3\operatorname{tg} y \cdot \operatorname{tg} y \cdot \operatorname{cotg} y} =$$

$$= \frac{2}{\operatorname{cotg} y + 3\operatorname{tg} y}.$$

De aici avem:

$$\operatorname{tg}^2 Z = \frac{4}{(\operatorname{cotg} y + 3\operatorname{tg} y)^2} = \frac{4}{(\operatorname{cotg} y - 3\operatorname{tg} y)^2 + 12}.$$

Deoarece $Z \geqslant 0$, atunci maximul funcției Z corespunde maximului funcției $\operatorname{tg}^2 Z$, adică minimului expresiei

$$(\operatorname{ctg} y - 3\operatorname{tg} y)^2 + 12, \text{ deci } (\operatorname{ctg} y - 3\operatorname{tg} y)^2 = 0.$$

Rezultă că funcția $\operatorname{tg}^2 Z$ își atinge maximul pentru $\operatorname{cotg} y = 3\operatorname{tg} y$ sau $\operatorname{tg}^2 y = \frac{1}{3}$, $\operatorname{tg} y = \frac{1}{\sqrt{3}}$ de unde $y = \frac{\pi}{6}$.

Atunci avem:

$$\operatorname{tg} x = 3 \operatorname{tg} y = 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}, \quad x = \frac{\pi}{3}$$

și

$$Z = x - y = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}.$$

10.5. a). Dacă $p^2 + 2p + 2 = 2q$, rezultă $q = \frac{p^2 + 2p + 2}{2} \geqslant \frac{1}{2}$, iar ecuația se mai scrie $2x^3 + 2px^2 + (p^2 + 2p + 2)x + 2r = 0$. Ecuația de gr. III cu parametrul p avînd toate rădăcinile reale, atunci și ecuația derivată:

$$6x^2 + 4px + p^2 + 2p + 2 = 0$$

are rădăcini reale, deci

$$\Delta = \sqrt{4p^2 - 6p^2 - 12p - 12} = \sqrt{-2p^2 - 12p - 12} \geqslant 0;$$

sau

$$p^2 + 6p + 6 \leqslant 0;$$

$$p_{1,2} = -3 \pm \sqrt{3}; \; p \in [-3 - \sqrt{3}, \; -3 + \sqrt{3}],$$

$$-p \in [3 - \sqrt{3}, \; 3 + \sqrt{3}]; \; \sum x_i = -p,$$

$$p^2 - 2q = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2,$$

fiindcă

$$p = -(x_1 + x_2 + x_3); \; q = \sum x_1 x_2.$$

Relația dată devine:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 2 = 0$$

sau

$$(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 + (x_3 - 1)^2 = 1.$$

Maximul lui $(x_1 - 1)^2$ este egal cu 1, deci

$$0 \leqslant (x_1 - 1)^2 \leqslant 1 \Rightarrow \begin{cases} (x_1 - 1)^2 \geqslant 0; \; x_1 \in R \\ (x_1 - 1)^2 \leqslant 1; \; x_1^2 - 2x_1 \leqslant 0; \; x_1 \in [0, 2]. \end{cases}$$

Analog $0 \leqslant x_2 \leqslant 2;\ 0 \leqslant x_3 \leqslant 2.$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -2p - 2, \text{ deci}$$

$$6 - 2\sqrt{3} - 2 \leqslant x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leqslant 6 + 2\sqrt{3} - 2,$$

sau $4 - 2\sqrt{3} \leqslant x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leqslant 4 + 2\sqrt{3}.$

Produsul $x_1^2x_2^2x_3^2$ este maxim, unde $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 =$ $=$ const, cînd factorii sînt egali, deci pentru maxim

$$x_1 = x_2 = x_3 = \sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{3}} = \frac{\sqrt{3}+1}{3} = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}},$$

deci

$$x_1x_2x_3 = -r \leqslant \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3,$$

minimul fiind atins cînd o rădăcină este zero, de unde

$$-\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 \leqslant r \leqslant 0.$$

b). $(1{,}5 - 1)^2 + (1{,}5 - 1)^2 + (x_3 - 1)^2 = 1$, sau

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + (x_3 - 1)^2 = 1 \Rightarrow (x_3 - 1)^2 = \frac{1}{2};$$

$$x_3 - 1 = \frac{\pm\sqrt{2}}{2};\ x_3 = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

10.6. Se poate folosi egalitatea:

$$\operatorname{arcctg} x - \operatorname{arcctg}(x + 1) = \operatorname{arcctg}(1 + x + x^2).$$

Apoi facem pe rînd $x = 1, 2, \ldots, n$ în această egalitate, adunăm membru cu membru egalitățile obținute și apoi trecem la limită. Se obține

$$L = \frac{\pi}{4}.$$

10.7. Ținînd seama că $f(0) = 0$ obținem

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \sin b_k = 0. \tag{1}$$

Funcția f se mai scrie:

$$f(x) = \sin x \sum_{k=1}^{n} a_k \cos b_k + \cos x \sum_{k=1}^{n} a_k \sin b_k$$

și avînd în vedere relația (1) obținem

$$f(x) = \sin x \sum_{k=1}^{n} a_k \cos b_k.$$

Dar cum $(\exists) x_0 \neq k\pi$, deci $\sin x_0 \neq 0$ astfel încît $f(x_0) = 0$, rezultă că

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \cos b_k = 0$$

Deci $f(x) = 0$, $(\forall) x \in R$.

10.8. a). $a^2 - 8a + 25 = (a-4)^2 + 9 \geqslant 9$.

Inegalitatea se mai scrie:

$$(\sqrt{a^2} + \sqrt{a^2 - 8a + 25})^2 =$$
$$= 2a^2 - 8a + 25 + 2\sqrt{a^2} \cdot \sqrt{a^2 - 8a + 25} \geqslant 25$$

sau $\quad a^2 - 4a + \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{a^2 - 8a + 25} \geqslant 0;$

$$(a^2 - 8a + 25)a^2 \geqslant (a^2 - 4a)^2$$

egalitatea are loc dacă $a = 0$.

b). Arătăm mai întîi că $a \geqslant \sqrt{a^2 - 8a + 25} \Rightarrow$ $\Rightarrow a^2 \geqslant a^2 - 8a + 25$, egalitatea avînd loc pentru $a = 25 : 8 = 3{,}125$; iar inegalitatea dacă $a > 3{,}125$.

Să arătăm apoi că $a < 4 + \sqrt{a^2 - 8a + 25}$ sau

$$a - 4 < \sqrt{a^2 - 8a + 25} \Rightarrow a^2 - 8a + 16 < a^2 - 8a + 25$$

sau

$$(a-4)^2 < (a-4)^2 + 9, \text{ evident.}$$

Să arătăm că $\lim\limits_{a \to \infty} (a - \sqrt{a^2 - 8a + 25}) = 4$.

$$E = \lim_{a \to \infty} \frac{a^2 - a^2 + 8a - 25}{a + \sqrt{a^2 - 8a + 25}} = \lim_{a \to \infty} \frac{8a - 25}{a + \sqrt{a^2 - 8a + 25}} = \frac{8}{2} = 4.$$

c). Dacă $a = -m$, punctul b) se mai poate scrie: Dacă $-\infty < m \leqslant -3{,}125$, atunci

$$0 \leqslant -m - \sqrt{m^2 + 8m + 25} < 4$$

sau

$$-4 < m + \sqrt{m^2 + 8m + 25} \leqslant 0.$$

Rezultă punctul c).

10.9. Se aplică regula lui l'Hospital.

10.10. Funcția f este continuă pe R, deoarece $|1+x| + |1-x| \neq 0$ și funcțiile $f_1(x) = |1+x| - |1-x|$; $f_2(x) = |1+x| + |1-x|$ sînt funcții continue pe R. Or, funcția f se obține făcînd cîtul celor două funcții continue f_1 și f_2.

$$f(-x) = \frac{|1-x| - |1+x|}{|1-x| + |1+x|} = -f(x),$$

adică funcția f este impară pe R.

10.11. a). Din enunț avem $f(n+1) = 4f(n)$. Făcînd $n = 0, 1, 2, 3$, avem $f(1) = 4f(0) = -2$, $f(2) = 4f(1) = 2^2f(1) = -2^3$; $f(3) = 2^2f(2) = -2^5$ și $f(4) = 2^2f(3) = -2^7$.

b). Presupunem prin inducție completă că $f(n) = -2^{2n-1}$. Atunci $f(n+1) = 2^2f(n) = -2^{2n+1}$.

Deci am demonstrat prin inducție completă că

$$f(n) = -2^{2n-1}.$$

c). Avem

$$S(3) = f(0) + f(1) + \ldots + f(n) = -\frac{1}{2} - 2 - 2^3 - \ldots - 2^{2n-1} =$$

$$= -\frac{1}{2}(1 + 4 + 4^2 + \ldots + 4^n) = \frac{1 - 4^{n+1}}{6} = \frac{1 - 2^{2n+2}}{6}.$$

Făcînd în relația de recurență din enunț $n = 0, 1, \ldots$ obținem

$$f(1) - f(0) = 3f(0)$$
$$f(2) - f(1) = 3f(1)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f(n+1) - f(n) = 3f(n).$$

Adunînd membru cu membru obținem:

$$f(n+1) - f(0) = 3[f(0) + f(1) + \ldots + f(n)]$$

de unde

$$S(3) = \frac{f(n+1) - f(0)}{3}.$$

10.12. a). Inegalitatea $\frac{1-x^2}{1+x^2} \leqslant 1$ este evidentă, numărătorul fiind mai mic decît numitorul. Să mai arătăm că $-1 < \frac{1-x^2}{1+x^2}$, sau $\frac{1-x^2+1+x^2}{1+x^2} > 0$; $\frac{2}{1+x^2} > 0$, evident.

$$\sqrt{1-\frac{1-x^2}{1+x^2}} = \sqrt{\frac{2x^2}{1+x^2}} = |x|\sqrt{\frac{2}{1+x^2}} = |x|\sqrt{1+\frac{1-x^2}{1+x^2}}.$$

b). Pentru $x_1 = \sqrt{3}$ ecuația devine:

$$21 - 2(m+3)\sqrt{3} + m + 1 = 0$$

sau

$$(2\sqrt{3} - 1)m = 22 - 6\sqrt{3}$$

de unde

$$m = \frac{22 - 6\sqrt{3}}{2\sqrt{3} - 1} = \frac{38\sqrt{3} - 14}{11}$$

deci

$$x_2 = (x_1 + x_2) - x_1 = \frac{2m+6}{7} - \sqrt{3} = \frac{38 - \sqrt{3}}{77}.$$

c). Facem transformarea $y = \frac{1-x^2}{1+x^2}$ sau $x^2 = \frac{1+y}{1-y}$ și obținem $\frac{7(1-y)}{1+y} - 2(m+3)\sqrt{\frac{1-y}{1+y}} + m + 1 = 0$ sau $\frac{7(1-y)}{1+y} + m + 1 = 2(m+3)\sqrt{\frac{1-y}{1+y}}$. Ridicăm la pătrat și eliminînd numitorii obținem:

$$5(m^2 + 8m + 20)y^2 + 2(m^2 + 2m - 48)y + m(m+2) = 0.$$

d). Funcția dată este definită pentru orice $x \in R$. Pentru $x = \pm 1$ avem $y = 0$, iar pentru $x \to \pm \infty$ avem $y \to -1$. După cum am constatat la punctul a) $-1 < y < 1$. Pentru $x = 0$ avem $y_{max} = 1$, iar $y = -1$ este asimptotă orizontală. Curba reprezentativă este simetrică față de Oy.

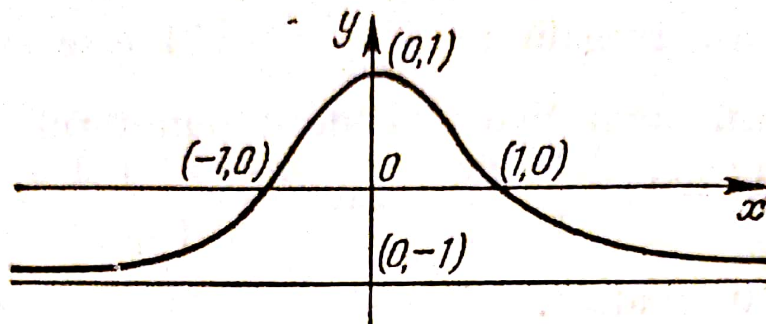


Fig. 10.12

10.13. Din condiția $f''(x) \geqslant 0$ pentru orice $x \in R$, deducem că funcția f' este crescătoare pe R. Rezultă că pentru orice $x \in (0,1)$ avem

$$f'(0) \leqslant f'(x) \leqslant f'(1).$$

Cum $f'(0) = f'(1) = 0$, găsim că pentru orice $x \in [0, 1]$, $f'(x) = 0$. Rezultă că pe intervalul $[0, 1]$ funcția f este constantă, deci

$$f(0) = f(1).$$

10.14. Într-adevăr, pentru orice $x \in R - \{0\}$ avem $f'(x) = g'(x) = \frac{1}{x}$. Ținînd seama de o consecință a teoremei lui Lagrange ar rezulta că $f - g$ este constantă. Dar

$$f(x) - g(x) = \begin{cases} -1 & \text{dacă} \quad x < 0 \\ 1 & \text{dacă} \quad x > 0. \end{cases}$$

Deci funcția $f - g$ nu este constantă pe $R - \{0\}$. Aceasta se datorește faptului că funcțiile f și g au derivatele egale nu pe un interval, ci pe o reuniune de două intervale: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. În general, dacă două funcții f și g au derivatele egale pe o mulțime care nu este interval nu rezultă că diferența lor este constantă

pe această mulțime. (Teorema lui Lagrange nu se poate aplica funcțiilor al căror domeniu de definiție nu este un interval.)

10.15. a) Fie ecuațiile

$$y_1(x) = \arccos(e^{a-x} \cos b)$$
$$y_2(x) = \arcsin(e^{a-x} \sin b)$$

(Precizăm că a și b sînt constante.)

Deoarece $y_1(x) \in [0, \pi]$ și $y_2(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, rezultă

$$d \in [0, \pi] \cap \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] = \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

adică dreapta $y = d$ taie cele două curbe în puncte ale căror ordonate aparțin intervalului $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Calculînd coeficienții unghiulari ai tangentelor la curbe, avem:

$$y_1'(x) = \frac{e^{a-x} \cos b}{\sqrt{1 - e^{2(a-x)} \cos^2 b}} = \frac{\cos y_1(x)}{\sqrt{1 - \cos^2 y_1(x)}} = $$
$$= \frac{\cos y_1(x)}{|\sin y_1(x)|} = \frac{\cos y_1(x)}{\sin y_1(x)}.$$

$$y_2'(x) = \frac{-e^{a-x} \sin b}{\sqrt{1 - e^{2(a-x)} \sin^2 b}} = -\frac{\sin y_2(x)}{\sqrt{1 - \sin^2 y_2(x)}} = $$
$$= -\frac{\sin y_2(x)}{|\cos y_2(x)|} = -\frac{\sin y_2(x)}{\cos y_2(x)}.$$

Menționăm că nu este necesar să calculăm coordonatele punctelor A și B de intersecție ale curbelor cu dreapta d.

Fie α și β abscisele punctelor de intersecție ale curbelor cu dreapta $y = d$, pentru care avem: $y_1(\alpha) = y_2(\beta) = d$.

$$y_1'(\alpha) = \frac{\cos d}{\sin d} = \operatorname{ctg} d, \text{ și } y_2'(\beta) = \frac{-\sin d}{\cos d} = -\operatorname{tg} d \text{ unde}$$

$$d \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

$y'(\alpha)\, y_2'(\beta) = -1$, deci tangentele sînt perpendiculare în punctele de intersecție ale curbelor cu dreapta d.

b). Curbele trec prin $M(a, b)$, deoarece:

$$y_1(a) = \arccos(\cos b) = b.$$

$$y_2(a) = \arcsin(\sin b) = b.$$

Ecuațiile tangentelor în M la cele două curbe sînt: $y - b = m_1(x - a)$ și $y - b = m_2(x - a)$ unde:

$$m_1 = y_1'(a) = \frac{\cos b}{\sin b} = \operatorname{cotg} b, \quad \text{dacă} \quad b \neq 0,$$

$$m_2 = y_2'(a) = -\frac{\sin b}{\cos b} = -\operatorname{tg} b, \quad \text{dacă} \quad b \neq \frac{\pi}{2}.$$

Ecuațiile tangentelor sînt:

$$y - b = \operatorname{ctg} b(x - a) \quad \text{și}$$

$$y - b = -\operatorname{tg} b(x - a).$$

Dacă $b = 0$, ecuațiile devin: $x - a = 0$, respectiv $y - b = 0$, iar dacă $b = \frac{\pi}{2}$ ecuațiile tangentelor sînt $y - a = 0$, respectiv $x - a = 0$.

c). Calcularea limitei:

$\lim\limits_{x \to a} \frac{y_1(x) - y_2(x)}{x - a}$, în cazul $b \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, este posibilă și fără aplicarea teoremei l'Hospital, folosind numai definiția derivatei

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0).$$

Deci:

$$\lim_{x \to a} \frac{y_1(x) - y_2(x)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{y_1(x) - y_1(a)}{x - a} - \lim_{x \to a} \frac{y_2(x) - y_2(a)}{x - a} =$$

$$= y_1'(a) - y_2'(a) = \operatorname{ctg} b + \operatorname{tg} b = \frac{2}{\sin 2b} = 2 \operatorname{cosec} 2b.$$

10.16. Fie $a = f(0) + g(0)$; $b = f(0) + g(1)$;
$c = f(1) + g(0)$; $d = f(1) + g(1) - 1$.

Se observă imediat că numerele reale a, b, c, d, sînt obținute înlocuind în $f(x) + g(x) - xy$ pe $x, y \in \{0, 1\}$ și că:

$$b + c - a - d = 1.$$

Rezultă:

$$1 = |b + c - a - d| \leqslant |b| + |c| + |a| + $$
$$+ |d| \leqslant 4 \max \{|a|, |b|, |c|, |d|\},$$

deci

$$\max \{|a|, |b|, |c|, |d|\} \geqslant \frac{1}{4}.$$

Prin urmare, printre perechile $(x, y) \in \{0, 1\} \times \{0, 1\}$, există cel puțin una care face ca

$$|f(x) + g(y) - xy| \geqslant \frac{1}{4}.$$

10.17. Notăm $f_i(x) = (a_i x + b_i)^{c_i x^2 + d_i x}$, $(i = 1, 2, 3, 4)$ și limita se mai poate scrie:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f_1(x) - f_2(x)}{f_3(x) - f_4(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{f_1(x) - f_1(0)}{x - 0} - \frac{f_2(x) - f_2(0)}{x - 0}}{\frac{f_3(x) - f_3(0)}{x - 0} - \frac{f_4(x) - f_4(0)}{x - 0}} =$$

$$= \frac{f_1'(0) - f_2'(0)}{f_3'(0) - f_4'(0)}.$$

Am folosit faptul că $f_1(0) = f_2(0) = f_3(0) = f_4(0) = 1$. Prin derivare obținem:

$$f_i'(x) = f_i(x) \left[(2xc_i + d_i) \ln(a_i x + b_i) + (c_i x^2 + d_i x) \frac{a_i}{a_i x + b_i} \right].$$

Trecînd la limită

$$f_i'(0) = \lim_{x \to 0} f_i'(x) = d_i \ln b_i \quad \text{pentru } i = 1, 2, 3, 4.$$

Deci:

$$\lim_{x\to 0} E = \frac{d_1 \ln b_1 - d_2 \ln b_2}{d_3 \ln b_3 - d_4 \ln b_4} = \frac{\ln \dfrac{b_1^{d_1}}{b_2^{d_2}}}{\ln \dfrac{b_3^{d_3}}{b_4^{d_4}}}.$$

10.18. $f'(x) = 4x^3 - 4x^2 - 8x = 4x(x+1)(x-2) = 0.$

Derivata se anulează schimbînd semnul pentru $x = -1$, $x = 0$ și $x = 2$.

Tabelul de variație este:

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{5}{3}$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{32}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

Avem $f(x) - m = 0$ sau $f(x) = m$. Reprezentăm funcția $f(x)$.

$$f(x) = x^2\left(x^2 - \frac{4}{3}x - 4\right) = 0, \quad x_{1,2} = 0,$$

$$x_3 = \frac{2 + 2\sqrt{10}}{3} \approx 2{,}77; \quad x_4 \approx -1{,}44.$$

Concluzii:

Dacă $m < -\frac{32}{3}$ ecuația nu are rădăcini reale.

Pentru $m = -\frac{32}{3}$ ecuația are o rădăcină dublă $x = 2$.

Pentru $-\frac{32}{3} < m < -\frac{5}{3}$ ecuația are două rădăcini pozitive.

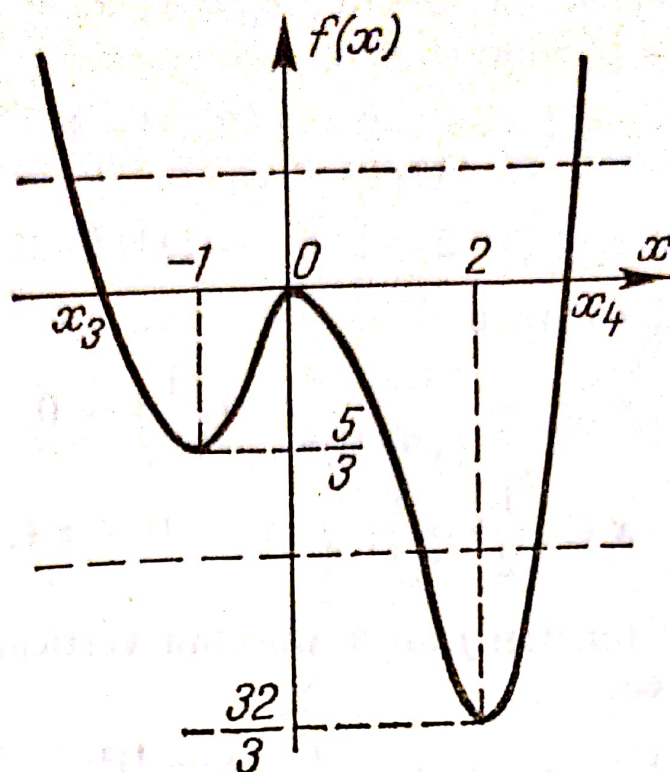


Fig. 10.18.

Pentru $m = -\frac{5}{3}$ ecuația are o rădăcină dublă $x_{1,2} = -1$ și două rădăcini pozitive.

Pentru $-\frac{5}{3} < m < 0$ ecuația are două rădăcini negative și două pozitive.

Pentru $m = 0$, ecuația are o rădăcină dublă $x_{1,2} = 0$; $x_3 \approx -1{,}44$ și $x_4 \approx 2{,}77$.

Pentru $m > 0$, o rădăcină negativă mai mică decît $-1{,}44$, una pozitivă, mai mare ca $2{,}77$ și două rădăcini complexe conjugate.

10.19. Domeniul maxim de definiție este mulțimea $R - \{-1\}$. Avem $f(0) = f(1) = 0$. Calculînd prima derivată avem:

$$f'(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - 5x + 1}{(x+1)^3} = \frac{(x-1)(x^2+4x-1)}{(x+1)^3}.$$

Zerourile derivatei întîi sînt: $x_1 = 1$; $x_2 = -2 + \sqrt{5}$.
$x_3 = -2 - \sqrt{5}$ și

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -2 - \sqrt{2}) \cup (-1, -2 + \sqrt{5}) \cup \cup (1, +\infty).$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-2 - \sqrt{5}, -1) \cup (-2 + \sqrt{5}, 1).$$

Calculînd derivata a doua obținem:

$$f''(x) = \frac{16x - 8}{(x+1)^4} \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = 0.$$

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left(\frac{1}{2}, \infty\right); \quad f''(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right).$$

Graficul funcției f are asimptota verticală $x = -1$. De asemenea,

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \text{ și } \lim_{x \to \pm\infty} \left[x \frac{(x-1)^2}{(x+1)^2} - x\right] = -4.$$

Deci graficul funcției are și asimptota oblică: $y = x - 4$. Graficul și asimptota oblică se taie într-un punct. Tabloul de variație al funcției este:

x	$-\infty$		$-2-\sqrt{5}$		-1		0	$-2+\sqrt{5}$	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$-\infty \parallel +\infty$	$+$		0	$-$	-0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{11+5\sqrt{5}}{3}$	$\searrow$	$-\infty \parallel -\infty$	$\nearrow$	$0 \nearrow$	$\frac{5\sqrt{5}-11}{3} \searrow$	$\frac{1}{18} \searrow$	0	$\nearrow$
$f''(x)$		$-$	$-$		$-\infty \parallel -\infty$			$-$	$0+$	$+$	

Deci punctele $A\left(-2 - \sqrt{5}, -\frac{11 + 5\sqrt{5}}{3}\right)$ și $B\left(-2 + \sqrt{5}, \frac{5\sqrt{5} - 11}{3}\right)$ sînt puncte de maxim

iar punctul $C(1, 0)$ este punct de minim. Punctul $D\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{18}\right)$ este punct de inflexiune.

Graficul funcției taie abscisa în punctele $O(0, 0)$, $E(1, 0)$.

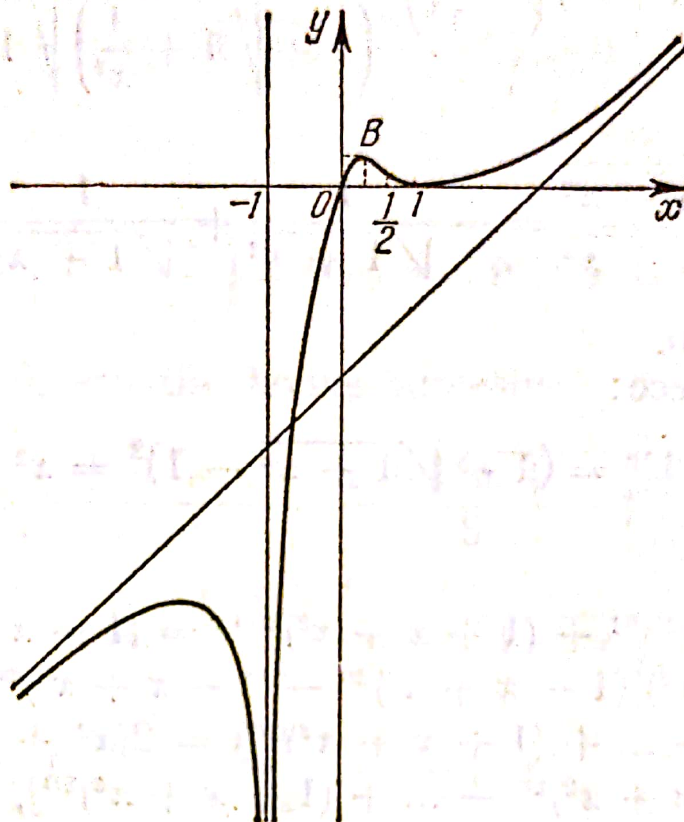


Fig. 10.19.

10.20. 1°. Avem:

$$y' = f'(x) = \frac{x}{(1 + \sqrt{1 + x^2})\sqrt{1 + x^2}},$$

deci $f'(x) < 0$, pentru $x \in (-\infty, 0)$ și $f'(x) > 0$, pentru $x \in (0, +\infty)$. Rezultă că funcția f este strict descrescătoare pe intervalul $(-\infty, 0)$, strict crescătoare pe intervalul $(0, +\infty)$ și admite un minim $y = 0$, pentru $x = 0$.

2°. Deoarece:

$$x \cdot e^{g(x)}\left[f\left(\frac{1}{x}\right)\right]' + g'(x) = x \cdot e^{g(x)}\left(-\frac{1}{x^2}\right) \cdot f'\left(\frac{1}{x}\right) + g'(x),$$

vom avea:

$$x \cdot e^{g(x)}\left[f\left(\frac{1}{x}\right)\right]' + g'(x) =$$

$$= x(x+\sqrt{1+x^2})\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cdot \frac{\frac{1}{x}}{\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} +$$

$$+ \frac{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 0,$$

pentru $x > 0$.

3°. Deoarece:

$$[e^{f(x)} - 1]^2 = (1+\sqrt{1+x^2}-1)^2 = x^2+1$$

şi

$$(1-x+x^2)^{2n+1} + (1+x+x^2)^{2n+1} = (1-x+x^2+ +1+x+x^2)[(1-x+x^2)^{2n} - (1-x+x^2)^{2n-1}\cdot(1+ +x+x^2) + \ldots + (1+x+x^2)^{2n}] = 2(x^2+1)[(1- -x+x^2)^{2n} - \ldots + (1+x+x^2)^{2n}],$$

rezultă afirmaţia din enunţ.

4°. Ecuaţia dată se mai scrie:

$$\ln(1+\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}) = \ln(\operatorname{ctg}\alpha + \sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}) - \ln 9,$$

deci

$$1+\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{\operatorname{ctg}\alpha+\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}{9}.$$

Notînd $\operatorname{ctg}\alpha = x$, obţinem ecuaţia

$$1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{x+\sqrt{1+x^2}}{9}.$$

Pentru $x > 0$, ecuația devine

$$9 + 9\frac{\sqrt{1 + x^2}}{x} = x + \sqrt{1 + x^2},$$

deci

$$9 - x + \sqrt{1 + x^2}\left(\frac{9}{x} - 1\right) = 0$$

sau

$$(9 - x)\left(1 + \frac{\sqrt{1 + x^2}}{x}\right) = 0 \Rightarrow x = 9 \Rightarrow \alpha = \operatorname{arc\,ctg} 9.$$

Pentru $x < 0$, ecuația devine succesiv:

$$1 + \frac{\sqrt{1 + x^2}}{-x} = \frac{x + \sqrt{1 + x^2}}{9};$$

$$9 - x = 9\frac{\sqrt{1 + x^2}}{x} + \sqrt{1 + x^2};$$

$$9 - x = \frac{9 + x}{x} \cdot \sqrt{1 + x^2}.$$

Cum $9 - x > 0$ și $x < 0$, din această ecuație se deduce că soluțiile ei (dacă există) trebuie să îndeplinească condiția $x < -9$. Ridicînd la pătrat ambii membri ai ecuației precedente, obținem ecuația:

$$P(x) \equiv 36x^3 + x^2 + 18x + 81 = 0,$$

care admite o singură rădăcină reală, căci $P'(x) > 0$. Însă $P(0) > 0$ și $P(-3) < 0$, deci rădăcina nu satisface condiția $x < -9$.

Rezultă că ecuația dată are în intervalul $(0, \pi)$ numai o soluție $\alpha = \operatorname{arctg} 9$.

5°. Considerînd funcția $F: [0, +\infty) \to R$ dată de legea

$$F(x) = x - g(x) = x - \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right),$$

vom avea

$$F'(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}} =$$
$$= \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}(\sqrt{1+x^2}+1)} \geqslant 0,$$

deci F este strict crescătoare pe $(0, +\infty)$. Rezultă $F(x) = x - g(x) > F(0) = 0$, deci $g(x) < x$, dacă $x > 0$.

10.21. Obținem

$$P_n(x) = x^{n+1} - \frac{x^n - 1}{x - 1} = \frac{x^{n+2} - x^{n+1} - x^n + 1}{x - 1}.$$

Notînd $Q_n(x) = x^{n+2} - x^{n+1} - x^n + 1$, rezultă că mulțimea rădăcinilor polinomului $Q_n(x)$ este mulțimea rădăcinilor lui $P_n(x)$ la care se adaugă numărul 1.

$$Q_n'(x) = (n+2)x^{n+1} - (n+1)x^n - nx^{n-1} =$$
$$= x^{n-1}[(n+2)x^2 - (n+1)x - n]$$

Rădăcinile lui $Q_n'(x)$ sînt deci 0, α_n și β_n unde $\alpha_n < 0$ și $\beta_n > 1$, deoarece notînd $S_n(x) = (n+2)x^2 - (n+1)x - n$ obținem $S_n(0) < 0$ și $S_n(1) < 0$ pentru $n \geqslant 2$.

Făcînd variația acestei funcții obținem:

x	$-\infty$	α_n	0	1	β_n	$+\infty$
$Q_n'(x)$		0	$-$	$-$	0	$+$
$Q_n(x)$			1	$\searrow$	min	$\nearrow +\infty$

Nu am trasat variația pentru $x < 0$, deoarece aceasta depinde de situația cînd n este par sau impar și nu ne interesează în enunțul problemei. Se observă că pentru $x > 0$, $Q_n(x)$ are două rădăcini reale, pe 1 și o rădăcină mai mare ca 1 (care este și mai mare

ca β_n), deci $P_n(x)$ are o singură rădăcină reală mai mare ca zero, întrucît $P_n(1) < 0$.

Notînd $\tau = \dfrac{\sqrt{5} + 1}{2}$, se observă că τ verifică ecuația de gradul al doilea cu coeficienți raționali: $X^2 - X - 1 = 0$, adică $\tau^2 = \tau + 1$. Vom demonstra că $P_n(\tau) = \tau$ pentru orice n număr natural.

$$P_n(\tau) = \tau^{n+1} - (\tau^{n-1} + \tau^{n-2} + \ldots + \tau + 1) = \tau^n + \tau^{n-1} - (\tau^{n-1} + \tau^{n-2} + \ldots + \tau + 1) = \tau^n - (\tau^{n-2} + \ldots + \tau + 1) = P_{n-1}(\tau).$$

Acum putem folosi inducția completă:

$P_1(\tau) = \tau^2 - 1 = \tau$, iar presupunînd că $P_{n-1}(\tau) = \tau$, rezultă că $P_n(\tau) = P_{n-1}(\tau) = \tau$.

Deci $P_n(1) = -\dfrac{(n-2)(n-1)}{2} = -C_{n-1}^2 \leqslant 0$ iar $P_n(\tau) = \tau > 0$ de unde rezultă că rădăcina a_n verifică inegalitățile

$$1 \leqslant a_n < \tau.$$

Vom demonstra că șirul $(a_n)_{n \in N}$ este monoton crescător, de unde va rezulta că este convergent, fiind și mărginit superior de τ.

Să studiem funcția:

$$g(x) = a^{x+2} - a^{x+1} - a^x + 1.$$

Obținem că $g'(x) = a^x \ln a(a^2 - a - 1) < 0$ pentru

$$\frac{-\sqrt{5} + 1}{2} < a < \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = \tau,$$

deci $g(x)$ este descrescătoare pentru a verificînd aceste inegalități.

Să demonstrăm acum că $a_{n-1} < a_n$:

$Q_n(a_{n-1}) = a_{n-1}^{n+2} - a_{n-1}^{n+1} - a_{n-1}^{n} + 1 < 0$, deoarece $Q_{n-1}(a_{n-1}) = a_{n-1}^{n+1} - a_{n-1}^{n} - a_{n-1}^{n-1} + 1 = 0$ și funcția $a_{n-1}^{x+2} - a_{n-1}^{x+1} - a_{n-1}^{x} + 1$ este descrescătoare în x, deoarece am arătat că $1 < a_{n-1} < \tau$.

Deoarece $Q_n(\mathfrak{G}) = (\mathfrak{G} - 1)P_n(\mathfrak{G}) = (\mathfrak{G} - 1)\mathfrak{G} > 0$ și $Q_n(a_{n-1}) < 0$, rezultă că rădăcina unică pozitivă $a_n > 1$, a lui Q_n se găsește în intervalul $(a_{n-1}, \mathfrak{G})$, la extremitățile căruia polinomul Q_n își schimbă semnul, deci $a_n > a_{n-1}$.

Șirul $(a_n)_{n\in N}$ fiind monoton crescător și mărginit superior, este convergent. Fie l limita lui.

Scriind că $Q_n(a_n) = 0$, obținem că

$$a_n^{n+2} - a_n^{n+1} - a_n^n + 1 = 0 \quad \text{sau:}$$

$$a_n^2 - a_n - 1 + \frac{1}{a_n^n} = 0.$$

Trecînd la limită pentru $n \to \infty$, obținem:

$$l^2 - l - 1 = 0 \;\text{ pentru că }\; \frac{1}{a_n^n} \to \frac{1}{l^\infty} = 0,$$

deoarece $a_n > a_2 > 1$ implică $l \geqslant a_2 > 1$.

Deci $l = \dfrac{\sqrt{5} + 1}{2}$, pentru că $l \in (1, \mathfrak{G}]$.

10.22. Prin substituția $x = \cos\theta$, prima dintre relațiile pe care le satisface polinomul $T_n(x)$ devine:

$$(1 - \cos^2\theta)T_n''(\cos\theta) - \cos\theta T_n'(\cos\theta) + n^2T_n(\cos\theta) = 0,$$

sau

$$\sin^2\theta \cdot T_n''(\cos\theta) - \cos\theta T_n'(\cos\theta) + n^2T_n(\cos\theta) = 0.$$

Ținînd seama că

$$[T_n(\cos\theta)]' = -\sin\theta \cdot T_n'(\cos\theta)$$

și că

$$[T_n(\cos\theta)]'' = -\sin\theta \cdot [T_n'(\cos\theta)]' - \cos\theta \cdot T'_n(\cos\theta) = \\ = \sin^2\theta \cdot T_n''(\cos\theta) - \cos\theta T_n'(\cos\theta),$$

obținem:

$$[T_n(\cos\theta)]'' + n^2 \cdot T_n(\cos\theta) = 0.$$

Dacă notăm $y(\theta) = T_n(\cos\theta)$, se obține ecuația diferențială

$$y'' + n^2 \cdot y = 0$$

a cărei soluție generală este:

$$y(\theta) = C_1 \sin(n\theta) + C_2 \cos(n\theta).$$

Pentru determinarea constantelor C_1 și C_2 folosim egalitățile $T_n(1) = 1$ și $T_n(x) = (-1)^n T_n(-x)$. Vom avea:

$$1 = T_n(1) = T_n(\cos 0) = C_1 \sin(n \cdot 0) + C_2 \cos(n \cdot 0) = C_2;$$

$$T_n(x) = T_n[\cos(\arccos x)] =$$
$$= C_1 \sin(n \arccos x) + \cos(n \arccos x);$$

$$T_n(-x) = T_n[\cos(\arccos(-x))] =$$
$$= C_1 \sin(n \arccos(-x)) + \cos(n \arccos(-x)) =$$
$$= C_1 \cdot \sin[n(\pi - \arccos x)] + \cos[n(\pi - \arccos x)] =$$
$$= C_1(-1)^{n+1} \sin(n \arccos x) + (-1)^n \cos(n \arccos x),$$

deci:

$$C_1 \sin(n \arccos x) + \cos(n \arccos x) =$$
$$= -C_1 \sin(n \arccos x) + \cos(n \arccos x),$$

de unde rezultă $C_1 = 0$ și prin urmare:

$$T_n(\cos\theta) = \cos n\theta \quad \text{sau} \quad T_n(x) = \cos(n \arccos x)$$

Atunci:

$$T_0(1) = \cos 0 = 1 \quad \text{și} \quad T_1(x) = \cos(\arccos x) = x,$$

iar:

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) =$$
$$= \cos[(n+1)\arccos x] + \cos[(n-1)\arccos x] =$$
$$= 2\cos(\arccos x)\cos(n \arccos x) =$$
$$= 2x \cos(n \operatorname{arc}\cos x) = 2x T_n(x).$$

Rezultă de aici relația din enunț.

10.23. Înlocuind în inegalitatea din enunț pe b cu $f(x)$, obținem

$$af(x) \leqslant \frac{1}{2}[af(a) + xf(x)],$$

echivalentă cu

$$(2a - x)\ f(x) \leqslant af(a). \qquad (1)$$

Deoarece inegalitatea (1) are loc pentru orice a și x din R_+, putem comuta pe a cu x și obținem:

$$(2x - a)\ f(a) \leqslant xf(x) \qquad (2)$$

Din (1) și (2) rezultă că pentru $x \in (0, 2a)$ avem inegalitățile:

$$\frac{2x - a}{x} f(a) \leqslant f(x) \leqslant \frac{a}{2a - x} f(a).$$

Deoarece $a \in (0, 2a)$ putem trece la limită în inegalitățile de mai sus cînd $x \to a$ și găsim:

$$f(a) \leqslant \lim_{x \to a} f(x) \leqslant f(a)$$

ceea ce arată că bijecțiile f sînt continue pe R_+.

Tot din inegalitățile (1) și (2) rezultă că atît la stînga, cît și la dreapta punctului a au loc inegalitățile:

$$\frac{f(x)}{a} \leqslant \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leqslant \frac{f(a)}{x}.$$

Trecînd la limită în inegalitatea de mai sus rezultă că funcția f este derivabilă în orice punct $a \in R_+$, iar derivata sa este $f'(a) = \dfrac{f(a)}{a}$.

Integrînd această ecuație diferențială, deducem că orice bijecție f care satisface egalitatea din enunț este de tipul:

$$f_k(a) = ka$$

unde $k \in R_+$.

10.24. Din relația pe care o îndeplinește, deducem că funcția f este derivabilă pe $(0, +\infty)$ și că $f'(x) > 0$. Înlocuind acum x cu $f'(x)$, obținem

$$f[f'(f'(x))] + f(f'(x)) = 0$$

și scăzînd membru cu membru această relație cu cea din enunț, rezultă

$$f[f'(f'(x))] = f(x).$$

Însă f este o bijecție deci, în particular, și o funcție injectivă. Prin urmare, egalitatea de mai sus ne conduce la

$$f'(f'(x)) = x.$$

Ținînd seama acum că f este derivabilă și derivînd în egalitatea din enunț, căpătăm:

$$f''(x) \cdot f'(f'(x)) + f'(x) = 0.$$

Există deci $f''(x)$ și $f''(x)x + f'(x) = 0$ (am ținut seama că $f'(f'(x)) = x$). Rezolvînd această ecuație diferențială obținem soluția $f(x) = c_1 \cdot \ln x + c_2$ unde $c_1, c_2 \in R$ sînt niște constante. Însă va trebui ca $f'(x) = \frac{c_1}{x} > 0$, $(\forall) x > 0$, deci $c_1 > 0$. Mai mult, va trebui ca:

$$f[f'(x)] + f(x) = 0 \Leftrightarrow c_1 \cdot \ln \frac{c_1}{x} + c_2 + c_1 \ln x + c_2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2c_2 + c_1 \ln c_1 = 0, \text{ deci } c_2 = -\frac{c_1 \ln c_1}{2}.$$

Funcția căutată este deci de forma
$f(x) = \alpha\left(\ln x - \frac{\ln \alpha}{2}\right)$, unde $\alpha > 0$.

10.25. După cum se știe există relația:

$$[x + a] = [x] + a, \text{ pentru } x \in R, \ a \in Z.$$

Atunci:

$$f(x+2) = (-1)^{[x+2]}\left(x+2-2\left[\frac{x+2}{2}\right]-1\right)+1 =$$

$$= (-1)^{[x]+2}\left(x+2-2\left[\frac{x}{2}+1\right]-1\right)+1 =$$

$$= (-1)^{[x]}\left(x+2-2\cdot\left[\frac{x}{2}\right]-2-1\right)+1 =$$

$$= (-1)^{[x]}\left(x-2\left[\frac{x}{2}\right]-1\right)+1 = f(x),$$

adică f este o funcție periodică, de perioadă 2.

Pentru a construi graficul funcției este suficient să o reprezentăm în intervalul $[0, 2)$, căci în celelalte intervale $[2, 4)$, $[4, 6)$,... el se repetă.

Deoarece pentru $x \in [0,1)$, $f(x) = x$ și $f(x) = 2 - x$ dacă $x \in [1,2)$, obținem graficul:

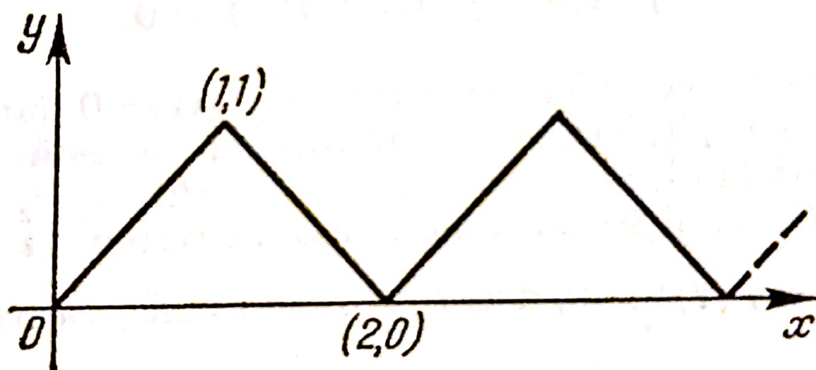


Fig. 10.25.

10.26. Presupunem că f satisface ecuația și fie $g(x) = f(x) - f(0) - xf'(0)$. Atunci g satisface de asemenea ecuația și $g(0) = g'(0) = 0$. Pentru $x = y = \frac{z}{2}$, avem $2g(z) = z \cdot g'(z)$ a cărei soluție se vede că este $g(z) = az^2$, unde a este o constantă.

Rezultă că orice soluție este de forma:

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

10.27. Domeniul maxim de definiție al funcției f este:

$$E_{max} = \left[0, \frac{3\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right).$$

Funcția f se mai scrie:

$$f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{1 + \sin 2x}} = \frac{\sin x}{\sqrt{(\sin x + \cos x)^2}} =$$
$$= \frac{\sin x}{|\sin x + \cos x|}.$$

Deci

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{\sin x + \cos x} & \text{dacă } x \in \left[0, \dfrac{3\pi}{4}\right) \cup \left(\dfrac{7\pi}{4}, 2\pi\right) \\ -\dfrac{\sin x}{\sin x + \cos x} & \text{dacă } x \in \left(\dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{7\pi}{4}\right). \end{cases}$$

Se observă că graficul funcției trece prin originea $O(0, 0)$ și prin $A(2\pi, 0)$ $\lim\limits_{x \to \frac{3\pi}{4}} f(x) = \infty$ și $\lim\limits_{x \to \frac{7\pi}{4}} f(x) = -\infty$.

Calculînd derivata a doua obținem

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1 + \sin 2x} & \text{dacă } x \in \left[0, \dfrac{3\pi}{4}\right) \cup \left(\dfrac{7\pi}{4}, 2\pi\right] \\ -\dfrac{1}{1 + \sin 2x} & \text{dacă } x \in \left(\dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{7\pi}{4}\right). \end{cases}$$

Deci $f'(x) > 0$ dacă $x \in \left[0, \frac{3\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right)$ și $f'(x) < 0$ dacă $x \in \left(\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right)$.

Calculînd derivata a doua avem

$$f''(x) = \begin{cases} -\dfrac{2\cos 2x}{(1 + \sin 2x)^2} & \text{dacă } x \in \left[0, \dfrac{3\pi}{4}\right) \cup \left(\dfrac{7\pi}{4}, 2\pi\right) \\ +\dfrac{2\cos 2x}{(1 + \sin 2x)^2} & \text{dacă } x \in \left(\dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{7\pi}{4}\right). \end{cases}$$

Rădăcinile lui f'' sînt: $x_1 = \frac{\pi}{4}$, $x_2 = \frac{5\pi}{4}$.

$f''(x) > 0$ dacă $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$ și $f''(x) < 0$

$$\text{dacă } x \in \left(\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right).$$

Graficul funcției f admite asimptotele verticale:

$$x = \frac{3\pi}{4} \text{ și } x = \frac{7\pi}{4}.$$

Tabloul de variație al funcției f este:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$		π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$		2π
$f'(x)$	$+$		$+$	$+\ +\infty$	$-\infty\ -$	$-$	$-$	$-$	$-\infty$	$+\infty$	$+$
$f(x)$	$0 \nearrow$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \nearrow$	$1 \nearrow$	$+\infty$	$+\infty \searrow$	$0 \searrow$	$-\frac{1}{\sqrt{2}} \searrow$	$1 \searrow$	$-\infty$	$-\infty \nearrow$	0
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$		$+\ +\ +$	0	$-\ -$		$-$	$-$

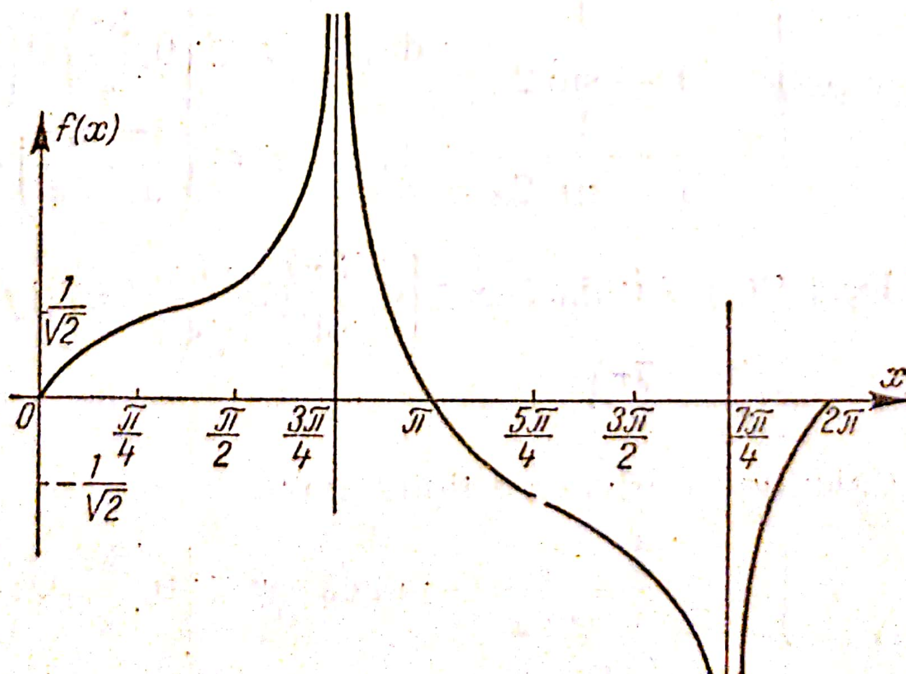


Fig. 10.27.

10.28. Se observă că funcția f este continuă și orice funcție continuă admite primitive.

Explicitînd funcția f obținem:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{dacă } x \geqslant 0 \\ -x & \text{dacă } x < 0. \end{cases}$$

Pentru $x \geqslant 0$ funcția f admite primitivele

$$F(x) = \int x \, dx = \frac{x^2}{2} + C_1.$$

Pentru $x < 0$ funcția f admite primitivele

$$F(x) = \int -x \, dx = -\frac{x^2}{2} + C_2.$$

Din condiția ca funcția F să fie continuă pe R găsim $C_1 = C_2$. Deci primitivele funcției f sînt date de:

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} + C & \text{pentru } x \geqslant 0 \\ -\dfrac{x^2}{2} + C & \text{pentru } x < 0. \end{cases}$$

Dealtfel rezultatul se poate restrînge, primitivele funcției f fiind date de:

$$F : R \to R; \quad F(x) = \frac{x|x|}{2} + C.$$

10.29. Se observă că pentru $x \in [0, 1]$ avem

$$\max\left(\frac{1}{4}, x^2\right) = \begin{cases} \dfrac{1}{4} & \text{dacă } x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right] \\ x^2 & \text{dacă } x \in \left(\dfrac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

Deci $\int_0^1 \max\left(\frac{1}{4}, x^2\right) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \max\left(\frac{1}{4}, x^2\right) dx +$

$$+\int_{\frac{1}{2}}^1 \max\left(\frac{1}{4}, x^2\right) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 x^2\, dx = \frac{1}{8} +$$

$$+ \left.\frac{x^3}{3}\right|_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{1}{8} + \frac{7}{24} = \frac{10}{24}.$$

10.30. Avem pentru $t > 1$:

$$0 = \int_{\frac{1}{t}}^t 0\, dx = \int_{\frac{1}{t}}^t \left(\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1}\right) dx = \int_1^t \frac{dx}{x^2+1} -$$

$$-\int_{\frac{1}{t}}^1 \frac{dx}{x^2+1} = \int_1^t \frac{dx}{x^2+1} + \int_1^{\frac{1}{t}} \frac{dx}{x^2+1} = f(t) + f\left(\frac{1}{t}\right).$$

Deci $f(t) + f\left(\frac{1}{t}\right) = 0 \Rightarrow f(t) = -f\left(\frac{1}{t}\right)$.

Cazul $t \in (0, 1)$ se tratează analog.

10.31. Se deduce ușor că domeniul maxim de definiție al funcției f este $(1, e) \cup (e, +\infty)$. Pe acest domeniu funcția f este continuă și orice funcție continuă admite primitive. Primitivele funcției f sînt date de

$$F(x) = \int f(x)\, dx = \int \frac{dx}{x(\ln x)(\ln \ln x)}.$$

Facem substituția: $\ln \ln x = t \Rightarrow \ln x = e^t \Rightarrow x = e^{e^t} \Rightarrow dx = e^{e^t} \cdot e^t dt$.

Obținem:

$$\int \frac{dx}{x(\ln x)(\ln \ln x)} = \int \frac{e^{e^t} \cdot e^t\, dt}{e^{e^t} \cdot e^t \cdot t} = \int \frac{dt}{t} =$$

$$= \ln|t| + C = \ln(|\ln \ln x|) + C.$$

Deci primitivele funcției f sînt date de

$$F : (1, e) \cup (e, +\infty) \to R$$
$$F(x) = \ln(|\ln \ln x|) + C.$$

10.32.

$$E_1'(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{-1}{\sqrt{1-\frac{2\cos^2 x}{1+\cos^2 x}}}\cdot\sqrt{2}\cdot$$

$$\cdot\frac{-\sin x\sqrt{1+\cos^2 x}+\cos x\cdot\frac{1}{2\sqrt{1+\cos^2 x}}\cdot 2\cos x\sin x}{1+\cos^2 x}=$$

$$=-\frac{\sqrt{1+\cos^2 x}}{\sqrt{1-\cos^2 x}}\cdot\frac{-\sin x(1+\cos^2 x)+\cos^2 x\sin x}{(1+\cos^2 x)\sqrt{1+\cos^2 x}}=$$

$$=\frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos^2 x}\,(1+\cos^2 x)}=\frac{\sin x}{|(\sin x)|\,(1+\cos^2 x)}=$$

$$=\frac{1}{1+\cos^2 x}.$$

$$E_2'(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{1+\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x\left(2+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right)}=$$

$$=\frac{1}{\cos^2 x\left(\frac{\cos^2 x+\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}\right)}=\frac{1}{1+\cos^2 x}.$$

$E_1'(x)=E_2'(x)=\dfrac{1}{1+\cos^2 x}\Rightarrow E_1,\ E_2$ sînt primitive ale funcției $f(x)=\dfrac{1}{1+\cos^2 x}$.

Prima primitivă poate fi folosită direct cu formula lui Newton-Leibniz:

$$\int_0^{\pi}\frac{dx}{1+\cos^2 x}=E_1(x)\Big|_0^{\pi}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\arccos\frac{\sqrt{2}\cos\pi}{\sqrt{1+\cos^2\pi}}-\right.$$

$$\left.-\arccos\frac{\sqrt{2}\cos 0}{\sqrt{1+\cos^2 0}}\right)=\frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

A doua primitivă nu poate fi folosită direct, numai aplicînd formula lui Newton-Leibniz, deoarece în punctul $\frac{\pi}{2} \in [0, \pi]$, tg x nu este definită. Totuși, cum $E_2(x)$ este primitivă a funcției, poate fi folosită pentru calcularea integralei. Avem în acest caz o integrală improprie, și anume integrala unei funcții discontinue.

$$\int_0^{\pi} f(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} f(x)\,dx -$$

$$-\lim_{\varepsilon\nearrow 0}\int_{\frac{\pi}{2}+\varepsilon}^{\pi} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\searrow 0}\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} -$$

$$-\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\Big|_{\frac{\pi}{2}+\varepsilon}^{\pi} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)}{\sqrt{2}} - \operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg} 0}{\sqrt{2}}\right) -$$

$$-\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\pi}{\sqrt{2}} - \operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)}{\sqrt{2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\lim_{\varepsilon\to 0}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\lim_{\varepsilon\to 0}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)}{\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Dacă am aplica însă direct formula lui Newton-Leibniz, atunci am avea:

$$\int_0^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\Big|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\pi}{\sqrt{2}} - \operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg} 0}{\sqrt{2}}\right) = 0, \text{ evident fals.}$$

10.33. a). Deoarece $g'(x) = \frac{2\sin x \cdot \cos x}{1 + \sin^2 x} = \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x}$; atît $g(x)$ cît și $g'(x)$ există pentru orice $x \in R$.

b). Ținînd seama de punctul a) al problemei, avem:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1 + \sin^2 x} dx = \left[\ln (1 + \sin^2 x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$
$$= \ln 2 - \ln 1 = \ln 2 \approx 0{,}6931.$$

c). Ecuația dată, care se mai scrie $y'' + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot y = 0$, este de forma $y'' + \omega^2 \cdot y = 0$ și are soluția generală $y = C_1 \cos \frac{3}{2} x + C_2 \sin \frac{3}{2} x$.

Impunînd acestei soluții restricțiile din enunț, rezultă $C_1 = -2$ și $C_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$, deci soluția cerută este:

$$y(x) = -2\cos \frac{3}{2} x + \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \frac{3}{2} x.$$

10.34. Se observă că $xt \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $(\forall) x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ și $(\forall) t \in [1, 2]$.

Funcția $\sin x$ este strict crescătoare pe intervalul $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Deci: $(\forall)\ x_1, x_2 \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ cu $x_1 > x_2$ și $(\forall) t \in [1, 2]$ avem:

$$x_1 > x_2 \Rightarrow x_1 t > x_2 t \text{ și } x_1 t,\ x_2 t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \sin x_1 t >$$
$$> \sin x_2 t \Rightarrow \frac{\sin x_1 t}{t} > \frac{\sin x_2 t}{t} \Rightarrow \int_1^2 \frac{\sin x_1 t}{t} dt >$$
$$> \int_1^2 \frac{\sin x_2 t}{t} dt \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Rezultă că funcţia f este strict crescătoare în intervalul $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

10.35. a). Pentru ca funcţia $I(f)$ să fie definită trebuie ca $a \leqslant 0$. Dacă $a > 0$ atunci pe intervalul $[0, a)$ s-ar putea ca funcţia f să nu fie integrabilă sau să nu fie definită ceea ce ar urma ca funcţia $I(f)$ să nu fie definită pe $[0, +\infty)$.

Funcţia $I(f)$ este derivabilă în toate punctele în care funcţia $e^t f(t)$ este continuă şi cum funcţia $e^t f(t)$ este continuă pe $[0, +\infty) \subseteq [a, \infty)$, rezultă că funcţia $I(f)$ este derivabilă pe tot domeniul ei de definiţie şi

$$I'(f)(x) = e^x f(x).$$

b). Funcţia $I(f)$ este derivabilă pe $[0, \infty)$, deci pentru ca ecuaţia să aibă soluţii trebuie ca şi funcţia f să fie derivabilă pe $[0, +\infty)$. În acest caz putem diferenţia egalitatea:

$$I(f)(x) = kf(x)$$

şi obţinem ecuaţia diferenţială liniară omogenă

$$e^x f(x) = kf'(x),$$

a cărei soluţie generală este

$$f(x) = e^{\frac{1}{k}\int e^x \, dx} = e^{\frac{e^x}{k} + C} = Ce^{\frac{e^x}{k}}.$$

10.36. a). Fie $m \in N$, $m > 1$. Deoarece f este descrescătoare pe intervalul $[m - 1, m]$ avem:

$$\inf_{m-1 \leqslant t \leqslant m} f(t) = f(m) \quad \text{şi} \quad \sup_{m-1 \leqslant t \leqslant m} f(t) = f(m - 1).$$

Ţinînd seama că lungimea intervalului $[m - 1, m]$ este 1, rezultă:

$$f(m) \leqslant \int_{m-1}^{m} f(t) \, dt \leqslant f(m - 1)$$

deci, pentru $n \in N$, $n > 1$:

$$\sum_{i=2}^{n} f(i) = f(2) + f(3) + \ldots + f(n) \leqslant \int_1^2 f(t)dt + \ldots +$$

$$+ \int_{n-1}^{n} f(t)dt = \int_1^n f(t)dt \qquad (1)$$

Dacă $\lim\limits_{x\to\infty} F(x)$ există și este finită, atunci $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) =$ $= \lim\limits_{x\to\infty} \int_1^x f(t)\mathrm{d}t = \int_1^\infty f(t)\mathrm{d}t = l$ (finit). Din faptul că $f(t) > 0$, $(\forall) t \in [1, \infty)$, rezultă:

$$\int_1^n f(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_1^\infty f(t)\mathrm{d}t = l$$

pentru $(\forall) n > 1$. De aici și din (1) rezultă că șirul de termen general

$$\alpha_n = \sum_{i=2}^{n} f(i)$$

este majorat și deci șirul $a_n = f(1) + \alpha_n$ este mărginit.

Din faptul că f este pozitivă rezultă că șirul $\{a_n\}_{n\in N}$ este și crescător, deci el va fi convergent.

b). Considerăm $f : [1, \infty) \to (0, \infty)$ dată de $f(t) = = \frac{1}{t^\alpha}$, unde $\alpha > 1$.

Deoarece $f'(t) = -\frac{\alpha}{t^{\alpha+1}} < 0$, funcția este descrescătoare.

Apoi:

$$\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \int_1^x t^{-\alpha}\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^x = \frac{x^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha}$$

și deci:

$$\lim_{x\to\infty} \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1} - 1}{1-\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1} \text{ este finită.}$$

Condiția de la punctul a) fiind satisfăcută, rezultă că șirul $\{x_n\}_{n\in N}$, unde:

$$x_n = \frac{1}{1^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha} + \ldots + \frac{1}{n^\alpha}$$

este convergent pentru $\alpha > 1$.

Observație. Problema constituie un caz particular al criteriului integral al lui Cauchy.

10.37. Considerăm funcția auxiliară φ, $\varphi : [a, b] \to R$ dată de relația:

$$\varphi(x) = (x - b)\int_a^x f(t)\,dt.$$

Funcția φ este derivabilă pe $[a, b]$ iar derivata sa este $\varphi' : [a, b] \to R$ cu

$$\varphi'(x) = \int_a^x f(t)\,dt + (x - b)\,f(x).$$

Cum $\varphi(a) = (a - b)\int_a^a f(t)\,dt = 0$ iar $\varphi(b) = 0$, aplicînd teorema lui Rolle, rezultă că există $\xi \in (a, b)$ cu proprietatea:

$$\varphi'(\xi) = \int_a^\xi f(t)\,dt + (\xi - b)\,f(\xi) = 0,$$

de unde se obține egalitatea din enunț.

10.38. a) Funcția f fiind continuă și funcția $\frac{f(x)}{1 + x^2}$ este continuă, de unde rezultă că funcția $\int_0^x \frac{f(t)}{1 + t^2}\,dt$ este derivabilă. Deci funcția $f(x) = \lambda\,(1 + x^2)\left[1 + \int_0^x \frac{f(t)}{1 + t^2}\,dt\right]$ este derivabilă în orice punct $x \in R$.

b) Relația din enunț se mai scrie:

$$\frac{f(x)}{1 + x^2} = \lambda\left(1 + \int_0^x \frac{f(t)}{1 + t^2}\,dt\right) \quad (1)$$

Notăm $g(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{1 + t^2}\,dt$. Avem $g'(x) = \frac{f(x)}{1 + x^2}$.

Relația (1) devine:

$$g'(x) = \lambda(1 + g(x)) \Rightarrow \frac{g'(x)}{1 + g(x)} = \lambda \Rightarrow \ln|1 + g(x)| =$$
$$= \lambda x + c \Rightarrow g(x) = e^{\lambda x + c} - 1 \Rightarrow g'(x) = \lambda e^{\lambda x + c} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{f(x)}{1 + x^2} = \lambda e^{\lambda x + c} \Rightarrow f(x) = (1 + x^2)\lambda e^{\lambda x + c}.$$

Pentru verificare introducem această soluție în (1) și obținem:

$$e^{\lambda x+c} = 1 + \lambda \int_0^x e^{\lambda t+c}\, dt = 1 + \lambda\left(\frac{1}{\lambda} e^{\lambda t+c}\Big|_0^x\right) =$$

$$= e^{\lambda x+c} + (1 - e^c).$$

Rezultă $1 - e^c = 0 \Rightarrow c = 0$. Deci singura funcție care satisface relația din enunț este:

$$f(x) = \lambda(1 + x^2)e^{\lambda x}.$$

10.39. 1°. Funcția f fiind continuă, rezultă că funcția $\int_0^x f(t)\, dt$ este derivabilă și datorită egalității din enunț deducem că și funcția f este derivabilă.

Derivînd în ambii membri ai relației din enunț obținem:

$$f(x) = \frac{1}{2}[f(x) + k] + \frac{x}{2} f'(x). \qquad (1)$$

Punînd $x = 0$ obținem $f(0) = k$.

2°. A găsi funcțiile continue care satisfac relația din enunț este echivalent cu a găsi funcțiile f care verifică ecuația diferențială (1). Din (1) deducem

$$f(x) = xf'(x) + k. \qquad (2)$$

Să rezolvăm mai întîi ecuația omogenă

$$f(x) = xf'(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \ln|f(x)| =$$

$$= \ln|cx| \Leftrightarrow f(x) = cx.$$

O soluție particulară a ecuației (2) este $f_1(x) = k$.

Deci singurele funcții continue care verifică ecuația (2) și implicit relația din enunț sînt

$$f(x) = cx + k \text{ cu } c \in R.$$

10.40. 1°. Domeniul maxim de definiție al funcției f este $(-\infty,\ -2) \cup (0, +\infty)$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0;\ \lim_{x\to-2} f(x)=-\infty;\ \lim_{x\to0} f(x)=\infty;\ \lim_{x\to\infty} f(x)=0.$$

$$f'(x) = \frac{-2}{x(x+2)} < 0;\ (\forall)x \in (-\infty,\ -2) \cup (0,\ \infty).$$

$$f''(x) = \frac{4(x+1)}{x^2(x+2)^2};\ \text{pentru}\ \ x \in (-\infty,\ -2)\ \ \text{avem}$$

$f''(x) < 0$ și pentru $x \in (0, \infty)$ avem $f''(x) > 0$.

Graficul funcției f are ca asimptote dreptele $x = -2;\ x = 0;\ y = 0$.

Tabloul de variație al funcției f este

x	$-\infty$		-2	0		$+\infty$
f'		$-$			$-$	
f	0	↘	$-\infty$	$+\infty$	↘	0
f''		$-$			$+$	

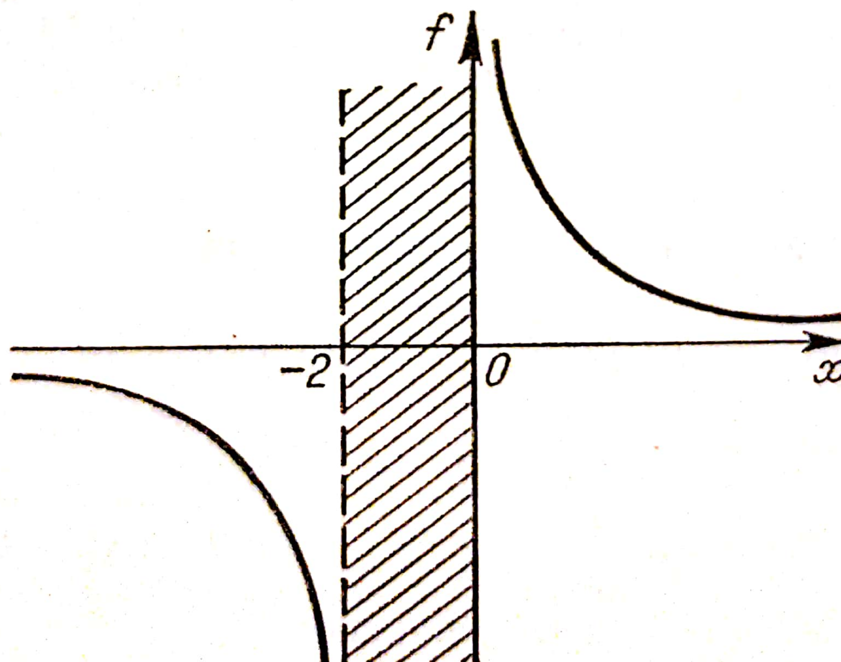


Fig. 10.40.

2°. $u_n = f(1) + f(2) + \ldots + f(n) = \ln\left(1 + \frac{2}{1}\right) + $

$$+ \ln\left(1 + \frac{2}{2}\right) + \ldots + \ln\left(1 + \frac{2}{n}\right) = \ln\left[\left(1 + \frac{2}{1}\right)\left(1 + \right.\right.$$

$$\left.\left.+ \frac{2}{2}\right)\ldots\left(1 + \frac{2}{n}\right)\right] = \ln\frac{3\cdot 4\cdot 5\ldots(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n} =$$

$$= \ln\frac{(n+1)(n+2)}{2} \text{ și evident } \lim_{n\to\infty} u_n =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \ln\frac{(n+1)(n+2)}{2} = \infty.$$

3°. Integrînd prin părți obținem:

$$\int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^2 \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right) dx = x\ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)\Big|_1^2 -$$

$$- \int_1^2 x\cdot\frac{-2}{x(x+2)}\,dx = 2\ln 2 - \ln 3 + 2\int_1^2 \frac{1}{x+2}\,dx =$$

$$= \ln\frac{4}{3} + 2\left(\ln(x+2)\Big|_1^2\right) = 3\ln\frac{4}{3}.$$

10.41. Pentru demonstrarea primei duble inegalități vom observa că putem scrie:

$$\int_a^b x^x\,dx = \int_a^b e^{x\ln x}\,dx.$$

Însă pentru $x > 1$ avem:

$$x - 1 < x\ln x < x(x-1). \qquad (1)$$

Într-adevăr, considerînd $f: (1, \infty) \to R$ dată de $f(x) = x\ln x - x + 1$, avem $f'(x) = \ln x > 0$ (căci $x > 1$), deci f este strict crescătoare și prin urmare:

$$f(x) > f(1) = 0 \quad \text{deci} \quad x\ln x > x - 1, \quad (\forall)\, x > 1.$$

Cea de-a doua inegalitate din (1) se demonstrează prin aceeași metodă.

Folosind inegalitățile (1) avem:

$$\int_a^b x^x \, dx = \int_a^b e^{x \ln x} \, dx > \int_a^b e^{x-1} \, dx = e^{x-1} \Big|_a^b =$$

$$= e^{b-1} - e^{a-1} = \frac{1}{e}(e^b - e^a)$$

și

$$\int_a^b x^x \, dx = \int_a^b e^{x \ln x} \, dx \leqslant \int_a^b e^{x^2-x} \, dx \leqslant \int_a^b e^{b^2-x} \, dx =$$

$$= e^{b^2} \int_a^b e^{-x} \, dx = - e^{b^2} \cdot \frac{1}{e^x} \Big|_a^b = - e^{b^2} \left(\frac{1}{e^b} - \frac{1}{e^a} \right) =$$

$$= e^{b^2-a} - e^{b^2-b} = (e^b - e^a) e^{b^2-a-b}.$$

Tot din (1) rezultă:

$$\frac{1}{x-1} < \frac{1}{\ln x} < \frac{x}{x-1}, \quad (\forall)\ x > 1.$$

Atunci:

$$\int_a^b \frac{dx}{\ln x} \geqslant \int_a^b \frac{dx}{x-1} = \ln \frac{b-1}{a-1}$$

și

$$\int_a^b \frac{dx}{\ln x} \leqslant \int_a^b \frac{x}{x-1} \, dx = \int_a^b dx + \int_a^b \frac{dx}{x-1} =$$

$$= b - a + \ln \frac{b-1}{a-1}.$$

Cu aceasta inegalitățile din enunț sînt demonstrate. Semnul egal are loc cînd $a = b$.

10.42. Vom considera funcția auxiliară φ, $\varphi: [a, b] \to R$, dată de relația:

$$\varphi(x) = (x - a)(x - b) \int_a^x f(t) \, dt.$$

Funcția φ este, evident, derivabilă pe $[a, b]$, iar derivata sa este:

$$\varphi'(x) = (2x - a - b) \int_a^x f(t) \, dt + (x - a)(x - b) f(x).$$

Pe de altă parte, $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. Aplicînd teorema lui Rolle, rezultă că există $\xi \in (a, b)$, astfel încît:

$$(2\xi - a - b)\int_a^{\xi} f(t)\,\mathrm{d}t + (\xi - a)(\xi - b) f(\xi) = 0.$$

Din relația de mai sus rezultă egalitatea de demonstrat atunci și numai atunci cînd $\xi \neq \frac{a+b}{2}$, ceea ce este echivalent cu faptul că $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \neq 0$.

10.43. Notăm $\varphi(x) = \int \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x$ și $F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x$. Atunci $l(t) = \varphi(t) - \varphi(0)$ și $S(t) = F(t) - F(0)$; deci $l'(t) = \varphi'(t) \Rightarrow$

$$l'(t) = \sqrt{1 + [f'(t)]^2},\ l''(t) = \frac{2f''(t) f'(t)}{2\sqrt{1 + [f'(t)]^2}}$$

$$\Rightarrow l'(t)\, l''(t) = f''(t) \cdot f'(t) \qquad (1)$$

Din $S(t) = F(t) - F(0)$ și $F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x$ rezultă $S'(t) = F'(t) \Rightarrow S'(t) = f(t) \Rightarrow S''(t) = f'(t)$ și $S'''(t) = f''(t) \Rightarrow S''(t) \cdot S'''(t) = f''(t) \cdot f'(t)$ (2)

Din (1) și (2) rezultă $l'(t)\, l''(t) = S''(t)\, S'''(t)$, adică relația din enunț.

10.44. 1) Ținînd seama de definiția funcției parte întreagă, rezultă că pentru orice număr întreg k

$$f(x) = k \cdot \sin \pi x, \quad \text{pentru } x \in [k, k+1).$$

Cunoscînd graficul funcției $\sin \pi x$ și ținînd seama de semnul întregului k, graficul se poate trasa imediat.

Se observă că graficul este simetric față de punctul $A\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ și că minimele și maximele consecutive (pentru $x > 0$) sînt plasate pe dreptele $2x + 2y - 1 = 0$, respectiv $2x - 2y - 1 = 0$.

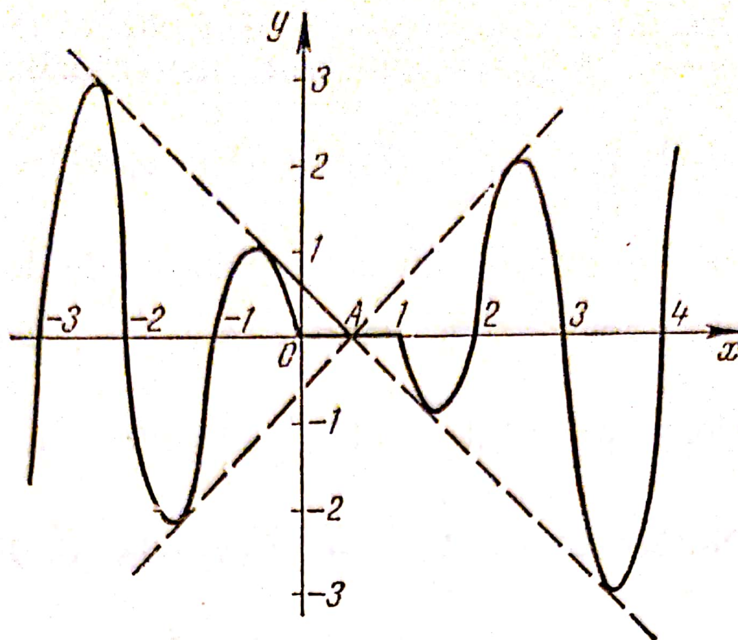


Fig. 10.44.

2) Pentru orice $l \in N$, se observă că $m_{2l} = 0$, căci $f(x) \geqslant 0$ pentru $x \in [2l,\ 2l + 1)$ și

$$m_{2l+1} = f\left(2l + \frac{3}{2}\right) = -(2l + 1).$$

Rezultă că

$$S_n = \left(\sum_{l=1}^{n} 2^{m_{2l}} - n\right) + \sum_{l=1}^{n} 2^{m_{2l-1}} = \sum_{l=1}^{n} 2^{-(2l-1)},$$

care este suma unei progresii geometrice cu primul termen $\dfrac{1}{2}$ și rația $\dfrac{1}{4}$, de unde:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{2}{3}.$$

3) Din definiția funcției se vede că, pentru $x \in [k, k + 1)$, avem

$$f(x - 2k) = [x - 2k] \sin \pi(x - 2k) = -k \cdot \sin \pi x = -f(x),$$

de unde obținem

$$\int_k^{k+1} f(x)\,dx = \int_{-k}^{-k+1} f(x-2k)\,dx = -\int_{-k}^{-k+1} f(x)\,dx$$

și deci

$$\int_{-n}^{n} f(x)\,dx = \int_{-n}^{-n+1} f(x)\,dx + \sum_{k=1}^{n-1}\left[\int_k^{k+1} f(x)\,dx + \right.$$

$$\left. + \int_{-k}^{-k+1} f(x)\,dx\right] = \int_{-n}^{-n+1} f(x)\,dx =$$

$$= \frac{n}{\pi}\cos \pi x \Big|_{-n}^{-n+1} = \frac{2}{\pi}\cdot n\cdot(-1)^{n+1}.$$

Deci

$$a_n = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{n\cdot(-1)^{n+1}}{\lambda^n}.$$

Rezultă că, pentru $\lambda \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, în timp ce pentru $\lambda \in [-1, 1] - \{0\}$, șirul este divergent, fiind crescător în valoare absolută și cu termeni de semn alternant.

10.45. a) Pentru $t \in (0, x]$ avem:

$$\int_0^x tf(t)\,dt \leqslant \int_0^x xf(t)\,dt = x\int_0^x f(t)\,dt,$$

de unde

$$\varphi(x) = \frac{\int_0^x tf(t)\,dt}{\int_0^x f(t)\,dt} \leqslant x.$$

b) Deoarece $f(t) > 0$ și $x > 0$ avem $\int_0^x f(t)\,dt \neq 0$.

Cum $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ reprezintă o primitivă pentru funcția f, φ este derivabilă, căci este raportul a două funcții derivabile. Derivata va fi dată de relația:

$$\varphi'(x) = \frac{\left[\int_0^x tf(t)\,dt\right]' \cdot \int_0^x f(t)\,dt - \left[\int_0^x f(t)\,dt\right]' \cdot \int_0^x tf(t)\,dt}{\left[\int_0^x f(t)\,dt\right]^2} =$$

$$= \frac{xf(x) \cdot \int_0^x f(t)\,dt - f(x) \cdot \int_0^x tf(t)\,dt}{\left[\int_0^x f(t)\,dt\right]^2}.$$

c) Avem

$$xf(x) \cdot \int_0^x f(t)\,dt - f(x) \cdot \int_0^x tf(t)\,dt = f(x) \cdot \left[x \int_0^x f(t)\,dt - \right.$$

$$\left. - \int_0^x tf(t)\,dt\right] \geqslant 0,$$

în conformitate cu enunțul ($f(x) > 0$) și punctul a).

Rezultă că $\varphi'(x) \geqslant 0$, deci φ este o funcție crescătoare.

10.46. Deoarece f este continuă rezultă că funcția

$$\varphi(x) = e^{\int_a^x f(t)\,dt} \cdot (x - a)(x - b).$$

este derivabilă pe $[a, b]$. Deoarece $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$, conform teoremei lui Rolle, există un punct $\xi \in (a, b)$ astfel ca $\varphi'(\xi) = 0$.

Rezultă

$$e^{\int_a^\xi f(t)\,dt} [f(\xi)(\xi - a)(\xi - b) + 2\xi - a - b] = 0,$$

de unde găsim relația din enunț.

10.47. Funcția f fiind continuă, urmează că funcția F, $F: [a_1, a_n] \to R$ dată de relația

$$F(x) = e^{-\int_{a_1}^{x} f(t)\,dt} \cdot \prod_{j=1}^{n} (x - a_j)$$

este derivabilă pe $[a_1, a_n]$.

Cum pentru $(\forall) i \in \{1, \ldots, n\}$ avem $F(a_i) = 0$, urmează că pe fiecare din intervalele $[a_i, a_{i+1}]$ putem aplica teorema lui Rolle. Rezultă că există $\xi_i \in (a_i, a_{i+1})$, astfel încît $F'(\xi_i) = 0$. Dar:

$$F'(\xi_i) = e^{-\int_{a_1}^{\xi_i} f(t)\,dt} \cdot \prod_{j=1}^{n} (\xi_i - a_j) \left[-f(\xi_i) + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\xi_i - a_j} \right].$$

Cum primii doi factori din produsul de mai sus sînt diferiți de zero, rezultă că paranteza este zero, ceea ce demonstrează aserțiunea din enunț.

10.48. 1). Considerăm șirurile $b_n = f^{(n)}(b)$ și $c_n = g^{(n)}(b)$, $n \in N$. Șirurile $\{b_n\}_{n \in N}$ și $\{c_n\}_{n \in N}$ sînt mărginite, toți termenii lor aparținînd intervalului $[a, b]$; în plus, din condiția d) rezultă că, pentru orice $n \in N$, avem:

$$b_{n+1} = f(f^{(n)}(b)) < f^{(n)}(b) = b_n$$

și, analog, $c_{n+1} < c_n$; deci șirurile sînt și monoton descrescătoare și deci convergente.

Din condițiile a) și d) obținem:

$$b_2 = f(f(b)) \leqslant f(g(b)) \leqslant g(g(b)) = c_2$$

și, prin inducție, rezultă că, $(\forall) n \in N$, avem: $b_n \leqslant c_n$.

Prin urmare

$$\lim_{n \to \infty} b_n \leqslant \lim_{n \to \infty} c_n.$$

În virtutea acestei relații, pentru a demonstra primul punct al problemei, va fi suficient să arătăm că:

$$c = \lim_{n \to \infty} c_n = a.$$

Este evident că $c \in [a, b]$. Să presupunem prin absurd că $c > a$.

Şirul $\{c_n\}_{n\in N}$ fiind convergent, condiţia b) ne asigură că:

$$\lim_{n\to\infty} g(c_n) = g(\lim_{n\to\infty} c_n)$$

de unde conchidem că $g(c) = c$.

Dar dacă $c > a$, din condiţia d) obţinem $g(c) < c$ şi sîntem astfel conduşi la o contradicţie. Deci $c = a$ şi demonstraţia este încheiată.

2). Se observă că rezultatul demonstrat la primul punct este de fapt valabil şi dacă luăm în loc de punctul b un punct arbitrar $x_0 \in (a, b]$, adică

$$\lim_{n\to\infty} f^{(n)}(x_0) = a.$$

Dar din condiţia c) deducem că $f^{(n)}(a) = a$ pentru orice $n \in N$ şi deci şi $\lim\limits_{n\to\infty} f^{(n)}(a) = a$. Prin urmare

$$\int_a^b [\lim f^{(n)}(x)]\,dx = \int_a^b a\,dx = a(b-a).$$

Se ştie că compunerea a două funcţii descrescătoare este de asemenea descrescătoare. Rezultă că $(\forall) n \in N$, funcţia $f^{(n)}$ este descrescătoare. Folosind din nou condiţia d) şi proprietăţile de monotonie ale integralei, putem scrie inegalităţile:

$$a(b-a) = f^{(n)}(a)\,(b-a) \leqslant \int_a^b f^{(n)}(x)\,dx \leqslant f^{(n)}(b)\cdot(b-a).$$

Din aceste inegalităţi şi din rezultatul de la punctul 1) deducem

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx = a(b-a).$$

Prin urmare

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f^{(n)}(x)\,dx = \int_a^b [\lim_{n\to\infty} f^{(n)}(x)]\,dx.$$

Observaţie. Condiţia ca f să fie integrabilă nu este de fapt necesară, deoarece se poate demonstra că monotonia unei funcţii atrage integrabilitatea sa. S-a pus însă această condiţie deoarece rezultatul menţionat nu se găseşte în manualele de liceu.
